

Колесникова Софья Ильинична.
Заслуженный преподаватель МФТИ (кафедра высшей математики),
Ведущий специалист ЗФТШ при МФТИ.
Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» (гриф ФИПИ),
«Решение сложных задач ЕГЭ», серии пособий
«МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ».
Лауреат премии Правительства
Российской Федерации в области образования 2020 г.

Учебник, учитель, ГДЗ, репетитор и … ученик

(Читаем учебники: заключительная часть 9(2). Предикаты. Следствия. Квазиследствия. Равносильность)

Желающим научиться препятствует
авторитет тех, кто учит.
(Цицерон Марк Туллий)

Предисловие

Это заключительная часть большой статьи «**Учебник, учитель, ГДЗ, репетитор и …ученик**».

Закончив статью, я была очень удивлена, насколько важным для решения примеров оказалось ОДЗ, в отличие от оформления решений многими авторами, когда на ОДЗ обращается внимание только в конце решения.

Оказалось, что *любой* предикат (уравнение, неравенство и т. д.) рассматривается на некотором множестве *M*. Если рассматривается несколько предикатов, то они рассматриваются на одном и том же множестве.

В то же время в определениях основных понятий школьной математики информация о том, на каком множестве рассматриваются уравнения или неравенства, как правило, отсутствует.

Поэтому определения некоторых понятий были *уточнены*.

Приведены примеры применения уточнённых определений. Проведено сравнение «работы» новых формулировок и старых, взятых из учебников разных авторов.

Для тех, кто не видел предыдущих частей статьи, приведём *уточнённые* определения основных понятий школьной математики:

ОДЗ, равносильности, следствия, квазиследствия.

Больше всего изменилось ***определение ОДЗ: там добавился пункт б).***

Во всех трёх основных определениях ***добавилась первая строчка.***

Теперь требуется, чтобы рассматриваемые уравнения (*или неравенства*) *были* ***определены на одном и том же множестве.***

В статье выясняется, что все новые определения удовлетворяют соответствующим определениям теории предикатов.

1. ОДЗ (О1)

«***Множество M***, на котором

а) *определены* заданные функции $F(x), f(x), g(x)$, и

б) ***равенство*** $F(x) = 0$ или $f(x) = g(x)$ (неравенства $F(x) \vee 0$ или $f(x) \vee g(x)$) ***имеет смысл***,

назовём *ОДЗ* уравнения $F(x) = 0$ или $f(x) = g(x)$ (неравенств $F(x) \vee 0$ или $f(x) \vee g(x)$».

Обозначим

$$M = ОДЗ\big(f_1(x) = g_1(x)\big) \cap ОДЗ\big(f_2(x) = g_2(x)\big).$$

2. Равносильность (О2)

«Пусть на ***множестве*** M заданы (определены) ***два уравнения*** $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ (или два неравенства $f_1(x) \vee g_1(x)$ и $f_2(x) \vee g_2(x)$).

Тогда уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ (или неравенства $f_1(x) \vee g_1(x)$ и $f_2(x) \vee g_2(x)$)) называются ***равносильными на множестве*** M,

1) если *каждое* решение первого уравнения (неравенства), ***принадлежащее множеству M***, является решением второго, и, наоборот,

2) *каждое* решение второго, **принадлежащее *M***, является решением первого;

3) или ни одно из уравнений (неравенств) на ***M*** не имеет решений».

3. Следствие (О3)

«Пусть уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ ***заданы на некотором множестве*** $M \neq \varnothing$.

Тогда уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ называется уравнением – следствием уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ ***на множестве*** M, если любое решение уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, *принадлежащее* M, является решением *уравнения* $f_2(x) = g_2(x)$ *на* M.

Если уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ не имеет решений на *множестве* M, то *любое* уравнение, определённое на M, *считается* его следствием».

4. Квазиследствие (пишется впервые) (О4)

«Пусть

1) уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ ***задано на множестве*** M, а уравнения $f_2(x) = g_2(x)$ задано **на** $M^* \supseteq M$,

2) *любое* решение уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, ***принадлежащее M***, является решением уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, ***принадлежащим*** M^*.

Тогда уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ назовём **квазиследствием** уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ ».

В статье есть и другие уточнения. Все эти уточнения, по-моему, стоит учесть авторам новых учебников.

Кроме того,

а) Очень *хотелось бы вернуть* знак тождества «≡».

Например,

$\sqrt{x^2} \equiv x, x \geq 0,$

$\sqrt{x^2} \equiv |x|,$

$\frac{x-2}{x+4} \equiv \frac{x-2}{x+4} \cdot \frac{x+1}{x+1}, (x+1)(x+4) \neq 0,$

$\sqrt{1+\cos 2x} \equiv \sqrt{2\cos^2 x} \equiv \sqrt{2}\cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],$

$\sqrt{1+\cos 2x} \equiv \sqrt{2\cos^2 x} \equiv -\sqrt{2}\cos x, x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right].$

На мой взгляд, такая запись запоминается лучше.

А для компьютера понятней?

б) Очень хочется *убрать* в тексте учебников и пособий (в частности, в сборниках под редакцией И. В. Ященко) точку с запятой «;» между такими выражениями, как, например,

$$4x - 1 = 3x; 4x - 3x - 1 = 0; x - 1 = 0; x = 1, \text{ и}$$

вернуть обычную запятую «,» между ними.

$$4x - 1 = 3x, 4x - 3x - 1 = 0, x - 1 = 0, x = 1.$$

Нужна ли нам при этом теория предикатов?

В статье показано, что уточнённые определения соответствуют соответствующим определениям теории предикатов.

Читатели, знакомые с этой теорией, могут пропустить текст, а посмотреть, если интересно, только примеры.

Статья довольно сложная. Думаю, что она прежде всего подойдёт молодым учителям, которые учились по современным учебникам, но «спотыкались», как и я. Привычка выпускников работать с чёткими определениями и равносильными преобразованиями *на множестве* поможет лучше понимать и изучать и высшую математику.

Предикаты (продолжение)

1. Свойства предикатов

1. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***выполнимым на*** M, если существует, по *крайней мере, один* набор конкретных $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in M$, при подстановке которых вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ предикат превратится в *истинное* высказывание.

Например, пусть $M = [-2;2]$, $P(x) = \left\{\sqrt{4 - x^2} = x + 2\right\}$.

Очевидно, что $\exists x = 0 \left| P(0) = \left\{\sqrt{4-0} = 0 + 2\right\}\right.$ – поэтому предикат выполним, т. е. уравнение $\sqrt{4 - x^2} = x + 2$ имеет, по крайней мере, одно решение.

Отсюда следует, что предикат *не выполним на* M, если при *любой* подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ конкретных $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in M$ он превращается в ложное высказывание.

Например, предикат $P(x)=\left\{\sqrt{x}=\sin x-2\right\}$ – не выполним, т. е. уравнение не имеет решений, т. к. $\sin x-2<0$ при любо $x\in R$, но...предикат $Q(x)=\overline{P(x)}=\left\{\sqrt{x}\neq\sin x-2\right\}$ выполним: $\forall x\in R\left|\overline{P(x)}\right.$.

(Заметим, что если $M=\varnothing$, то уравнение не имеет решений.

Но уравнение может не иметь решений и тогда, когда $M\neq\varnothing$).

Предикат $A(x)=\left\{\sqrt{f(x)}=g(x)\right\}$ на $M_1=\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ g(x)<0.\end{cases}$ тоже не выполним, т. к. там он тождественно ложен.

А что мы скажем про предикат $A(x)=\left\{\sqrt{f(x)}=g(x)\right\}$ на $M_2=\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ g(x)\geq 0.\end{cases}$?

Левая и правая части уравнения существуют, обе неотрицательны.

Но, пока нет конкретных функций $f(x),g(x)$, ничего нельзя сказать относительно того, выполним предикат или нет.

2. Предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ называется ***опровержимым на*** M, если существует, по крайней мере, один набор конкретных $a_1,a_2,a_3,...,a_n\in M$, при подстановке которых вместо $x_1,x_2,...,x_n$ предикат превратится в *ложное* высказывание.

Рассмотрим, например, $A(x)=\left\{\sqrt{f(x)}=g(x)\right\}$ на $M_2:\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ g(x)\geq 0.\end{cases}$ – предикат существует, но про него пока ничего сказать нельзя.

Придётся рассматривать конкретные функции.

1) Пусть $A_1(x)=\left\{\sqrt{x}=x+1\right\}, M=[0;+\infty)$.

Очевидно, что $\exists x=0\left|\overline{A_1(0)}=\left\{\sqrt{0}\neq 1\right\}\right.$ – предикат опровержим.

Решим уравнение:

$$\sqrt{x}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0,\\ x=x^2+2x+1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0,\\ x^2+x+1=0,\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

Значит, $\forall x\in M\left|\overline{A_1(x)}\right.$ – предикат тождественно ложный, и он не просто опровержим, но и не выполним на $M=[0;+\infty)$ – решений уравнения нет.

2) Пусть теперь $A_2(x)=\left\{\sqrt{x}=x-1\right\}, M=[1;+\infty)$.

Предикат опровержим, т. к., например, при $x=2$ он ложен:$\sqrt{2}\neq 2-1$,

но выполним, т. к. при $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ является истинным:

$$\sqrt{x}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\ \\ x=x^2-2x+1,\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\text{ т. е}$$

$\exists!x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\left|A_2(x)\right.$ – уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Заметим, что при этом выполнены следующие свойства.

1) Каждый тождественно истинный на M предикат является выполнимым, но обратное неверно.

Например, $Q(x) = \left\{x^2 - 4 = 0\right\}$ – выполним на R, но не тождественно истинный.

2) Каждый тождественно ложный на M предикат является опровержимым, но обратное неверно.

Например, $Q(x) = \left\{x^2 - 1 = 0\right\}$ – опровержим на R, т. к. $\exists x = 2 \in R\left|\overline{P(2)}\right.$, т. е. $2^2 - 1 \neq 0$, но не тождественно ложный.

3) Каждый не тождественно истинный на M предикат может быть опровержимым, но, вообще говоря, не будет тождественно ложным.

Например, $\sqrt{x} = x - 1$ на $M = [1;+\infty)$.

4) Каждый не тождественно ложный на M предикат будет выполнимым, но, вообще говоря, не будет тождественно истинным.

Например, $\sqrt{x} = x - 1$ на $M = [1;+\infty)$.

Предикат P(x), заданный на множестве M, будет

1) тождественно истинным тогда и только тогда, когда $I_P = M$,
2) тождественно ложны на M тогда и только тогда, когда $I_P = \varnothing$,
3) выполнимым на M тогда и только тогда, когда $I_P \neq \varnothing$,
4) опровержимым на M тогда и только тогда, когда $I_P \neq M$.

Один и тот же предикат на одном множестве может быть тождественно истинным, а на другом тождественно ложным.

Например, $\sqrt{x^2} \equiv x$ на $M_1 = [0;+\infty)$ – тождественно истинный, $\sqrt{x^2} = x$ на $M_2 = (-\infty;0)$ – тождественно ложен.

Множество *M*, на котором рассматривается предикат, *необходимо всегда* указывать.

Итак, выяснили, какими могут быть предикаты.

2. Операции с двумя предикатами

На множестве предикатов вводится 4 бинарных операции, в которых каждой паре предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определённых на одном и том же множестве M, по определённым правилам ставится в соответствие третий предикат $C(x)$.

Операции в теории предикатов носят свои названия.

В математике с помощью таких операций можно записывать системы уравнений, неравенств, смешанные системы, условие аксиом, теорем и т. д,

Любое предложение при рассмотрении операций с несколькими предикатами начинается со слов:

«Пусть предикаты $A(x)$ **и** $B(x)$ ***определены на некотором множестве*** M…»

Обратим внимание на то, что *операции над несколькими предикатами* по-прежнему рассматриваются **на одном и том же множестве *M*!**

1. Конъюнкция (от лат. conjunctio-союз, связь)

Конъюнкцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определённых **на** M, называется предикат $C(x)$, область истинности которого равна $I_A \cap I_B$.

Конъюнкцию обозначают $A(x) \wedge B(x)$.

Можно уточнить:

Конъюнкцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ на M называется предикат $A(x) \wedge B(x)$, который принимает значение 1(«истина») при тех и только тех значениях $x \in M$,

при которых каждый из предикатов $A(x)$ и $B(x)$ принимает значение 1 («истина»), и принимает значение 0 («ложь») во всех остальных случаях (111 100 010 000 – см. таблицу 1 в «Приложении»).

Если предикатами являются уравнения, то они определены на одном и том же множестве M, а конъюнкцией *является система этих уравнений.*

Таблица истинности 1, в частности, утверждает, что *система имеет решение тогда и только тогда, когда каждое уравнение имеет решение на M.*

Пример 1.

$$A(x) = \{x + y = 2\}, x, y \in R^2,$$

$$B(x) = \{x - y = 0\}, x, y \in R^2,$$

$$A(x) \wedge B(x) = \begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

2. Дизъюнкция (от лат. disjunctio-разделение)

Дизъюнкцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определённых на множестве M, называется предикат $C(x)$, область истинности которого равна $I_A \cup I_B$.

Дизъюнкцию обозначают $A(x) \vee B(x)$.

Можно сказать и так:

Дизъюнкцией *двух предикатов* $P(x)$ и $Q(x)$ на M называется новый предикат $C(x) = P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение 0 («ложь») только при тех значениях $x \in M$, при которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ принимают значение 0 («ложь»), и принимает значение 1(«истина») во всех остальных случаях (111 101 011 000 – см. таблицу 2).

Если на множестве M *задано два уравнения*, то дизъюнкцией *является совокупность этих уравнений.* Таблица истинности, в частности, утверждает, что совокупность имеет решение на M, если, по крайней мере, *одно из уравнений совокупности имеет* на M решение.

Примеры 2-3.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{x} = -1, \\ x^2 + 1 < 0, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \varnothing, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{x} = -1, \\ x^2 - 1 = 0. \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

3. Импликация (от лат. implicatio-сплетение, тесная связь)

Это, пожалуй, не столько наиболее сложная операция, сколько иногда необычная.

Импликацией предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определённых **на множестве** M , называется предикат $C(x)$, который является ***ложным*** (принимает значение 0) ***для тех и только для тех*** $x \in M$, при которых одновременно предикат $A(x)$ становится ***истинным*** (принимает значение 1) , а предикат $B(x)$ – ***ложным*** (принимает значение 0), и принимает значение «истина» во всех остальных случаях (111 100 011 001 – см. таблицу 3).

Импликацию обозначают $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Если $I_A \subset I_B$, то областью истинности предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ является множество M.

В импликации $A \Rightarrow B$ предикат A называют ***условием импликации***, а предикат B – ***выводом импликации***.

Теорема 1

Пусть P и Q – два предиката на M, такие, что $P \Rightarrow Q$.

Тогда

а) если P тождественно истинный (выполнимый) на M, то и Q – тождественно истинный (выполнимый) на M,(111)

б) если Q тождественно ложный (опровержимый) на M, то и P – тождественно ложный (опровержимый)на M.(000)

Следствие

Я всё время пользуюсь для краткости записи значком $\Rightarrow$ в «бытовом» смысле: вместо слов «отсюда следует», «следовательно», «поэтому» и других аналогичных по смыслу слов.

Применение значка кажется абсолютно естественным, например, при использовании свойств функций, сформулированных в виде теорем в учебниках.

Я никогда не задумывалась над тем, что такое следствие, никогда не интересовалась определением, пока не «споткнулась» в [1],[2].

Особенно мне не понравилось соотношение $x^2 + \frac{1}{x} = 9x + \frac{1}{x} \Rightarrow x(x-9) = 0$, но я очень удивилась, когда встретила практически этот же пример у других авторов (например [3],[4]).

Мне больше нравится равносильное соотношение

$$x^2 + \frac{1}{x} = 9x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x(x-9) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Наверное, поэтому следствию посвящено довольно много внимания.

Пусть на множестве M заданы ***предикаты*** $A(x)$ и $B(x)$.

Тогда предикат $B(x)$ называется ***следствием*** предиката $A(x)$ **на** M: $A(x) \overset{M}{\Rightarrow} B(x)$, если *множество истинности предиката* $A(x)$ *является* ***частью*** множества истинности предиката: $B(x)$: $I_A \subset I_B$

Можно сказать и по-другому:

«Предикат $B(x)$, *заданный на множестве* M, называется следствием предиката $A(x)$, *заданного на том же множестве*: $A(x) \overset{M}{\Rightarrow} B(x)$, если на тех наборах $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in M$, на которых в истинное высказывание превращается $A(x)$, и $B(x)$ превращается в истинное высказывание, т. е. предикат $B(x)$ является следствием предиката $A(x)$ тогда и только тогда, когда «$I_A \subseteq I_B \in M$».

Обычно читается как

«Если на множестве M предикат $A(x)$..., то $B(x)$ является (или не является) следствием $A(x)$.

В *частности*, если $A(x)$ тождественно *ложен на* M, то *любой* предикат, определённый на M, считается его следствием ($\varnothing \subseteq I_B$). (111 100 011 001) Например, $\sqrt{x-2} = 1 - x \Rightarrow x - 2 = (1-x)^2$.

Отсюда следует, что

«Если предикатами являются, например, уравнения, то определение совпадает с записанным в начале статьи уточнённым определением уравнения – следствия (О3)»

Заметим также, что если уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$ заданы на некотором ***множестве*** $M\neq\varnothing$, **то** уравнение $f_2(x)=g_2(x)$ ***не является*** **уравнением – *следствием*** уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ *на множестве* M тогда и только тогда, когда $f_1(x)=g_1(x)$ *имеет* решение на множестве M, которое не является решением уравнения $f_2(x)=g_2(x)$ на этом множестве.

Например,

1) $\sqrt{x}-1=0 \not\Rightarrow \sqrt{x}+1=0$ на $M: x\geq 0.$ (100)

2) $(x-1)(x-2)(x-3)\not\Rightarrow (x-1)(x-2)(x+3).$

3) $M: x\geq 0, A(x)=\left\{\sqrt{x}=1\right\}, B(x)=\left\{\sqrt{x+x^2}=2\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow I_A\not\subseteq I_B \Rightarrow A(x)\not\Rightarrow B(x)\Rightarrow (100)$ *во* $2-$ *ой строчке.*

Однако уравнение – следствие может иметь решения на M, отличные от решений заданного уравнения

Приведём примеры:

$1.\sqrt{x}=\sqrt{3}\Rightarrow (x-3)(x-2)=0;$

$2.x^2-5x-6=0\Rightarrow \lg\left(x^2-5x-5\right)^2=0\Leftrightarrow \left(x^2-5x-6\right)\left(x^2-5x-4\right)=0;$

$3.\lg 5x=\lg\left(x^2-6\right)\Rightarrow (x-6)(x-7)=0.$

Но... $\lg 5x=\lg(x^2-6)\not\Rightarrow (x-6)(x-1)=0.$

А что мы видим в учебниках?

В [1](стр. 114) читаем:

«Пусть даны два уравнения.

Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называют следствием первого.

Отметим, что если следствие уравнения не имеет действительных корней, то и само уравнение не имеет действительных корней».

Интересно, а как тогда узнать, что уравнение является следствием?

Но мне очень не понравились решения представленных на стр. 114 [2] примеров 1–5 (краткая запись со значком $\Rightarrow$ наша, а в учебнике всё описывается словами).

$1.\dfrac{x^2+x-6}{x+3}=0\Rightarrow x^2+x-6=0;$

$2.\dfrac{1}{x}+x^2=9x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow x^2=9x;$

$3.x^2+\sqrt{x}=4+\sqrt{x}\Rightarrow x^2=4;$

$4.\dfrac{x^2+1}{|x-1|}+\sqrt{x}=\dfrac{2}{|x-1|}+\sqrt{x}\Rightarrow \dfrac{x^2-1}{|x-1|}=0;$

$5.\sqrt{3x-3}=\sqrt{2x+1}\Rightarrow 3x-3=2x+1.$

С точки зрения обычного *здравого смысла* (не думая о «математическом» уравнении -следствии), я бы написала совсем по-другому:

$$1.\frac{x^2+x-6}{x+3}=0 \Rightarrow x+3\neq 0;$$

$$2.\frac{1}{x}+x^2=9x+\frac{1}{x} \Rightarrow x\neq 0 \text{ и т. д.}$$

Тогда я стала искать определения следствия в других учебниках. Но там было всё одинаково, только есть другие дополнения:
а) если уравнение $f_1(x)=g_1(x)$ не имеет решений на множестве M, то любое уравнение, определённое на M, считается его следствием;
б) уравнение – следствие может иметь решения, отличные от решений заданного уравнения. (011 001, но... 100 – см. таблицу 3).

Я проработала в МФТИ более 60 лет. В разные годы пришлось проводить занятия, в зависимости от расписания, на всех 3 курсах. Так как ВУЗ технический, то иногда приходилось связывать свойства рассматриваемых функций со свойствами явлений или процессов, которые они описывали. Оказывалось, что в точках, в которых функция «вела себя плохо», описываемая проблема «проявляет свой характер»-происходит совсем не то, что в «хороших» точках.

Рассмотрим, например, потенциал точечного заряда $\varphi=\frac{1}{r}$.

Функция $\varphi=\frac{1}{r}$ не определена в *одной единственной* точке – начале координат, а создаёт электрическое поле во всём пространстве.

Допустим, что кто-то записал $\varphi=\frac{1}{r}$ в виде $\varphi=\frac{r}{r^2}$ и решил выяснить, где $\varphi=\frac{r}{r^2}$ обращается в 0.

Тогда, следуя стр. 114, получим, что $\frac{r}{r^2}=0 \Rightarrow r=0$.

А на самом деле? $\frac{r}{r^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}=0, r\neq 0 \Rightarrow \varnothing$.

***Обратим** внимание на определение следствия!*

Первое: оба предиката (уравнения, неравенства) из определения следствия рассматриваются ***на одном и том же*** *множестве* ***M***, *на котором оба определены.*

А что мы видим в примерах 1–5?

Заданные уравнения имеют свои ОДЗ, а все «следствия» (кроме 4-го) определены для всех действительных чисел.

Глядя на решения примеров 1–5 с помощью «следствий», интуитивно чувствуется, что чего-то не хватает: в левых частях уравнений присутствуют слагаемые (субъекты), которые имеют свои области определения, но они полностью игнорируются.

Не хватает учёта ОДЗ!!!

Заметим, что и в школьном определении ничего не говорится о том, на каких множествах рассматриваются уравнения.

Второе: $I_A \subseteq I_B \in M$ *означает как раз то, что любое решение заданного уравнения является решением следствия.*

Что мы называли в предыдущих частях статьи «странными» следствиями?

Это были уравнения, *удовлетворяющее второму условию, но не удовлетворяющие первому.*

В 8 части мы изменили название «странное» следствие на ***квазиследствие***, считая, что этот термин, на мой взгляд, больше походит.

Как мы выяснили в предыдущих частях, **квазиследствие** — это, как правило, уравнение, «выдернутое» из равносильной системы, игнорируя ОДЗ. Получается, что заданное уравнение и «следствие» определены на разных множествах, что *противоречит* определению уравнения – следствия.

Обратим ещё раз внимание на то, что предикаты рассматриваются **на одном и том же множестве *M*!**

Отсюда, в частности, сразу следует, что при *произвольных* $f(x), g(x)$ *предикат* $f(x)=g(x)$ является *квазиследствием* предиката $\lg f(x)=\lg g(x)$, т. к. субъекты $\lg f(x), \lg g(x)$ определены на множестве $M_1=\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$, а $f(x), g(x)$ на $M_2=D\big(f(x)\big)\cap D\big(g(x)\big)$.

Поэтому пара $\lg f(x)=\lg g(x)$ и $f(x)=g(x)$ может рассматриваться *только на* $M\subseteq M_1\cap M_2$.

Тогда $\lg f(x)=\lg g(x) \overset{M}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)$ и $\lg f(x)=\lg g(x) \overset{M}{\Rightarrow} f(x)=g(x)$.

Но... $f(x)=g(x)$ не является следствием, а является *квазиследствием*. Соотношения 1–5 не могут быть верными хотя бы потому, что левые и правые уравнения определены на разных множествах.

Посмотрим, что получится, если в примерах стр. 114 *учесть* область определения пары предикатов:

$$1.\ \frac{x^2+x-6}{x+3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x+3\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x-2=0;$$

$$2.\ \frac{1}{x}+x^2=9x+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9x, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x=9;$$

$$4.\ \frac{x^2+1}{|x-1|}+\sqrt{x}=\frac{2}{|x-1|}+\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}=0, \\ x\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;$$

$$5.\ \sqrt{3x-3}=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3=2x+1, \\ x\geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Как видно, никаких посторонних корней – а, значит, и никаких следствий!!!

Видно, что все «следствия» в 1–5 являются *квазиследствиями*.

Поэтому соотношения в [2] на стр. 114 неверны.

Теорема 2

1) Каждый тождественно истинный предикат, определённый на *M*, является следствием *любого* другого предиката, определённого на *M*. (011 и 111)

2) *Каждый* предикат, определённый на множестве *M*, *является следствием любого тождественно ложного* предиката, *определённого на том же множестве M*. (001 и 011)

Если предикатами являются уравнения, то теоремы могут звучать так.

1) Любое ***тождество*** на M является следствием *любого* уравнения, определённого на M.

$$\lg\left(2x^2+4\right)=\lg\left(x^2+5\right)\overset{R}{\Rightarrow}\sin^2 x+\cos^2 x-1\equiv 0,$$
$$\lg\left(x^2+4\right)=\lg\left(x^2+5\right)\overset{R}{\Rightarrow}\sin^2 x+\cos^2 x-1\equiv 0,$$
$$2^{\log_2(x-4)}=8-x\Rightarrow\sqrt{x^2}\equiv|x|.$$

2) Любое ***уравнение***, определённое на M, ***является*** следствием любого уравнения, не имеющего решений на M.

Например,

$$1)\,x\geq -1:\sqrt{x+1}=x+4\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$$
$$(\sqrt{x+1}=x+4\Leftrightarrow x^2+7x+15=0\Leftrightarrow\varnothing);$$
$$2)\,x\geq -1:\sqrt{x+1}=x+4\Rightarrow(x+2)^2=0.$$

Таблица истинности 3 для импликации «необычна».

Предикат $A(x)\overset{M}{\Rightarrow}B(x)$ читается часто как

«Если на множестве M предикат $A(x)$..., то $B(x)$ является (или не является) следствием $A(x)$.Заметим, что первые две строчки таблицы истинности полностью соответствуют нашему бытовому пониманию слова «следует»:

1) если из истины следует истина, то это *правильно* (первая строка таблицы);

2) если из истины следует ложь, то это *неправильно* (вторая строка таблицы).

«Необычность» импликации касается 3-ей и 4-ой строчек.

Они показывают, что импликация не полностью соответствует логике, которой мы придерживаемся в жизни.

Можно, кажется, поверить тому, что «*из лжи следует ложь*», *труднее* поверить *тому, что* «*из лжи следует правда*».

Тем не менее, с такой ситуацией мы уже знакомы.

Вспомним строчку из определения следствия:

«...Если A *ложен на* M, то *любой* предикат B, определённый на том же множестве, *считается* его следствием – (011 001)».

Например, всем знакомые высказывания:

а) $5=5\Rightarrow 25=25$ – из истины следует истина,

б) $5=-5\Rightarrow 25=25$ (т. к. $5+5=0\Rightarrow(5+5)(5-5)=0$) (011) – *из лжи следует правда*.

Примеры с предикатами.

1. $x^2=-1\Rightarrow x^4=-1$ – *из лжи следует ложь*;

2. $x^2=-1\Rightarrow x^4=1$ – *из лжи следует правда*;

3. $\sqrt{1-x}=-\sqrt{x}\Rightarrow 1-x=x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ – *из лжи следует правда*, т. к.

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\varnothing\Rightarrow\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

(На мой взгляд, довольно интересные примеры на высказывания и предикаты можно посмотреть в [3],[5]).

Более сложные примеры.

Пример 1 (из истины следует ложь**).**

$$M: x \geq 0, A(x) = \left\{\sqrt{x} = 1\right\}, B(x) = \left\{\sqrt{x + x^2} = 2\right\} \Rightarrow I_A \not\subseteq I_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) \not\Rightarrow B(x) \Rightarrow (100)\, во\ 2 - ой\ строчке.$$

Пример 2 (из лжи следует истина**).**

$$M: x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}\right)\left(x - \sqrt{2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1(011).$$

Пример 3.

$$M = \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 : \lg x = \lg\left(x^2 - 1\right) \not\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0, т.к.$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \notin M.$$

Уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ я назвала ***квазиседствием*** в отличие от «следствия, как написано в учебниках».

На самом деле,

$$M = \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow \lg x = \lg\left(x^2 - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0, \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x > 1. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\lg x = \lg\left(x^2 - 1\right) \overset{x>1}{\Rightarrow} x^2 - x - 1 = 0.$$



Какие из соотношений 1–3 являются верными (2)?

$$1.\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-1\right)=0 \not\Rightarrow \left(x^2-1\right)(x-2)=0(100);$$

$$2.\ x^2-1=0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)(x-2)=0(111);$$

$$3.\ x^2-1=0 \not\Leftarrow (x+1)\left(\sqrt{x}-2\right)=0(100).$$

3. Равносильность (эквивалентность)

Равносильность, или логическая эквивалентность, или «тогда и только тогда», или двойная импликация.

«Эквиваленцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ на $x \in M$ называется третий предикат $C(x)$, который превращается в истинное высказывание при всех $x \in M$, при которых одновременно $A(x)$ и $B(x)$ принимают одинаковые значения истинности, 111 001 100 010 (т. е. одновременно истинны или ложны) и является ложным, если один из предикатов ложный, а другой истинный»

Эквивалентность (равносильность) обозначается $C(x) = A(x) \Leftrightarrow B(x)$. (111 001 100 010 – см. таблицу 4).

«Предикаты $A(x)$ и $B(x)$ ***с одной и той же областью*** *определения* M называются ***равносильными*** **на** M: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, если их области истинности совпадают, т. е. $I_A = I_B$ (или оба ложны $I_A = I_B = \varnothing$)» (111 100 010 001 – см. таблицу 4).

Можно сказать несколько иначе.

«Два предиката $P_1(x)$ и $P_2(x)$, заданных *на одном и том же множестве* M, называются ***равносильными***, если набор $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in M$ превращает первый предикат $P_1(x)$ в истинное высказывание тогда и только тогда, когда этот набор превращает в истинное высказывание и второй предикат $P_2(x)$». А если оба ложны?

Видно, что если предикатами являются, например, уравнения, то уточнённое определение равносильности уравнений совпадает с определением равносильности предикатов.

Теорема

Предикаты $A(x)$ и $B(x)$ с *одной и той же* областью определения ***M*** **равносильны** ***тогда и только тогда***, когда $B(x)$ есть следствие $A(x)$, а $A(x)$ является следствием $B(x)$.

Поэтому, если предикатами являются, например, уравнения, то можно записать:

«Уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ с одной и той же областью определения M *равносильны тогда и только тогда*, когда $f_2(x) = g_2(x)$ есть следствие $f_1(x) = g_1(x)$ на M, а $f_1(x) = g_1(x)$ является следствием $f_2(x) = g_2(x)$ на M, т. е. если каждое из этих уравнений является следствием другого на M.

Уравнения, не имеющие корней на M, считаются равносильными».

Отсюда, в частности, следует, что если

$$f_1(x) = g_1(x) \overset{M}{\Leftrightarrow} f_2(x) = g_2(x), \text{ то}$$

$$f_1(x) = g_1(x) \overset{M}{\Rightarrow} f_2(x) = g_2(x).$$

Заметим, что

а) каждые два тождественно истинных (тождественно ложных) предиката, определённых на M, равносильны, и

б) обратно: предикат, равносильный тождественно истинному (тождественно ложному), сам является тождественно истинным (тождественно ложным) ($x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = |x|$).

Пусть, например ([5]),

$$M: x \geq 0, y \geq 0, \quad P(x,y) = \left\{\sqrt{x}\sqrt{y} = 10\right\}, Q(x,y) = \left\{\sqrt{xy} = 10\right\}, \text{ то}$$

$$P(x,y) \overset{M}{\Leftrightarrow} Q(x,y).$$

Если же $M^*: xy \geq 0 \quad P(x,y) = \left\{\sqrt{x}\sqrt{y} = 10\right\}, Q(x,y) = \left\{\sqrt{xy} = 10\right\}$, то

$$P(x,y) \overset{M^*}{\not\Leftrightarrow} Q(x,y), \text{ т. к. } \exists (x_0 < 0, y_0 < 0) \in M^* \left| \overline{P}(x) \right.$$

Может случиться, что два предиката равносильны, если их рассматривать на одном множестве, но не равносильны, если их рассматривать на другом (в частности, на объемлющем).

Если предикатом является, например, ***уравнение или неравенство****, то определение* ***совпадает с записанным в начале уточнённым определением равносильности уравнений (неравенств) (02).*** Как выяснилось, не все авторы учебников справляются с равносильными преобразованиями. И опять все ошибки связаны с ОДЗ ([6], стр. 52).

«**Пример 4**

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{4x^2 - 15x + 11}}{x^3 - x - 6} \geq 0$

Решение

Данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 4x^2 - 15x + 11 \geq 0, \\ x^3 - x - 6 > 0. \end{cases}$

Решив уравнение $4x^2-15x+11=0$, находим его корни: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{11}{4}$. Значит, решение первого неравенства системы – объединение лучей $(-\infty;1] \cup [\dfrac{11}{4}; +\infty)$ (рис. 1).

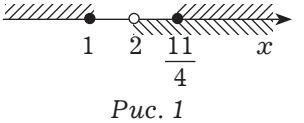


Рис. 1

Рассмотрим многочлен $p(x) = x^3 - x - 6$. Замечаем, что $x = 2$ – корень этого многочлена, значит, $p(x)$ делится без остатка на $x - 2$. Вместо деления углом можно выполнить следующие преобразования: $p(x) = x^3 - x - 6 = (x^3 - 8) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$.

Квадратный трёхчлен $x^2 + 2x + 3$ имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент; значит, он положителен при любых значениях x, а потому неравенство $p(x) > 0$ равносильно неравенству $x-2 > 0$.

Таким образом, решение второго неравенства системы – открытый луч $(2;+\infty)$.

Осталось найти пересечение решений первого и второго неравенств системы; получаем луч $[\frac{11}{4};+\infty)$ (см. рис. 1). Но (внимание!) точку $x = 1$ (тёмная точка на рис. 1) тоже следует включить в ответ, хотя она и не принадлежит указанному пересечению. Дело в том, что при $x = 1$ числитель заданной дроби обращается в нуль, а знаменатель отличен от нуля (и не важно, что он при $x=1$ принимает отрицательное значение); следовательно, $x = 1$ – частное решение заданного нестрогого неравенства.

Ответ: $x = 1; x \geq 2\frac{3}{4}$.»

Вот такая «презентация» решения неравенства с помощью равносильной системы.

1. Неравенство $\dfrac{\sqrt{4x^2-15x+11}}{x^3-x-6} \geq 0$ и система $\begin{cases} 4x^2-15x+11 \geq 0, \\ x^3-x-6 > 0. \end{cases}$ определены на одном и том же множестве.

2. Но...заданное неравенство имеет решение $x = 1$, а система нет — это соответствует второй строчке в таблице истинности.

Значит, *система не равносильна* заданному уравнению, поэтому пример решён просто неправильно: решение уравнения не зависит от знака знаменателя.

Наше решение

$$\frac{\sqrt{4x^2-15x+11}}{x^3-x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-15x+11 = 0, \\ \begin{cases} 4x^2-15x+11 \geq 0, \\ x^3-x-6 > 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\blacktriangleright \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{15 \pm 7}{8}, \\ \begin{cases} (x-1)\left(x-\dfrac{11}{4}\right) > 0, \\ (x-2)\left(x^2+2x+3\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{1\} \cup \left[\frac{11}{4};+\infty\right).$$

Ответ. $\{1\} \cup \left[\dfrac{11}{4};+\infty\right)$. ◄

Аналогичный неправильный подход к решению таких неравенств и в [7], стр 193.

Запишем решения такого типа неравенств в *общем* виде.

$$1)\ \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ \dfrac{1}{g(x)} \vee 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$2)\ g(x)\sqrt{f(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}f(x)=0,\\ x\in D\big(g(x)\big),\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}f(x)>0,\\ g(x)\vee 0.\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (2)$$

Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{(x-2)(x-7)(3-2x)}}{x^2-4}\le 0.$$

► Воспользуемся (1):

$$\frac{\sqrt{(x-2)(x-7)(3-2x)}}{x^2-4}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(x-2)(x-7)(3-2x)=0,\\ x^2-4\ne 0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)(x-7)<0,\\ x^2-4<0.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-2;1{,}5]\cup\{7\}.$$

Ответ. $(-2;1{,}5]\cup\{7\}$. ◄

Пример 2. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x}+1\right)(x-5)\sqrt{(x-2)[x+1]}\ge 0$$

►Воспользуемся (2):

$$\left(\sqrt{x}+1\right)(x-5)\sqrt{(x-2)[x+1]}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\ge 0,\\ x-2=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x-2>0,\\ x-5\ge 0.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{2\}\cup[5;+\infty).$$

Ответ. $\{2\}\cup[5;+\infty)$.◄

Любопытно, что с равносильными преобразованиями дружат не все авторы учебников.

В некоторых учебниках даже хорошо известные соотношения сформулированы иначе- записаны *лишние* условия в системах.

Например, неравенства с модулем ([6], стр. 44) записаны так:

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}g(x)>0,\\ -g(x)<f(x)<g(x).\end{array}\right.$, несмотря на то, что условие $g(x)>0$ выполнено автоматически при выполнении неравенства: $-g(x)<f(x)<g(x)\Rightarrow -g(x)<g(x)\Leftrightarrow g(x)>0$.

Довольно странно, что это не учтено!

Хорошо известно, что

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Кванторы и предикаты

В части 9(1) введено понятие кванторов.

Использование кванторов превращает предикат в высказывание. Это даёт возможность сформулировать условия теорем без слов.

Вспомним, что всё начиналось с непонятного тождества.

Оказалось, что если указать множество M, на котором рассматривается равенство, то проблема уходит: равенство, верно на всём множестве M, – тождество, если верно не на всём, то уравнение.

На самом деле, в учебниках не акцентируется внимание на том, что некоторые равенства действительно являются тождествами на множестве.

Например,

Теорема ([2], стр. 51)

«Пусть a,b – *любые неотрицательные* числа.

Тогда $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$».

Условие теоремы можно записать в кванторах:

$$(\forall a \geq 0, b \geq 0) : \sqrt{ab} \equiv \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Что в ней утверждается на самом деле?

а) Определено множество M, на котором будет рассматриваться предикат (равенство).

б) Утверждается, что на *всём* этом множестве выполнено равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Что отсюда следует?

По определению, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ – тождество на M.

Однако так, по-моему, никто не говорит.

А вот равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ без указания области определения в литературе некоторые авторы называют «формулой».

Что они при этом имеют в виду?

Если $ab = 0 = \begin{bmatrix} a = 0, \\ b = 0. \end{bmatrix}$, то равенство может быть, например, неверным при $a = 0, b < 0$.

Если $ab > 0$, *то* $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$.

Многие теоремы можно сформулировать так:

«Для любого элемента x, принадлежащего заданному множеству M, из утверждения $A(x)$ следует утверждение $B(x)$», т. е. теорема представляет собой истинное высказывание вида $(\forall x \in M)A(x) \Rightarrow B(x)$.

В теореме $(\forall x \in M)A(x) \Rightarrow B(x)$ предикат $A(x)$ называют ***достаточным условием*** для $B(x)$, а предикат $B(x)$ – ***необходимым условием*** для $A(x)$.

Примеры. Самые известные соотношения, содержащие следствия:

1. $\left(\forall x \in D\left(f(x)\right) \cap D\left(g(x)\right)\right) : f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x)$;

2. $\left(\forall f(x) \geq 0, \forall x \in D\left(g(x)\right)\right) : \sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = g^2(x)$.

Кванторы можно использовать и при формулировке взаимно обратных теорем.

Тогда каждый из предикатов $A(x)$ и $B(x)$ является необходимым и достаточным условием для другого.

В этом случае высказывание $(\forall x \in M) A(x) \Leftrightarrow B(x)$ является истинным.

Эту теорему читают так:

«Для всех элементов x, принадлежащих заданному множеству M, условие $A(x)$ является необходимым и достаточным для условия $B(x)$», или

«для всех элементов множества M условие $A(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие $B(x)$».

Например.

1. $\left(\forall f(x) \geq 0, \forall g(x) \geq 0\right) : \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^2(x)$;

2. $\left(\forall f(x) > 0, g(x) > 0, \forall a > 0, a \neq 1\right) :$
$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Остаётся непонятным, откуда взялось «странное» следствие (которое мы назвали квазиследствием):
не ясно, кто так назвал, например, уравнение $f(x) = g(x)$ при решении уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, которое всегда решали, но никак не называли.

***Можно** ли всё-таки **сейчас решать** уравнения без всяких следствий?*

Пример 1. Решите уравнение $6\sqrt{x+1} = 3x + 1$.

Первый способ

Желательно записать новое ОДЗ!

► Запишем ОДЗ: $\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Теперь можно обе части возводить в квадрат:

$$6\sqrt{x+1} = 3x + 1 \Rightarrow 36(x+1) = 9x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 2\sqrt{15}}{3}$$

(стрелка использована в «бытовом» смысле).

Очевидно, что один из корней явно не удовлетворяет ОДЗ.

Проверим второй корень:

$$6\sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{15}}{3} + 1} - 6 - 2\sqrt{15} \equiv \sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 2^2 \left(\sqrt{3}\right)^2} - 6 - 2\sqrt{15} \equiv 0.$$

Ответ: $\frac{5 + 2\sqrt{15}}{3}$.

Второй способ

Теперь решим пример, используя равносильный переход:

$$6\sqrt{x+1}=3x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\geq 0, \\ 36(x+1)=9x^2+6x+1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{3}, \\ x=\frac{5\pm 2\sqrt{15}}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5+2\sqrt{15}}{3}.$$

Ответ: $\frac{5+2\sqrt{15}}{3}$.◀

Сравните способы и выберите подходящий для себя.

Приложение

Конъюнкция

A	B	A^B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таблица 1

Дизъюнкция

A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблица 2

Импликация

A	B	A⇒B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таблица 3

Эквивалентность

A	B	A⇔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Таблица 4

Литература

1. С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. Алгебра, 11 класс. Москва, «Просвещение», 2006.
2. С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. Алгебра, 8 класс. Москва, «Просвещение», 2021.
3. А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. Углублённый уровень. Алгебра, 8 класс. «Вентана -Граф», Москва, 2021.
4. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. «Наука», Москва,1974 (2-е изд.)
5. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 10 класс. «Вентана -Граф», Москва. 2019 .
6. А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев, П. В. Семёнов. Алгебра 9. часть 1, Углублённый уровень. Москва, «Мнемозина», 2019
7. М. И. Шабунин, А. А. Прокофьев. Математика, 10, профильный уровень. Бином, 2011. С. И. Колесникова. «Потенциал» №9, 2018г