

Колесникова Софья Ильинична
Заслуженный преподаватель МФТИ (кафедра высшей математики),
Ведущий специалист ЗФТШ при МФТИ.
Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» (гриф ФИПИ),
«Решение сложных задач ЕГЭ», серии пособий
«МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ».
Лауреат премии Правительства Российской Федерации
в области образования 2020 г.

Учебник, учитель, ГДЗ, репетитор и … ученик

(Читаем учебники: ч.9(1). Предикаты: определение, свойства. Кванторы. Тождество)

Предисловие

Эта часть — заключительная для большой статьи **«Учебник, учитель, ГДЗ, репетитор и … ученик»**.

Основной целью статьи было понять, почему и дети, и учителя, мягко говоря, не очень охотно пользуются современными учебниками.

Выяснилось, что среди авторов этих учебников (независимо от предмета) большой процент докторов и кандидатов соответствующих наук (есть и академики), никогда не работавших в школе. А психика школьников и студентов, в силу возраста, очень одна от другой отличается — поэтому, на мой взгляд, «преподносить» предмет необходимо, вообще говоря, несколько по-разному.

С учебниками 7–9 классов я впервые «встретилась» в 2022г, когда вышла на пенсию. В математике, например, к этому времени появилось много теории; множество определений, но…далеко не все они совпадают в разных учебниках, и далеко не все используются при решении задач.

Я сразу начала «спотыкаться»: то решение меня не устраивало, то определение не очень понятно, и т. д. Стала записывать номера соответствующих страниц из просматриваемых источников (к сожалению, не всегда правильно).

Так как общаться мне теперь было не с кем, то количество вопросов накапливалось, и «рождались» соответствующие файлы в компьютере.

Сначала мне не понравилось, что $\frac{x^2+3x-4}{x-1}=x+4$ — тождество, затем, что $\frac{1}{x}+x^2=9x+\frac{1}{x}\Rightarrow x^2=9x$.

Не понравилось, что результат возведения в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x^2-2x+10}=2x+1$ авторы называют следствием, не обращая внимание на знак правой части:

$$\sqrt{x^2-2x+10}=2x+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-2x+10=(2x+1)^2.$$

Не понравилось, что

$$\lg\left(x^2+3x-4\right)=\lg(-x)\Rightarrow x^2+3x-4=-x$$

Терпение лопнуло окончательно, когда «оказалось», что

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}=0\Rightarrow(x-1)(x-2)=0.$$

Тогда я «добралась» до предикатов (которые до этих пор просто игнорировала) — мои сомнения по некоторым вопросам подтвердились.

В 2024 г, вооружившись «новыми знаниями», начала писать прямо «с колёс» эту статью.

Хотела просто о чём — то рассказать или «пожаловаться», а внезапно сами собой появлялись *уточнения* некоторых понятий или определений.

И даже в этой, заключительной, части «умудрилась споткнуться» на формулировке основного свойства дробей.

Так как элементы теории предикатов помогли мне разобраться в некоторых вопросах, то я решила познакомить и читателей с основными положениями этой теории.

Выяснилось, что ***любой*** предикат (уравнение, неравенство и т. д.) всегда рассматривается на так называемой ***области определения М.***

Это повлияло на то, что были ***уточнены*** определения ОДЗ, равносильности уравнений (неравенств), понятие следствия уравнения, которые интересовали меня больше всего.

Теория предикатов подтвердила, что при рассмотрении тождества на множестве само ***множество надо указывать***, чего нет ни в одном учебнике. Правда, иногда «вдогонку» говорится, что имеются в виду «ограничения». Но чёткой записи нет.

Поэтому, учитывая теорию предикатов, всё-таки в этой части статьи предлагаю

при записи тождества на множестве М указывать и само множество М,

если даже это и очевидно.

Это особенно важно, когда выражение громоздкое и «не похоже» на тождество (примеры в статье).

Отметим отдельно «любопытные» тождества

$$\frac{x}{x}=1,\ x\neq 0,\quad \frac{x-a}{x-a}=1,\ x-a\neq 0 \text{ и т. д.}$$

$$\frac{P_n(x)}{P_n(x)}=1, P_n(x)\neq 0,\quad \text{где}\quad P_n(x)\quad —$$

многочлен степени n (или

$$\frac{f(x)}{f(x)}=1,\ x\in D\left(f(x)\right)\cap f(x)\neq 0\ ),$$ которые мы используем при приведении подобных слагаемых, имеющих вид дробей.

Это тождество я назвала «алгебраической единицей». В статье приведены примеры теории, когда это тождество «играет» именно эту роль.

Предикаты

Практически во всех современных учебниках для углублённого изучения математики есть параграфы, посвящённые логике, или науке о высказываниях.

Они написаны *на разных* уровнях.

В учебниках по алгебре и информатике появился и новый термин — «предикат», с которым, как я выяснила, знакомы очень немногие.

Замечу сразу, что кванторами я пользуюсь постоянно с 1962 г, а с термином «предикат», к сожалению, впервые столкнулась только в [1] (стр. 250-265).

«Пробежала» текст глазами, поняла, что прочитанное нигде дальше не используется, и забыла о нём. Позже в [2] (стр. 114) я случайно наткнулась на § 8 «Следствия», удивилась и содержанию (мне показалось, что рано об этом говорить в 8 классе), и способам решения примеров. Решила ещё поискать определение этого понятия и примеры в других учебниках. Тогда я и встретилась с теорией высказываний в [3] (стр. 29-36) и «предикатами» — в [4], (стр. 32-38).

И... «отправилась» в Интернет.

Высказывание — это утверждение, про которое можно сказать, истинно оно или ложно.

С высказываниями все знакомы с 1-го класса:

2 + 3 = 5 — верно, 2 + 3 = 6 — ложь.

Все *числовые* равенства и неравенства — это высказывания, т. к. всегда можно сказать, верны они или нет.

Из двух высказываний можно построить третье высказывание:
например, $4 \geq 3,\ 4 \leq 5 \Rightarrow 3 \leq 5$.

В учебниках информатики и некоторых учебниках алгебры есть и таблицы истинности высказываний ([3], стр. 29–36).

Но, как выяснилось, *не всякое утверждение* является высказыванием.

Вот 7 равенств:
1) 2 = 2, 2) 2 = 3, 3) $a = b$, 4) $x = 2$,
5) $x = y$, 6) 5 = 2 + 3, 7) $y = x + 2$.

Какие из них являются высказываниями?

Исходя из определения, это 1, 2, 6, где 1 и 6 — верные равенства, а 2 — неверное.

Про 3, 4 ,5, 7 ничего определённого сказать нельзя: то ли они верны, то ли — нет.

Например, рассмотрим равенства

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ или $x^2 - 1 = 0$.

Ясно, что мы не можем сразу сказать, истинны равенства $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $x^2 - 1 = 0$ или нет. Но также ясно, что всё — таки для некоторых значений a, b, x мы можем сказать точно, истинны равенства или ложны.

Например, хорошо известно, что равенство $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ верно для *любых* чисел, а равенство $x^2 - 1 = 0$ верно только для двух: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$.

Говорят, что утверждения зависят от параметров a, b, x и называются *предикатами*.

Любое уравнение или неравенство, содержащее, по крайней мере, одну букву, является предикатом.

Понятие предиката обобщает понятие высказывания, а теория предикатов представляет собой более тонкой инструмент для изучения закономерностей процессов умозаключения и логического следования, составляющих предмет математической логики.

Возникла логика предикатов, которая очень связана с математической логикой, т. к. при конкретных значениях параметров предикат превращается в высказывание.

Сейчас передо мной во весь рост встала проблема обучения по Интернету.

С помощью предикатов попробуем разобраться, нужно ли нам ОДЗ, что же такое тождество, равносильность и следствие.

I. Предикат. Определение. Основные понятия.

1) Определение

Дадим несколько определений.

Субъект, *объект* (подлежащее, хотя оно может играть также роль дополнения) — это то, о чем что — то утверждается.

Предикат *(от лат. Praedicatum) — «заявление», «упомянутое», «сказанное».*

Предикат *(сказуемое, хотя оно может играть также роль определения) — это то, что утверждается о субъекте.*

Основными субъектами алгебры являются числа, функции и т. д.

Предикат — это утверждение, ***определённое на*** *некотором* ***множестве М***, содержащем одно или несколько переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо переменных любых конкретных значений a_1, a_2, a_3, ..., a_n из *M*.

Однако, предикатом называется не любое утверждение.

Предикат — это *повествовательное* предложение (не вопросительное, не восклицательное, не повелительное и т. д.), которое после замены переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ на *возможные числовые* значения a_1, a_2, a_3, ..., a_n из *M* превращается в *высказывание.*

С предикатами современные школьники знакомы с первого класса. Они умеют, например, решать уравнения типа $2x - 1 = 3$.

В теории предикатов про заданное утверждение надо только узнать, при каких значениях параметров соответствующие высказывания верны, т. е. истинны, а при каких неверны, т. е. ложны.

Поэтому полагают, что

Предикат — это функция $P(x_1, x_2, ...x_n)$, определённая *на некотором множестве M и* ***принимающая значения 1 или 0:***

если предикат $P(x_1, x_2, ...x_n)$ при некотором наборе a_1, a_2, a_3, ..., $a_n \in M$ является

а) *истинным* высказыванием, то

$$P(a_1, a_2, ...a_n) = 1,$$

б) если *ложным*, то

$$P(a_1, a_2, ...a_n) = 0.$$

Такой предикат называется *n*-местным.

«Одноместным предикатом $F(x)$ называется *произвольная* функция переменного предмета x, определенная на множестве M и принимающая значения 1 или 0» (Интернет).

Предикаты от одной переменной, как правило, обозначаются $A(x)$, $P(x)$, $B(x)$ и т. д.

Высказывание — это частный случай предиката. Его часто называют 0 — местным предикатом.

Итак, предикат — логическая функция от некоторого числа *предметных элементов (объектов)*, которая определяет *свойства объекта или отношение между объектами.*

2) Область определения предиката

Выяснилось, что все понятия, которые вводятся в логике предикатов, *всегда* относятся к некоторому **множеству *M***, которое называется *предметной областью*, или просто *областью*.

Я выписала из разных источников три определения «области», или «области определения предиката»:

1. Рассмотрим множество M и некоторый предикат P (x), где $x \in M$.

Тогда говорят, что M — *область определения* предиката $P(x)$ ([4]).

Рассмотрим, например, два предиката — уравнения:

$$x^2 = a,\ \ a \in R_+ \cup \{0\},\ \ x \in R.$$

$$x^2 = a,\ \ a \in R,\ \ x \in R.$$

Уравнение — одно, области определения разные. Значит, и решения будут разные.

2. *Областью определения* предиката P (x) называется совокупность всех *допустимых* значений переменной x. Обозначим это множество M (Интернет).

3. *Областью определения* предиката называется множество тех значений переменных, при которых предикат превращается в высказывания.

3) Множество истинности предиката

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1 («истина»), называется ***множеством истинности предиката*** $P(x)$: $I_P = \{x \in M, P(x) = 1\}$, *или* подмножество множества M, содержащее те и только те элементы, для которых $P(x)$ превращается в *истинное* высказывание, называется *областью истинности* предиката и обозначается I_P.

Например, областью определения предиката — уравнения может быть ОДЗ. Область истинности этого предиката — множество его корней.

В некоторых источниках *область истинности* предиката $P(x)$ обозначается просто буквой P.

Например, пусть

$$A(x) = \{x^2 - x - 2 = 0\}.$$

Решим уравнение

$$x^2 - x - 2 \equiv (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = -1. \end{array}\right.$$

Следовательно, $I_{A(x)} = \{-1; 2\}$.

1. Рассмотрим равенства на заданных множествах. Есть среди них тождества?

$$M_1: \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_2 \in R. \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 + x_3 \equiv 0$$

$$M_1: \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_1 \in R. \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 + x_3 \equiv 0$$

$$M: x_1, x_2, x_3 \in R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 + x_3 = 0.$$

4) *Отрицание предиката*

Отрицанием предиката $A(x)$, определённого на M, называется предикат, областью истинности которого является множество $M \setminus I_A$.

Отрицание предиката обозначают $\overline{A(x)}$

Отрицание предиката $P(x)$ — это предикат $\overline{P(x)}$, который истинен тогда и только тогда, когда исходный предикат ложен, и ложен тогда и только тогда, когда исходный предикат истинен.

II. Кванторы

Специфика природы предикатов позволила ввести такие операции над предикатами, которые *не имеют аналогов среди операций над высказываниями* — это квантор (квантор — qvantum — «сколько») общности $\forall$ и квантор существования $\exists$. Я бы сказала, что введён «язык», с помощью которого можно, например, сформулировать, верно утверждение для всех элементов M или оно верно, по крайней мере, только для одного.

Итак, кванторами называются символы:

$\forall$ — «для любого», «для каждого», «для всех» (англ. all),

$\exists$ — «существует», «найдётся» (англ. exist).

Часто используются также символы «!», «:», «|», где

! — «единственный»,

: — «такой, что»,

| — «такой, что».

Кванторные операции

1) Квантор всеобщности $\forall$

Пусть $R(x)$ — вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента x некоторой области M.

Тогда под выражением $\forall x R(x)$ будет подразумеваться высказывание, *истинное,* когда $R(x)$ истинно *для каждого* (для всех) элемента x области M, и *ложное* в противном случае.

Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности.*

Пример 1. Рассмотрим предикат (уравнение) $P(x) = \left\{\sqrt{x} = -1\right\}$.

Что можно считать областью определения этого предиката?

Здесь «субъектами» являются: $\sqrt{x}$ — арифметический корень из действительного числа, определённый при $x \geq 0$ и принимающий только неотрицательные значения, и число -1.

Можно, например, считать, что $M = [0;+\infty)$. Тогда на всём этом множестве $P(x) = \left\{\sqrt{x} = -1\right\}$ — ложный предикат, т. е. $I_{P(x)} = \varnothing$. Можно записать и с помощью кванторов: $\forall x \overline{P(x)}$.

С другой стороны, «субъект» $\sqrt{x}$ принимает, по определению, только неотрицательные значения, а потому равенство $\sqrt{x} = -1$ не имеет смыла при любом $x \in R$, т. е. можно считать, что для этого предиката $M = \varnothing$.

Можно рассмотреть другой предикат (неравенство)

$$Q(x) = \left\{\sqrt{x} \neq -1\right\} \Rightarrow I_Q = R.$$

2) Квантор существования ∃

Пусть $R(x)$ — вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента x некоторой области M.

Тогда под выражением $\exists x R(x)$ будем понимать высказывание,

истинное, если *существует хотя бы один элемент* x из области M, для которого $R(x)$ *истинно*, и

ложное в противном случае.

Знак ∃ называется *квантором существования.*

Запись вида: $\forall x R(x)$ или $\exists x R(x)$ говорит о том, что переменная x *связана* соответствующим *квантором.*

Предметную переменную, не связанную никаким квантором, называют *свободной переменной.*

Заметим, что при рассмотрении предикатов нас интересует только вопрос о том, при каких значениях параметров утверждение предиката истинно, при каких ложно. При этом не имеет значения, откуда это следует или как было получено.

Пусть, например, задано уравнение $x^2 - x - 2 = 0$.

Что это? Набор символов.

При некоторых значениях x — это верное равенство, при других — неверное. Это предикат. Обозначим его

$$A(x) = \left\{x^2 - x - 2 = 0\right\}.$$

Выражение слева — многочлен, а поэтому переменная $x \in R$.

Можно считать, что $M = R$. Пусть

$$A(x) = \left\{x^2 - x - 2 = 0\right\}.$$

Решим уравнение

$$x^2 - x - 2 \equiv (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = -1. \end{array}\right.$$

Подумав, выпускник 8-го класса может написать:

$$\exists x_1 = -1, x_2 = 2 \,|\, x^2 - x - 2 = 0,$$

$$\text{или } \exists x_1 = -1, x_2 = 2 \,|\, A(x).$$

Это означает, что существует два числа -1 и 2, при подстановке которых предикат превращается в истинное высказывание.

При этом совершенно *неважно*, как этот результат получен: кто-то решил квадратное уравнение, кто-то решил уравнение разложением на множители, кто-то нарисовал график, и т. д.

Возможна и такая запись:

$$\exists (x_1 = -1, x_2 = 2) A(x).$$

Можно записать и так:

$$\forall x \neq -1, x \neq 2 \,|\, \overline{A(x)}, \text{ т. е.}$$

$$\overline{A(x)} = \left\{x^2 - x - 2 \neq 0\right\}$$

для любых $x \neq -1$, $x \neq 2$ неравенство верно.

Какие объекты (субъекты) изучают, например, в алгебре?

По мере обучения в школе с 1 до 9 класса дети последовательно знакомятся с такими *субъектами* математики как натуральные числа, рациональные числа, отрицательные числа, алгебраические выражения, функции и т. д.

Последовательно знакомятся, например, и с такими субъектами:

1) $a^n, a \in R, n \in N$;

2) $a^n, a \in R \setminus \{0\}, n \in Z$;

3) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, n \in N, m \in Z$;

4) $\log_a x, x > 0, \ a > 0, \ a \neq 1,$ и т. д.

III. Свойства предикатов

1. Предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ называется ***тождественно истинным на M,*** если *при любой* подстановке вместо переменных x_1, x_2, ..., x_n конкретных a_1, a_2, a_3, ..., $a_n \in M$ он превращается в истинное высказывание, т. е. $\forall x \in M \left| P(x) \right.$. В этом случае область истинности $I_P = M$.

Например,

$$M = [0;+\infty), \quad B(x) = \left\{ \sqrt{x^2} = x \right\},$$

$I_{B(x)} = M$ — предикат *тождественно истинный на M*.

$M = Q \Rightarrow \dfrac{c^3 - 5c + 2}{c^2 + 2c - 1} \equiv c - 2$ — предикат *тождественно истинный на* множестве рациональных чисел

$$M : x \in (2;3) \Rightarrow x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow \varnothing,$$
$$M : \{-1;1\} \Rightarrow x^2 - 1 \equiv 0.$$

2. Предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ называется ***тождественно ложным на M,***

если *при любой* подстановке вместо переменных x_1, x_2, ..., x_n конкретных a_1, a_2, a_3, ..., $a_n \in M$ он превращается в ложное высказывание, т. е. $\forall x \in M \left| \overline{P(x)} \right.$.

В этом случае область истинности — пустое множество: $I_P = \varnothing$.

Например, пусть $M_1 = \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$, предикат $A(x) = \left\{ \sqrt{f(x)} = g(x) \right\}$ — *тождественно ложный на* M_1, т. к. $\forall x \in M_1 \left| \overline{A(x)} = \left\{ \sqrt{f(x)} \neq g(x) \right\} \right.$.

Что для нас важно?

1. Уравнение или неравенство, содержащее *переменные*, это предикат.

2. Предикат всегда рассматривается на некотором ***множестве,*** в своей области определения *M*.

3. Если рассматривается *несколько* предикатов, то всегда ***на одном и том же множестве M.***

4. У предиката есть область истинности (которая может быть и пустым множеством).

Вот пример решения иррационального уравнения из учебника [3] (стр. 111).

«**Пример 2.** Решите уравнение

$$\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2. \qquad (3)$$

Решение. Естественно заменить это уравнение таким:

$$3x + 4 = x - 2. \qquad (4)$$

Отсюда $x = -3$.

Но проверка показывает, что число -3 не является корнем исходного уравнения. Значит, уравнение (3) не имеет корней. Причина появления постороннего корня заключается в том, что применение формулы $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ приводит к расширению области определения уравнения. Поэтому уравнение (4) является следствием уравнения (3)».

А это пример из [3*] (стр. 90).

«**Пример 3.** Решите уравнение

$$\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2. \qquad (3)$$

Решение. Применив формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, заменим данное уравнение таким:

$$3x + 4 = x - 2. \qquad (4)$$

Отсюда $x = -3$.

Однако проверка показывает, что число -3 не является корнем исходного уравнения. Значит уравнение (3) не имеет корней.

Ответ: нет корней.»

1) Что значит «естественно»? Абсолютно не понятно!

Если говорить о «школьных» методах, то надо прежде всего *вспомнить о свойствах* функций, входящих в уравнение. В данном случае, о свойствах арифметического корня — например, об ОДЗ подкоренных выражений: $x-2\ge 0$.

Откуда взялось тогда, что $x=-3$ — решение уравнения $3x+4=x-2$?

Если иметь в виду, что $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$ — предикат, то уравнение можно рассматривать только на ОДЗ. Не всегда ОДЗ заметно. Например, в уравнении $3x + 4 = x - 2$ и левая, и правая части — это *квадраты* выражений:

$$\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2.$$

Следовательно, они неотрицательны (равенство только тогда имеет смысл!), а не просто многочлены. Этого авторы не замечают. А жаль!

2) Логика объяснения отсутствия решений у уравнения $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$ в примере 2 не выдерживает никакой критики.

а) -3 решением не является? Нет.

Ну, и что из этого следует? Кто проверил, что уравнение $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$ не имеет других решений? Какое отношение уравнение $3x + 4 = x - 2$ имеет к уравнению

$$\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2?$$

б) Про равенство $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ ничего сказать нельзя, т. к. для $a\ge 0$ это тождество, а при $a<0$ это неверное равенство.

Поэтому ясно, что «формулы» $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ *не существует*. Однако в учебниках «она» встречается неоднократно.

Применение *неправильной* (не существующей) «формулы» привело к неверному решению, а авторы утверждают, что привело к «*следствию*». Интересная логика!

Какому из определений следствия удовлетворяет уравнение $3x + 4 = x - 2$?

Следствие здесь совсем не при чём! Писать такие решения в учебниках и базового уровня, и углублённого, по-моему, недопустимо.

Наше решение

$$\blacktriangleright \left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+4=x-2 \Leftrightarrow x=-3, \\ x-2\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing .$$

Ответ: $\varnothing$.◄

Что мы видим в решении авторов?

Можно сказать *проще*:

при решении иррационального уравнения или неравенства ***надо учитывать ОДЗ!***

С точки зрения теории предикатов, равенства, содержащие хотя бы одну букву, не имеют смысла, если не известны множества, на которых эти предикаты рассматриваются.

Например,

$$M=N \Rightarrow x^1-4=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$M^*=R \Rightarrow x^1-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Тождество

Рассмотрим, например, в качестве предиката равенство

$$f(x)=g(x),\ \ x\in M\,.$$

Это равенство может быть на M тождеством, может быть уравнением, которое может иметь корни, а может и не иметь корней на M.

Если $M=R$, то множество можно не указывать.

А что такое тождество?

1 сентября 2022 г я вышла на пенсию.

Случайно, из любопытства, я заглянула в учебник [1] и тут же «споткнулась» на Примере 3.

«Пример 3 ([1], стр.6) **.** Доказать тождество

$$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}=c-2\,\text{»}$$

Записанное равенство тождеством мне не показалось.

Однако, в учебнике приведено «доказательство».

Не будем его переписывать.

Заметим только, что

$$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}=c-2\ \text{— предикат.}$$

Равенство

$$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}=c-2$$

определено на множестве

$$c^2+2c-1\neq 0\,.$$

И является, по определению, на этом множестве тождественно истинным.

Но... дети в этот момент ещё понятия не имеют ни о квадратном уравнении, ни об иррациональных числах — а, значит, и о множестве M.

Что на самом деле «происходит» в примере 1?

$$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}\equiv\frac{(c-2)\left(c^2+2c-1\right)}{c^2+2c-1}$$

На этом тождественные преобразования закончились.

Судя по всему, надо сократить на c^2+2c-1.

Но...сокращать, как я понимала в тот момент, можно на выражение, не обращающееся в 0.

Проверяем:

$$c^2+2c-1\equiv(c+1)^2-2=0\Leftrightarrow c=-1\pm\sqrt{2}\,.$$

Следовательно, нули есть, но ... они ещё не известны восьмиклассникам, и дети *не могут* записать правильный

Ответ (которого нет и в учебнике):

$$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}=c-2,c\neq-1\pm\sqrt{2}\,.$$

Конечно, в классе этот пример не обсуждали, определение тождества не давали, а на дом был задан следующий пример из учебника:

«Пример 20(а) ([1], стр. 10) Пользуясь определением частного, докажите тождество

$$\frac{m^2+3m-4}{m-1}=m+4\,\text{»}$$

На мой взгляд, это тоже не тождество: при каких — то m это равенство, может быть, и верно, при других — нет.

А как определяется частное? Когда можно делить на $m-1$?

В 7-м классе определялась дробь и её ОДЗ. Как можно работать с дробью, не учитывая ОДЗ? Да ещё говорить, что это тождество.

Кроме того, на предыдущих страницах учебника [1] было сказано, что умножать можно на выражение, отличное от 0.

В примере приходится умножать на выражение, равное 0 при $m = 1$, в то время как числитель при этом m тоже равен 0, т. е. дробь не существует.

Что происходит? Уже не раз упоминалось, что любое равенство — это или тождество, или тождество на множестве, или уравнение. В данном случае множество не указано — следовательно, равенство

$\frac{m^2+3m-4}{m-1}=m+4$ — это уравнение,

а $\frac{m^2+3m-4}{m-1}=m+4, m-1\neq 0$ —

тождество. Однако ни в одном учебнике такого Ответа нет.

Что же такое тождество?

Тождество — это «тот же, идентичный». В моей голове в то время было единственное определение тождества.

Тождество — это равенство, верное при любых значениях входящих в него букв. (О1)

Что следует из теории предикатов?

Там речь идёт о произвольном предикате, в частности, например, и о неравенстве.

Если предикатом является равенство, то можно сказать, что

«Равенство**, тождественно истинное **во всей области М, (О2) *называется **тождеством на М»***

По этому определению, тождество на M — это довольно «условное» равенство, т. к. оно *зависит от множества, на котором рассматривается.*

С точки зрения теории предикатов, определение (О1) соответствует тому, что в роли множества M выступает всё множество действительных чисел R.

Обратили внимание на определение тождества для предикатов?

Речь идёт ***о тождестве на М!***

Указано М, на котором рассматриваемое равенство верно — тождество, не указано — равенство является уравнением.

Поэтому равенство из [1]

$$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}=c-2$$

не может быть тождеством, т. к. не указано множество, на котором оно верно.

Однако, это равенство

$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}=c-2$ *является* тождеством, например, на множестве *рациональных* чисел Q, но на R это уравнение.

Классическими примерами тождеств являются правила сложения и умножения *чисел*:

1. $a+b=b+a$.

2. $(a+b)+c=a+b+c=a+(b+c)$ и т. д.,

формулы сокращенного умножения:

3. $a^2-b^2\equiv(a-b)(a+b)$,

4. $(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$, и т. д.

5. тригонометрические тождества и т. д.

Можно записать и так:

«Равенство, превращающееся в верное числовое равенство во всей области определения M, называется ***тождеством на M****».*

Если M = R, то M можно не указывать, а вместо знака = можно поставить знак тождества $\equiv$.

Например,

$$\frac{x^2+3x-4}{x-1}=x+4,\ x-1\neq 0.$$

$$(x-a)^2\equiv x^2-2ax+a^2$$

Зачем нам нужны тождества?

Очень просто — для упрощения выражений.

Например,

$$\left(x^2-ax+a^2\right)(x+a)-2x^3-$$

$$-3x^2a-3xa^2-a^3\equiv$$

$$\equiv(x+a)^3-(x+a)^3-x^3\equiv -x^3.$$

А что такое тождество в школе?

Как определяется тождество в разных учебниках?

Любопытство заставило открыть разные учебники.

Читаем ([5] на стр. 34):

1. «Равенство, верное при ***любых*** значениях входящих в него переменных, называют тождеством».

Это определение для 7-классников. Звучит так, будто определение верно на R, хотя к этому моменту 7-классники ещё не знакомы, например, с иррациональными числами.

На стр. 244, уже после введения понятия функции, читаем:

2. «Равенство, которое выполняется при ***любых допустимых*** значениях входящих в него переменных, называют тождеством». Это определение отличается от определения в теории предикатов тем, что множество, на котором выполняется равенство, ***лишь имеется в виду***, но не указывается.

(Замечание. Но оно, честно говоря, для любопытных школьников может вызвать вопросы. Это связано с определением переменного. Это мы в статье уточнять не будем).

Сразу приводится любопытный пример:

Доказывается, что «равенство $\frac{a-2}{a-2}=1$ является тождеством, *так как* оно выполняется при *всех* $a\neq 2$.»

Действительно, так как равенство $\frac{a-2}{a-2}=1$ *определено* при $a\neq 2$ и является при этом верным числовым равенством на всей области определения (выполняется при *всех* $a\neq 2$, т. е. в ОДЗ), то оно, по определению, *является тождеством на этом множестве, или.*

$$\boxed{\frac{a-2}{a-2}=1,\ a\neq 2} \qquad (*)$$

Примечание. Всё — таки понятней было бы записать так:

$$\boxed{\frac{a-2}{a-2}\equiv 1,\ a\neq 2}$$

Так как

$\frac{a}{a}=1,\ \ a\neq 0;\ \frac{a^2-1}{a^2-1}=1,\ \ a\neq\pm 1$. и т. д., то можно считать, что

$$\boxed{\frac{P_n(x)}{P_n(x)}=1, P_n(x)\neq 0}$$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, ***алгебраическая единица на множестве***

$$P_n(x)\neq 0\text{ ,}(1)$$

$$\boxed{\frac{f(a)}{f(a)}=1, a\in D\big(f(a)\big), f(a)\neq 0}\quad -(2)$$

алгебраическая единица на множестве $f(a)\neq 0$

Зачем она нужна? И, вообще, нужна ли? Увидим чуть позже.

Если внимательно просмотреть страницы, на которых выписаны эти определения, то станет ясно, что они относятся к рациональным дробям, у которых есть ОДЗ.

В ([6], стр. 144) это *чётко* видно:

3. «Равенство двух **рациональных** выражений называют тождеством, или тождественным равенством, если оно превращается в *верное числовое равенство* ***для всех числовых значений букв***, для которых оба выражения *определены*».

По-моему, определение 3 можно немного изменить, чтобы оно «работало» и тогда, если выбросить слово «рациональных».

«Равенство двух выражений, определённых на множестве M, называют тождеством на M, или тождественным равенством на M, если оно превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений букв, принадлежащих M»

А вот далее в [6] идёт фраза, которая меня совершенно «сразила»:

«***верное равенство двух рациональных*** *выражений всегда есть тождество*».

Рассмотрим простейшее равенство

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}-1=\frac{a+b}{a+b}-1=0.$$

Теперь как записать Ответ?

Так

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}-1=0 \qquad (3)$$

или так

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}-1=0,\ a+b\neq 0? \qquad (4)$$

Что скажем? Верное это равенство или нет?

Тождество это или нет?

По — моему, ***верно,*** если записать так

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}-1=0,\ a+b\neq 0? \qquad (4)$$

А что значит «***верное равенство двух рациональных*** *выражений*»?

У рациональных выражений есть ОДЗ!

«Пример 3 ([6],стр. 146). Докажем тождество

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a-b}.\text{ »}$$

В конце доказательства «что — то» написано по поводу того, где тождество имеет место, но... математически это ограничение никак не отмечено.

Наше решение

На вид равенство довольно громоздкое и «не очень похоже» на тождество.

Рассмотрим разность:

$$\left(\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}\right)-$$

$$-\left(\frac{a^2-b^2}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)\equiv$$

$$\equiv(a-b)\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right)-$$

$$-(a+b)\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-ab+b^2}\right)-$$

$$-\left((a-b)\frac{a+b}{a+b}-(a+b)\frac{a-b}{a-b}\right)=0,$$

$$a^4-b^4\neq 0,$$

т. е. заданное равенство является тождеством на множестве $M: x^x-a^2\neq 0$, а без указания множества равенство является уравнением с двумя переменными.

Заметим, что мы несколько раз воспользовались «алгебраической единицей»

Условие **Примера 3** стоило бы переформулировать:

«Докажем тождество

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a-b}$$

$$a^4-b^4\neq 0\,»$$

Видно, что «верное ***равенство двух рациональных*** *выражений (левой и правой частей заданного равенства) не* ***всегда*** *есть тождество*», а является им **только тогда, когда равенство верно *на всём множестве М***, на котором определены обе части равенства.

Вот, например, ещё два равенства рациональных выражений:

$$\frac{(x-6)^2}{x-6}=x-6 \text{ и}$$

$$\frac{(x-6)^2}{x-6}=x-6,\ x-6\neq 0\,.$$

Есть здесь тождество? А, может быть, оба тождества?

Каково учителю?

Читаем далее:

«При доказательстве тождеств пользуются *правилами*, которым подчинены алгебраические дроби. При этом ***каждый раз имеется в виду***, что доказываемые равенства справедливы для тех числовых значений букв, для которых определены обе его части»

«*Иногда*, рассматривая тождество, дополнительно выписываем числовые значения букв, для которых определены обе части тождества».

Что значит «иногда»? Когда «иногда»? Кто помнит, что *что — то* имеется в виду?

Решила посмотреть, что же называется рациональной дробью и какие правила этих авторов для них существуют.

Нашла [6], стр. 124:

«Алгебраической дробью называют выражение $\frac{A}{B}$ – частное многочлена А и ***ненулевого*** многочлена В».

А что такое *нулевой многочлен?*

«*Число* 0 называют нулевым многочленом» — [6], стр. 79.

Стоп! Поняла1

Значит, например, $\frac{x^3-1+a}{x-x}$ — не дробь (это, по — моему, ясно любому, т. к. делить на 0 нельзя!), а $\frac{x^3-1+a}{x+2}$ — дробь.

У дроби $\frac{A}{B}$, между прочим, есть ОДЗ: $B(x)\neq 0$.

По-моему,

«***Алгебраической*** дробью называется выражение вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, где

$$x\in ОДЗ: D(f)\cap D(g)\text{»}$$

Тогда

«Выражение $\frac{A}{B}$ — *частное многочлена* А и *ненулевого* многочлена В назовём ***рациональной*** дробью»

Читаем дальше ([6], [3]).

«Основное свойство алгебраических дробей:

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}, \qquad (*)$$

где C — *любой ненулевой* многочлен», т. е., проще говоря, $C\neq 0$?.

Не поняла: а как же ОДЗ?

Тогда, согласно (*),

$$\frac{x}{x-3}=\frac{x}{x-3}\cdot\frac{x-1}{x-1}?$$

Не поняла! Я опять «запуталась».

На мой взгляд, (*) — сомнительное равенство. Когда оно верно? А зачем оно нужно?

Рассмотрим, например, дробь $\frac{x-3}{x+1}$, ОДЗ: $x\neq -1$.

Теперь умножим дробь $\frac{x-3}{x+1}$ на дробь $\frac{x-1}{x-1}$, где $x-1$ ненулевой многочлен.



У функции $y(x)=\frac{x-3}{x+1}$ появилась «дырка» при $x=1$, т. к. появилась новая функция

$g\{x\}=\frac{x-3}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}$ со своим ОДЗ: $x\neq -1,\ x\neq 1$.

Как можно при этом считать, что

$$\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-3}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}?$$

О каком равенстве может идти речь?

Судя по всему, C — не *любой ненулевой* многочлен, а, по крайней мере, $C(x)\neq 0$ (не только $C\not\equiv 0$).

Например,

$$\frac{6x-4x^2}{5x-1}=\frac{\left(6x-4x^2\right)\left(x^{2.}+1\right)}{(5x-1)\left(x^{2.}+1\right)}.$$

А тогда что скажем про равенство

$$\frac{6x-4x^2}{5x-1}=\frac{\left(6x-4x^2\right)\left(x^{2.}-1\right)}{(5x-1)\left(x^{2.}-1\right)}?$$

Но... $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}\equiv\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{C}$, где множитель $\frac{C(x)}{C(x)}$ — знакомая «алгебраическая» единица. Она может изменить ОДЗ заданной дроби, добавив «дырку», и в новом ОДЗ: $BC\neq 0$ получится тождество

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},\ BC\neq 0.$$

Поэтому, по — моему, стоит ***уточнить*** формулировку (*)

*«Основное свойство **рациональных** дробей.*

Если $BC \neq 0$, *то*

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \text{ т. е} \qquad (**)$$

т. е. равенство $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ *является тождеством при условии, что* $BC \neq 0$.»

Заметим, что $BC \neq 0$ *— это ОДЗ равенства* $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$.

Для ***алгебраических*** дробей необходимо дополнительно учесть ОДЗ числителя и знаменателя.

Получилось тождество — теперь всюду, где требуется, можно левую часть заменить на правую, и наоборот.

Где это свойство используется?

Оно используется для упрощения (например, сокращения) дроби, для приведения дробей к общему знаменателю (например, при приведении подобных слагаемых), для нахождения алгебраической суммы дробей и т. д.

Равенство дробей. Приведение дробей к общему знаменателю.

Я не встретила, где это написано, но знаю, что в школе, по определению,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — это значит, что $ad = bc$, т. е.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, где a, b, c, d действительные числа (имеется в виду, что знаменатели не равны 0, т. к. на 0 делить нельзя).

Насколько я помню, как приводить рациональные дроби к общему знаменателю, учителя *показывают*, как это *формально* делать, ничего при этом не объясняя:

$$\frac{\frac{x+2}{x-2}}{\frac{x+3}{x+3}} - \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+2}{x+2}} = \frac{(x^2-4)-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x+2)}.$$

Теперь покажем, как «работает» рациональная единица.

1) Сокращение дроби:

$$C \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{C} \neq 0 \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AC \cdot \frac{1}{C}}{BC \cdot \frac{1}{C}} = \frac{A}{B}.$$

2) Равенство дробей.

Пусть заданы две дроби:

$$\frac{A}{B}, \ B \neq 0, \ \frac{C}{D}, \ D \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$BD \neq 0 \Rightarrow \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{D} - \frac{C}{D} \cdot \frac{B}{B} =$$

$$= \frac{AD - BC}{BD}, \text{ т. е.}$$

$$\boxed{\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AD - BC = 0, \\ BD \neq 0. \end{cases}}$$

3) Приведение разности (суммы) дробей к общему знаменателю.

Пусть заданы две дроби:

$$\frac{A}{B}, \ B \neq 0, \ \frac{C}{D}, \ D \neq 0.$$

Тогда

$$BD \neq 0 \Rightarrow \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{D} - \frac{C}{D} \cdot \frac{B}{B} = \frac{AD - BC}{BD}.$$

Например,

$$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-2}{x+3} \cdot \frac{x+2}{x+2} - \frac{x+1}{x+2} \times \frac{x+3}{x+3} = \frac{-4x-7}{(x+2)(x+3)}.$$

(Продолжение следует)

Литература

1. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов
2. Алгебра, 9 класс, углублённый уровень. Москва, «Просвещение», 2019С. М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. Алгебра, 7
3. А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. Углублённый уровень. Алгебра, 8 класс. «Вентана — Граф», Москва, 2021.
4. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 10 класс. «Вентана — Граф», Москва. 2019
5. А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. Углублённый уровень. Алгебра, 7 класс. «Вентана — Граф», Москва, 2020
6. С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. Алгебра, 7 . 2021

НОВОСТИ

Разработки МФТИ станут технологической основой для запуска беспилотного транспорта в Долгопрудном

В администрации Долгопрудного состоялось совещание по запуску беспилотного общественного транспорта. Ключевыми технологическими центрами проекта выступают Институт искусственного интеллекта МФТИ и МАДИ. Объединённая команда инженеров уже обладает комплексом решений для создания автономной системы управления.

Специалисты МФТИ разработали алгоритмы высокоточной локализации без GPS с сантиметровой точностью, технологии построения HD-карт, распознавания объектов и прогнозирования траекторий. Для беспилотного автобуса планируется интегрировать модули распознавания сигналов светофоров, интеллектуальной навигации и мониторинга салона. Оборудование разместят на имеющейся бортовой инфраструктуре с добавлением лидаров.

Ранее МФТИ и МАДИ успешно испытали беспилотный автомобиль на базе электрической «Газели». Накопленный программный задел теперь адаптируют для пассажирских перевозок.

Следующим этапом станет оснащение реального автобуса и его испытания на базе «Мострансавто», а затем — запуск на пилотных маршрутах возле кампуса МФТИ и Физтех-лицея. Параллельно прорабатывается расширение экспериментального правового режима (ЭПР) для Московской области.

Цель проекта — создание масштабируемого программно-аппаратного комплекса для массового внедрения на городском пассажирском транспорте, что позволит существенно повысить безопасность и эффективность перевозок.

Источник: https://mipt.ru/news