

Колесникова Софья Ильинична
Заслуженный преподаватель МФТИ (кафедра высшей математики),
Ведущий специалист ЗФТШ при МФТИ.
Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» (гриф ФИПИ),
«Решение сложных задач ЕГЭ», серии пособий
«МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ».
Лауреат премии Правительства Российской Федерации
в области образования 2020 г.

Учебник, учитель, ГДЗ, репетитор, и … ученик. Часть 2

Новый учитель по алгебре — «Как обухом по голове».

(Продолжение, начало в №1-2025 г.)

Суть математики не в том, чтобы усложнить простые вещи, а в том, чтобы упростить сложные.
Стэн Гадер

Задачи в классе и домашние задания

Статья посвящена не очень простой проблеме, которая возникла в последнее время.

С появлением профильных классов возникла проблема с нехваткой соответствующих учителей, а тогда для подготовки к ЕГЭ появилась огромная «армия репетиторов», среди которых много молодёжи, успешно сдавшей в своё время ЕГЭ. И тогда, вместе с повышением зарплаты, в школе появились молодые «учителя» (и одновременно репетиторы) — выпускники бакалавриата технических вузов. Они «умны и амбициозны» и совершенно не понимают, что в классе — беззащитные ученики. Об одном таком случае и идёт речь.

В статье будут приведены решения учителя и одно из решений автора статьи. На самом деле некоторые примеры решаются несколькими способами: 2-мя, 3-мя и более.

В предыдущей части речь шла о решении уравнений и неравенств, содержащих логарифм с переменным основанием. В этой части внимание акцентируется на решении примеров, содержащих сложную экспоненту.

«Учитель» старается свести решение задач либо к логарифмам с переменным основанием, либо к сложной экспоненте.

Попробуем привести примеры его решений. Будет видно, что по ходу появляются равносильные соотношения для модулей и даже для сложной экспоненты, о которой вообще мало кто знает. Например, функцию $y(x) = x^{\ln x}$ некоторые авторы [1] называют «экзотической».

Неравенства на вид не очень сложные. Но... в каждом есть «изюминка», позволяющая заметно упростить решение *любого* логарифмического неравенства (а не только с переменным основанием) — однако учитель их не замечает или просто об этом не имеет понятия... Видимо, он не очень интересовался методами решения классических логарифмических неравенств, а решил сразу «похвастаться» модными нынче логарифмами с переменным основанием, используя их там, где надо и не надо.

Ни одно домашнее задание в классе не было разобрано, ни одно равносильное соотношение не было выведено.

Теперь взглянем на домашние задания.

Решите неравенства.

Пример 1 (ДЗ после второго урока). $x^{\log_2\sqrt{x}} \geq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Пример 2 (ДЗ после 3-го урока). $2^{\log_2^2 x} + 7x^{\log_2 x} < 16$.

Пример 3 (задача из контрольной работы). $\left(3\sqrt{x}\right)^{\log_2 x} \geq 1$.

Но что это за функции $y(x) = x^{\log_2\sqrt{x}}$? Откуда она взялась?

Сложная экспонента

Что такое $y(x) = a(x)^{f(x)}$?

В учебнике [1] (стр. 97) авторы акцентируют внимание на разнице между степенной $y(x) = x^{\alpha}$ и показательной $g(x) = a^x$ функциями, а *функцию* $h(x) = x^{\ln x}$ не считают ни показательной, ни степенной, а называют её «экзотической». Некоторые авторы в литературе называют функцию $y(x) = a(x)^{f(x)}$ показательно-степенной, другие — степенно-показательным выражением.

Тем не менее на стр. 110 того же учебника [1] есть *любопытный* (противоречащий написанному выше в учебнике). Пример 5. стр.110.

Пример 5. Решите неравенство $\left(x^2 + x + 1\right)^x \leq 1$.

► Читаем в учебнике:

«Выражение $y(x) = x^2 + x + 1 > 0, x \in R$. Рассмотрим три возможности.

1) Пусть $0 < x^2 + x + 1 < 1$. Тогда $\left(x^2 + x + 1\right)^x \leq 1 = \left(x^2 + x + 1\right)^0$ *можно* рассматривать как *показательное* неравенство вида $y^x \leq y^0$, где $0 < y < 1$. Значит, получим $x \geq 0$. Но нужно ещё учесть, что $y < 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + x = x(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1;0) \Rightarrow \varnothing$, т. к. $x \geq 0$...».

Аналогичные рассуждения и для остальных двух случаев:

$$x^2+x+1=1,\ x^2+x+1>1.$$

Решение занимает больше половины страницы.

Возникает *законный вопрос* — как «экзотическая» функция превратилась в показательную?

Тогда что же это за «экзотическая» функция?

Если посмотреть на выражение $y(x)=a(x)^{f(x)}$,

то это не показательная функция, т. к. основание переменно! Но это и не степенная функция, потому что показатель переменный.

Начнем с определения:

$$y(x)=a(x)^{f(x)} \overset{\text{по определению}}{=} c^{f(x)\log_c a(x)} \equiv$$
$$\equiv 2^{f(x)\log_2 a(x)} \equiv 10^{f(x)\lg a(x)} \equiv e^{f(x)\ln a(x)},$$

где $a(x)>0$, а c - любое допустимое основание $c>0,\ c\neq 1$

Функцию $y(x)=a(x)^{f(x)} \equiv e^{f(x)\ln g(x)}$ называют *сложной экспонентой.*

Теперь хорошо видно, что *областью определения* сложной экспоненты является множество X, на котором $a(x)>0$.

Как решить уравнение $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}$?

Нигде не написано.

Воспользуемся определением сложной экспоненты (возьмем в роли c число 10 — наиболее знакомое школьникам основание логарифма).

Тогда

$$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)}=10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x)=g(x)\lg a(x) \Leftrightarrow$$

$$\lg a(x)\big(f(x)-g(x)\big)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\ln a(x)=0,\\ x\in D(f)\cap D(g);\end{cases}\\ \begin{cases}a(x)>0,\\ f(x)=g(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Следовательно,

$$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}a(x)=1,\\ f(x)=g(x).\end{array}\right. \qquad (\text{П } 3)$$

или полное условие равносильности

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g); \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (\text{П } 3^*)$$

Соотношение

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x) = g(x)\lg a(x) \qquad (\text{П } 3^{**})$$

показывает, что равносильное уравнение получается таким же, как если бы его прологарифмировали как "обычную" степень по допустимому основанию.

Замечательно, что ОДЗ левой и правой частей всегда совпадают! Именно поэтому этот равносильный переход обычно называют и *осуществляют логарифмированием* уравнения $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

При выводе условий равносильности для *неравенств* нам придётся воспользоваться правилами для решения и показательных, и логарифмических неравенств:

$$a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \overset{\text{по определению}}{\Leftrightarrow} 10^{f(x)\lg a(x)} - 10^{g(x)\lg a(x)} \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \Rightarrow$$
$$\lg a(x)\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \big(a(x) - 1\big)\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0$$

$$\text{П П3: } a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \big(a(x) - 1\big)\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0$$

Отсюда следует

$$\text{П П3}^*. \ \frac{a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}}{h(x)} \vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{\big(a(x) - 1\big)\big(f(x) - g(x)\big)}{h(x)} \vee 0, \text{ где}$$

$$\text{ОДЗ}^*: \ a(x) > 0.$$

Здесь П П3 наиболее *эффективно* работает, и без него уже трудно обойтись.

Теперь можно решить

Пример 5 ([1], стр. 110).

Первый способ (есть в учебниках)

Нигде нет объяснения, почему можно логарифмировать — ведь неизвестно, что это за функция $y = a(x)^{f(x)}$.

Но мы показали, что при логарифмировании получается равносильное неравенство. Поэтому

$$\left(x^2+x+1\right)^x \le 1 \Leftrightarrow x\lg\left(x^2+x+1\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ \lg\left(x^2+x+1\right)\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ \lg\left(x^2+x+1\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2+x+1\le 1 \Leftrightarrow x\in[-1;0];\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ x^2+x+1\ge 1 \Leftrightarrow x(x+1)\ge 0 \Rightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\{0\}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\{0\}$$

Ответ. $(-\infty;-1]\cup\{0\}$.

Второй способ (очень распространённый, но в литературе ничем не аргументированный)

Из Правила П П3 следует, в частности, что

$$\left(x^2+x+1\right)^x \le \left(x^2+x+1\right)^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x+1\ge 1,\\ x\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}0<x^2+x+1<1,\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\{0\}$$

Ответ. $(-\infty;-1]\cup\{0\}$.

Третий способ (самый короткий)

Воспользуемся правилом П П3:

$\left(x^2+x+1\right)^x \le \left(x^2+x+1\right)^0 \Leftrightarrow \left(x^2+x+1-1\right)x\le 0 \Leftrightarrow$
$x^2(x+1)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\{0\}$

Ответ. $(-\infty;-1]\cup\{0\}$. ◄

Решение домашних заданий

Пример 1. (ДЗ после второго урока). Решите неравенство $x^{\log_2\sqrt{x}} \ge \frac{2}{\sqrt{x}}$.

И что делать ученику, если он понятия не имеет ни о какой сложной экспоненте?

Нигде её не видел, хотя в учебниках такого типа примеры встречаются и решаются логарифмированием, ссылаясь на *логарифмирование обычных* функций. Но мы показали, что логарифмирование допустимо.

Наше решение

►Прологарифмируем неравенство по основанию 2:

$$x^{\log_2\sqrt{x}} \ge \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x}\cdot\log_2 x \ge 1-\frac{1}{2}\log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\log^2{}_2 x+\log_2 x-2\ge 0 \Leftrightarrow (\log_2 x-1)(\log_2 x+2)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(\log_2 x-\log_2 2)(\log_2 4x-\log_2 1)\ge 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} (x-2)(4x-1)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$x\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]\cup[2<+\infty) \overset{\text{с учётом } x>0}{\Leftrightarrow} \left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[2<+\infty)$$

Ответ. $\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[2<+\infty)$.

Как бы решил эту задачу учитель? Неизвестно.◄

Пример 2 (ДЗ после 3-го урока**).** Решите неравенство $2^{\log_2^2 x}+7x^{\log_2 x}<16$

►Это домашнее задание после 3-его урока. Учитель со сложной экспонентой в классе до сих пор не работал.

Первый способ (наше решение)

Переходим, как обычно, если возможно, к постоянному основанию:

$$2^{\log_2 x}=x \Rightarrow 2^{\log_2^2 x}+7x^{\log_2 x}=2^{\log_2^2 x}+7\left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}=8\cdot 2^{\log_2^2 x}<16 \Leftrightarrow$$

$$2^{\log_2^2 x}<2 \Leftrightarrow -1<\log_2 x<1 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2};2\right)$$

Ответ. $\left(\frac{1}{2};2\right)$.◄

Второй способ (решение в классе — образец решения накануне контрольной).

В феврале, накануне контрольной, учитель всё-таки решил показать «эталонное» решение неравенства

$$2^{\log_2^2 x}+7x^{\log_2 x}<16.$$

►Приводим это решение.

Учитель, вопреки стандартной методике, упрощающей решение, усложнил неравенство, перешёл сначала к *сложной экспоненте*, воспользовался правилом для сложной экспоненты, а затем перешёл к обычным логарифмам.

$$2^{\log_2^2 x}+7x^{\log_2 x}<16\left|\cdot\frac{1}{2^{\log_2^2 x}}\Leftrightarrow 1+7\frac{x^{\log_2 x}}{2^{\log_2^2 x}}<\frac{2^4}{2^{\log_2^2 x}}\Leftrightarrow\right.$$

$$1+7\frac{x^{\log_2 x}}{\left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}}<\frac{2^4}{\left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}}\Leftrightarrow 1+7\frac{x^{\log_2 x}}{x^{\log_2 x}}<\frac{2^4}{x^{\log_2 x}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2-x^{\log_2 x}}{x^{\log_2 x}}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x^{\log_x 2}-x^{\log_2 x}>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ (x-1)\left(\log_x 2-\log_2 x\right)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

(Учитель воспользовался правилом для сложной экспоненты, но нигде оно не выписано)

$$\left[\begin{array}{l}x=1,\\ (x-1)\left(\dfrac{1}{\log_2 x}-\log_2 x\right)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ (x-1)\left(\dfrac{1-\log^2{}_2 x}{\log_2 x}\right)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ \dfrac{(x-1)(\log_2 x-1)(\log_2 x+1)}{\log_2 x}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ \dfrac{(x-1)(\log_2 x-\log_2 2)\left(\log_2 x-\log_2\frac{1}{2}\right)}{\log_2 x-\log_2 1}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1,\\ \left\{\begin{array}{l}x\neq 1,\ x>0,\\ \dfrac{(x-1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-1}<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x\notin\left(\frac{1}{2};2\right).$$ **Ответ.** $\left(\frac{1}{2};2\right).\blacktriangleleft$

Какой способ выбираете?

Пример 3. Решите неравенство (классная работа на третьем уроке)

$$\log_{|x-7|}\sqrt{x-5}\le\frac{1}{4}.$$

► *Первый способ* (учителя)

Не обращая внимания ни на корень, ни на модуль, учитель «уверенно» применяет «что-то» выписанное на доске, применив «по дороге» без объяснений П К1и П М1, да ещё спутав $\frac{1}{4}$ с $\frac{1}{2}$:

$$\log_{|x-7|}\sqrt{x-5}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow\log_{|x-7|}\sqrt{x-5}\le\log_{|x-7|}|x-7|^{\frac{1}{4}}\Leftrightarrow$$

$$\text{«}\begin{cases}\left(|x-7|-1\right)\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{|x-7|}\right)(?)\le 0,\\ |x-7|\ne 0,\\ |x-7|\ne 1,\\ x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-8)(x-6)\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{|x-7|}\right)(?)\le 0,\\ x\ne 7, x\ne 8, x\ne 6,\\ x>5\end{cases}\text{ и т.д.»}$$

Второй способ (наше решение)

На самом деле, неравенство *упрощается* — уберём сначала и корень, и модуль:

$$\log_{|x-7|}\sqrt{x-5}=\frac{1}{2}\log_{|x-7|}(x-5)=\frac{\log_{|x-7|^2}(x-5)}{2\log_{|x-7|^2}|x-7|}=\frac{\log_{(x-7)^2}(x-5)}{\log_{(x-7)^2}(x-7)^2}=\log_{(x-7)^2}(x-5),$$

Заданное неравенство приняло вид

$$\log_{(x-7)^2}(x-5)\le\frac{1}{4}.$$

А это уже можно решить любым из 3-х, приведённых ниже, и более способов:

1) перейти, например, к постоянному основанию:

$$4\log_{(x-7)^2}(x-5)\le 1=\log_{(x-7)^2}(x-7)^2\Leftrightarrow\begin{cases}x-5>0,\\ \dfrac{\lg(x-5)^4-\lg(x-7)^2}{\lg(x-7)^2}\le 0\end{cases}$$

2) рассмотреть два случая: $a(x)>1$ и $0<a(x)<1$, или

3) воспользоваться УР Л3 и др.

Воспользуемся, например, УР Л3 или П Л3:

$$\log_{|x-7|}\sqrt{x-5}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\log_{(x-7)^2}(x-5)\le 1\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x-5>0,\\ \log_{(x-7)^2}(x-5)^4\le\log_{(x-7)^2}(x-7)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-5>0,\\ x\ne 6, x\ne 7, x\ne 8,\\ (x-8)(x-6)\left((x-5)^2-(x-7)\right)\left((x-5)^2+(x-7)\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5>0, \\ x\neq 6, x\neq 7, x\neq 8, \\ (x-8)(x-6)^2(x-3)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(5;6)\cup(6;7)\cup(7;8)$$

Ответ. $(5;6)\cup(6;7)\cup(7;8)$. ◄

Пример 4 (классная работа на четвёртом уроке). Решите неравенство

$$\log_{4x^2} x^2\cdot\log_{8x^2} x^4\leq 1.$$

►*Первый способ* (решение учителя)

Учитель *переходит к логарифмам с основанием* x^2.
Получилось (по «дороге» потерян минус):

$$\log_{4x^2} x^2\cdot\log_{8x^2} x^4\leq 1\Leftrightarrow \log_{4x^2} x^2\cdot 2\log_{8x^2} x^2\leq 1\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x^2} 4x^2}\cdot\frac{2}{\log_{x^2} 8x^2}\leq 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\log_{x^2} 4x^2\cdot\log_{x^2} 8x^2}{\log_{x^2} 4x^2\cdot\log_{x^2} 8x^2}\leq 0\Leftrightarrow \frac{2-\left(\log_{x^2} 4+\log_{x^2} x^2\right)\left(\log_{x^2} 8+\log_{x^2} x^2\right)}{\left(\log_{x^2} 4+\log_{x^2} x^2\right)\cdot\left(\log_{x^2} 8+\log_{x^2} x^2\right)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\left(\log_{x^2} 2^2+1\right)\left(\log_{x^2} 2^3+1\right)}{\left(\log_{x^2} 2^2+1\right)\cdot\left(\log_{x^2} 2^3+1\right)}\leq 0\Leftrightarrow \frac{2-\left(2\log_{x^2} 2+1\right)\left(3\log_{x^2} 2+1\right)}{2\left(\log_{x^2} 2+\frac{1}{2}\right)\cdot 3\left(\log_{x^2} 2+\frac{1}{3}\right)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-6\log^2_{x^2} 2-5\log_{x^2} 2-1}{\left(\log_{x^2} 2+\frac{1}{2}\right)\left(\log_{x^2} 2+\frac{1}{3}\right)}\leq 0\Leftrightarrow \frac{6\left(\log_{x^2} 2+1\right)\left(\log_{x^2} 2-\frac{1}{6}\right)}{\left(\log_{x^2} 2+\frac{1}{2}\right)\left(\log_{x^2} 2+\frac{1}{3}\right)}\leq 0$$ (*забыли сменить знак*) $\Leftrightarrow$

зачем следующие такие преобразования?

$$\frac{\left(\log_{x^2} 2-\log_{\frac{1}{2}} 2\right)\left(\log_{x^2} 2-\log_{64} 2\right)}{\left(\log_{x^2} 2-\log_{\frac{1}{4}} 2\right)\left(\log_{x^2} 2-\log_{\frac{1}{8}} 2\right)}\leq 0\Leftrightarrow$$ откуда следующее неравенство?

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)(2-1)\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\left(x^2-1\right)(64-1)(2-1)\left(64-x^2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)(2-1)\left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\left(\frac{1}{8}-1\right)(2-1)\left(\frac{1}{8}-x^2\right)}\leq 0, \\ x\neq 0, x\neq\pm 1 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+1)^2\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(x-8)(x+8)}{(x-1)^2(x+1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}\left(x-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\geq 0, \\ x\neq 0, x\neq \pm 1 \end{cases}$$

Ответ. $x\in(-\infty;-8]\cup\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup[8;+\infty)$.

Ответ противоположен правильному, т. к. «по дороге» не сменили знак. ◄

► *Второй способ* (наше решение).

Перейдём, по определению, во всех логарифмах к основанию 2:

$$\log_{4x^2}x^2\cdot\log_{8x^2}x^4\leq 1\Leftrightarrow\frac{\log_2 x^2}{2+\log_2 x^2}\cdot\frac{2\log_2 x^2}{3+\log_2 x^2}\leq 1.$$

Теперь сделаем замену переменных: $t=\log_2 x^2$.

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{2t^2}{(t+2)(t+3)}\leq 1\Leftrightarrow\frac{2t^2-(t+2)(t+3)}{(t+2)(t+3)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{t^2-5t-6}{(t+2)(t+3)}=\frac{(t+1)(t-6)}{(t+2)(t+3)}\leq 0.$$

Дальше можно идти разными путями.

1) Можно дорешать рациональное неравенство

$$\frac{(t+1)(t-6)}{(t+2)(t+3)}\leq 0\Leftrightarrow t\in(-3;-2)\cup[-1;6],$$

переписать его в виде неравенств $-3<t<-2,\ -1\leq t\leq 6,$ потом перейти к старым переменным $-3<\log_2 x^2<-2,\ -1\leq\log_2 x^2\leq 6$ и, решив 4 логарифмических неравенства, получим, что $\dfrac{1}{8}<x^2<\dfrac{1}{4},\ \ \dfrac{1}{2}\leq x^2\leq 2^6$.

Ответ. $\left[-8;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};8\right]$.

2) Другое окончание решения:

Более «*продвинутые*» учащиеся могут перейти сразу к старым переменным:

$$\frac{\left(\log_2 x^2+1\right)\left(\log_2 x^2-6\right)}{\left(\log_2 x^2+2\right)\left(\log_2 x^2+3\right)}=\frac{\left(\log_2 2x^2-\log_2 1\right)\left(\log_2 x^2-\log_2 2^6\right)}{\left(\log_2 4x^2-\log_2 1\right)\left(\log_2 8x^2-\log_2 1\right)}\leq 0\Leftrightarrow$$

(Вот теперь *не обойтись* без правила П Л1)

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \dfrac{\left(2x^2-1\right)\left(x^2-2^6\right)}{\left(4x^2-1\right)\left(8x^2-1\right)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \in \left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2};2^6\right].$$

Ответ. $\left[-8;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right] \cup \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};8\right]$. ◄

Пример 5 (классная работа).

Решите неравенство $\dfrac{\log_3(3-x)-\log_3(3x+2)}{\log_3^2 x^2+2\log_3 x^4+4} \geq 0$

Это неравенство вместе с решением есть в сборнике Ященко «36 вариантов, 2025 г.» на стр. 198.

► Классическое логарифмическое неравенство, чуть-чуть усложнённое наличием знаменателя.

Первый способ (решение из сборника, но, в отличие от того, что в сборнике, оформлено с помощью классических равносильных преобразований):

$$\frac{\log_3(3-x)-\log_3(3x+2)}{\log_3^2 x^2+2\log_3 x^4+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3(3-x)-\log_3(3x+2)}{\left(\log_3 x^2+2\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3 x^2+2 \neq 0, \\ \log_3(3-x) \geq \log_3(3x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, x^2 \neq \dfrac{1}{9}, \\ 3-x \geq 3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{4}\right]$$

Ответ. $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3};0\right) \cup \left(0;\dfrac{1}{4}\right]$.

Второй способ (решение «умного» репетитора):

$$\frac{\log_3(3-x)-\log_3(3x+2)}{\log_3^2 x^2+2\log_3 x^4+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3(3-x)-\log_3(3x+2)}{\log_3^2 x^2+4\log_3 x^2+4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(3-x)-\log_3(3x+2)}{\left(\log_3 x^2+2\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3(3-x)-\log_3(3x+2)}{\left(\log_3 x^2-\log_3\frac{1}{9}\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-x-3x-2}{\left(x^2-\frac{1}{9}\right)^2} \geq 0, \\ x \neq 0, 3-x>0, 3x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-4x}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2} \geq 0, \\ x \neq 0, -\dfrac{2}{3} < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right]$$

Ответ. $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right]$. ◄

Пример 6 (классная работа). Решите неравенство

$$\log_{x^2-1}(x-1)\geq\log_{x^2-1}\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}.$$

► *Первый способ* (решение учителя)

$$\log_{x^2-1}(x-1)\geq\log_{x^2-1}\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0,\\ x^2\neq 2,\\ \left(x^2-1-1\right)\left(x-1-\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>1,\\ x\neq\sqrt{2},\\ \left(x^2-2\right)\left((x-1)^2-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ x\neq\sqrt{2},\\ \left(x-\sqrt{2}\right)(x-4)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(1;\sqrt{2}\right)\cup[4;+\infty)$$

Ответ. $\left(1;\sqrt{2}\right)\cup[4;+\infty)$. ◄

► *Второй способ* (наше решение — *не требуется* ни правило П К1, ни правило П Л2).

$$\log_{x^2-1}(x-1)\geq\log_{x^2-1}\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\Leftrightarrow 2\log_{x^2-1}(x-1)\geq\log_{x^2-1}\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>1\Rightarrow x^2-1>0,\\ \dfrac{\lg(x-1)^2-\lg\left(\frac{x^2}{2}+1\right)}{\lg\left(x^2-1\right)}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(1;\sqrt{2}\right)\cup[4;+\infty)$$

Неравенство в системе можно решить несколькими способами.

Ответ. $\left(1;\sqrt{2}\right)\cup[4;+\infty)$. ◄

Пример 7 (классная работа). Решите неравенство

$$x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\le x\log_7 x\cdot\log_6 x^4.$$

► *Первый способ* (решение учителя)

И опять учитель *перешёл к логарифмам с переменным основанием*

$$x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\le x\log_7 x\cdot\log_6 x^4\Leftrightarrow$$

$$x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\le 4x\log_7 x\cdot\log_6 x\Leftrightarrow$$

$$(x\log_7 x-3\log_6 x)(x\log_7 x-\log_6 x)\le 0\Leftrightarrow$$ (при переходе потеряно решение $x=1$)

$$\left(\frac{x}{\log_x 7}-\frac{3}{\log_x 6}\right)\left(\frac{x}{\log_x 7}-\frac{1}{\log_x 6}?\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{\log_x 7}-\frac{3}{\log_x 6}\right)\left(\frac{x}{\log_x 7}-\frac{1}{\log_x 6}\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\log_x 6^x-\log_x 7^3\right)\left(\log_x 6^x-\log_x 7\right)}{\log_x 7\cdot\log_x 6\cdot\log_x 7\cdot\log_x 6}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2\left(6^x-7^3\right)\left(6^x-7\right)}{(x-1)^2(7-1)^2(6-1)^2}\le 0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\left(x-\log_6 7^3\right)\left(x-\log_6 7\right)}{(x-1)^2}\le 0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\log_6 7;3\log_6 7\right]\cup ?$$

Ответ. $\left[\log_6 7;3\log_6 7\right]$.◄

Второй способ (наше решение)

$$x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\le x\log_7 x\cdot\log_6 x^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x-4x\log_7 x\cdot\log_6 x\le 0\Leftrightarrow$$

$$\left(m.к.\ \log_7 x=\frac{\log_6 x}{\log_6 7}\right)$$

$$\log_6^2 x\cdot\left(x^2-4x\log_6 7+3\log_6^2 7\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\log_6 x=0,\\ (x-\log_6 7)(x-3\log_6 7)\le 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x\in\{1\}\cup\left[\log_6 7;3\log_6 7\right]$$

Ответ. $\{1\}\cup\left[\log_6 7;3\log_6 7\right]$.◄

Контрольная работа (ровно через месяц занятий)

В результате в журнал было выставлено 6 троек и более 20 двоек. Разбора работы не было.

Сразу на следующем уроке в «том же духе» начали тему «Тригонометрия».

Вариант 1

Пример 1. Решите неравенство

$$\log_{25}\left(5^x-1\right)\cdot\log_5\left(5^{x+2}-25\right)<4$$

►Перейдём к одному основанию:

$$\log_{25}\left(5^x-1\right)\cdot\log_5\left(5^{x+2}-25\right)<4\Leftrightarrow$$

$$\frac{\log_5\left(5^x-1\right)}{2}\cdot\left(2+\log_5\left(5^x-1\right)\right)<4\Leftrightarrow\log_5\left(5^x-1\right)\left(2+\log_5\left(5^x-1\right)\right)<8$$

Введём новую переменную $\log_5\left(5^x-1\right)=t.$

Неравенство примет вид $t^2+2t-8<0\Leftrightarrow(t+4)(t-2)<0$

Перейдём к старым переменным:

$$\left(\log_5\left(5^x-1\right)+4\right)\left(\log_5\left(5^x-1\right)-2\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_5 5^4\left(5^x-1\right)\left(\log_5\left(5^x-1\right)-\log_5 25\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5^x-1>0,\\\left(5^4\left(5^x-1\right)-1\right)\left(\left(5^x-1\right)-25\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{625}<5^x-1<25\Leftrightarrow x\in\left(\log_5\left(1+\frac{1}{625}\right);\log_5 26\right)$$

Ответ. $\left(\log_5\left(1+\frac{1}{625}\right);\log_5 26\right).$◄

Пример 2. Решите неравенство $6\log_{2x}x+2\log_{4\sqrt{x}}(2x)\geq 1.$

►Перейдём к постоянному основанию 2:

$$6\log_{2x}x+2\log_{4\sqrt{x}}(2x)\geq 1\Leftrightarrow\frac{6\log_2 x}{1+\log_2 x}+\frac{2(1+\log_2 x)}{2+\frac{1}{2}\log_2 x}-1\geq 0$$

Пусть $\log_2 x=t.$ Тогда неравенство примет вид:

$$\frac{6t}{1+t}+\frac{4(1+t)}{4+t}-1=\frac{24t+6t^2+4t^2+8t+4-t^2-5t-4}{(1+t)(4+t)}=$$

$$=\frac{9t^2+27t}{(1+t)(4+t)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{t(t+3)}{(1+t)(4+t)}\geq 0$$

Перейдём к старым переменным:

$$\frac{\log_2 x(\log_2 8x)}{(\log_2 2x)(\log_2 16x)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(\log_2 x-\log_2 1)(\log_2 8x-\log_2 1)}{(\log_2 2x-\log_2 1)(\log_2 16x-\log_2 1)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{(x-1)(8x-1)}{(2x-1)(16x-1)}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{16}\right)\cup\left[\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)\cup[1;+\infty)$$

Ответ. $\left(0;\frac{1}{16}\right)\cup\left[\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)\cup[1;+\infty)$. ◄

Пример 3. Решите неравенство $\left(3\sqrt{x}\right)^{\log_2 x}\ge 1$

►Прологарифмируем неравенство по основанию 2:

$$\left(3\sqrt{x}\right)^{\log_2 x}\ge 1\Leftrightarrow\log_2 x\cdot\left(\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 x\right)\ge 0\Leftrightarrow\log_2 x\cdot\log_2 9x\ge 0\Leftrightarrow$$

$$(\log_2 x-\log_2 1)\cdot(\log_2 9x-\log_2 1)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ (x-1)(9x-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup[1;+\infty)$$

Ответ. $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup[1;+\infty)$. ◄

Вариант 2

Пример 1. Решите неравенство $\log_4\left(x^2-4\right)+\log_2\frac{x-1}{x^2-4}>0.$

Задано классическое логарифмическое неравенство, где у логарифмов постоянное основание. Трудно поверить, но дети *именно таких* в классе никогда не решали.

►Перейдём к одному основанию:

$$\log_4\left(x^2-4\right)+\log_2\frac{x-1}{x^2-4}>0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2\left(x^2-4\right)+\log_2\frac{x-1}{x^2-4}>0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-4}>0,\\ \log_2\left(x^2-4\right)+\log_2\left(\dfrac{x-1}{x^2-4}\right)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-4}>0,\\ \log_2\dfrac{(x-1)^2}{x^2-4}>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4>0,x>1\Rightarrow x>2\\ \dfrac{(x-1)^2}{x^2-4}-1>0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x+1-x^2+4}{x^2-4}>0\Rightarrow 5-2x>0\Leftrightarrow x<2{,}5\end{cases}\Leftrightarrow x\in(2;2{,}5)$$

Ответ. $(2;2{,}5)$. ◄

Пример 2. Решите неравенство $\log_{x+1}\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)\le 1$.

►*Первый способ* (можно найти в любом учебнике)

Для нахождения решения неравенства

$$\log_{x+1}\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)\le 1=\log_{x+1}(x+1)$$

в учебниках, в Интернете, у репетиторов (без объяснения, почему это возможно делать) предлагается рассмотреть два случая: $x+1>1$ и $0<x+1<1$ — по полной аналогии решения логарифмического неравенства с постоянным основанием (некоторые авторы, например в [1], даже ссылаются на это, не осознавая, что в условии записаны не логарифмы).

К сожалению, никто учащимся даже не «намекнул», что такой метод существует как для «настоящих» логарифмов, так и для логарифмов с переменным основанием.

Поступим так же. ([2]–[4]):

$$1)\quad \begin{cases} x+1>1\Rightarrow x+1\ne 1,\ x+4>0,\\ \sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\le x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;+\infty),\\ x+4\le x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;+\infty),\\ 16x^2-8x-63=16\left(x-\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}\right)\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge\frac{9}{4}$$

$$2)\quad \begin{cases} 0<x+1<1\Leftrightarrow -1<x<0,\\ \sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\ge x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<0,\\ \sqrt{x+4}\ge x+\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1<x<0,\\ x+\frac{1}{4}<0; \end{cases}\\ \begin{cases} -1<x<0,\\ x+\frac{1}{4}\ge 0,\\ x+4\ge x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right),\\ \begin{cases} -\frac{1}{4}\le x<0,\\ \left(x-\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}\right)\le 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right] \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left[-\frac{1}{4};0\right).$$

Итак, $x\in(-1;0)\cup\left[\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Второй способ (с применением П Л3)

$$\log_{x+1}\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)\le 1=\log_{x+1}(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\Rightarrow x+4\ge 0,\\ x+1\ne 1,\\ (x+1-1)\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}-x-1\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x+1>0,\\ x\ne 0,\\ x\left(\sqrt{x+4}-\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\ 1$$

а теперь полный «стоп», т. к. правило П К2 для корней вида

$$\sqrt{f(x)}-g(x)\vee 0$$

не встречалось ни в классных задачах, ни в домашних.

Выпишем его:

$$\text{П К2: }\sqrt{f(x)}-g(x)\vee 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\ge 0,\\ \sqrt{f(x)}-g(x)>0;\end{cases}\ \text{поэтому}\\ \begin{cases}g(x)\ge 0,\\ \left(f(x)-g^2(x)\right)\vee 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1>0, x\ne 0,\\ x+\frac{1}{4}<0\Rightarrow\sqrt{x+4}-\left(x+\frac{1}{4}\right)>0\Rightarrow x<0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ne 0, x+\frac{1}{4}\ge 0\Rightarrow x+1>0,\\ x\left(\sqrt{x+4}-\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)\left(\sqrt{x+4}+\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<-\frac{1}{4},\\ \begin{cases}x+\frac{1}{4}\ge 0, x\ne 0,\\ x\left(x+4-x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{16}\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<-\frac{1}{4},\\ \begin{cases}x+\frac{1}{4}\ge 0, x\ne 0,\\ x\left(x-\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}\right)\ge 0\Rightarrow x\left(x-\frac{9}{4}\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<-\dfrac{1}{4}, \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{4}\geq 0, x\neq 0, \\ x\in(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{9}{4};+\infty\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left[-\frac{1}{4};0\right)\cup\left[\frac{9}{4};+\infty\right)$$

Ответ. $(-1;0)\cup\left[\dfrac{9}{4};+\infty\right)$. ◄

Третий метод (без всяких модных «равносильностей» типа метода рационализации)

Перейдём, по определению, к логарифмам с постоянным основанием (никто детей этому не учил, не было ни одного примера или упоминания об этом):

$$\log_{x+1}\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)\leq 1=\log_{x+1}(x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)}{\lg(x+1)}-\frac{\lg(x+1)}{\lg(x+1)}=\frac{\lg\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)-\lg(x+1)}{\lg(x+1)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1)\begin{cases} \lg\left(\sqrt{x+4}+\dfrac{3}{4}\right)-\lg(x+1)\geq 0, \\ \lg(x+1)<0; \end{cases} \\ (2)\begin{cases} \lg\left(\sqrt{x+4}+\dfrac{3}{4}\right)-\lg(x+1)\leq 0, \\ \lg(x+1)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} (1)\begin{cases} \sqrt{x+4}\geq x+\dfrac{1}{4}, \\ -1<x<0; \end{cases} \\ (2)\begin{cases} \sqrt{x+4}\leq x+\dfrac{1}{4}, \\ x>0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \textit{таких неравенств дети никогда не видели}$$

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt{x+4}\geq x+\dfrac{1}{4}, \\ -1<x<0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{1}{4}<0, \\ -1<x<0\Rightarrow x+4>0, \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right); \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{4}\geq 0\Rightarrow -\dfrac{1}{4}\leq x<0, \\ x+4\geq x^2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{16}\geq 0\Leftrightarrow 16x^2-8x-63\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right); \\ \begin{cases} -\frac{1}{4}\le x<0, \\ \left(x-\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}\right)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right] \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left[-\frac{1}{4};0\right)$$

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{x+4}\le x+\frac{1}{4}, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0\Rightarrow x+\frac{1}{4}\ge 0, x+4>0, \\ x+4\le\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 16x^2-8x-63\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left(x+\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{9}{4}\right)\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[\frac{9}{4};+\infty\right)$$

Итак $x\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left[-\frac{1}{4};0\right)\cup\left[\frac{9}{4};+\infty\right)\Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup\left[\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Ответ. $(-1;0)\cup\left[\frac{9}{4};+\infty\right)$.◄

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt{\log_4^2 x-2}\ge\log_2\frac{x}{4}-1$.

$$\sqrt{\log_4^2 x-2}\ge\log_2\frac{x}{4}-1\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)^2-2}\ge\log_2 x-3.$$

Пусть $\log_2 x=t$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{\sqrt{t^2-8}}{2}\ge t-3\Leftrightarrow\sqrt{t^2-8}\ge 2t-6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t-3<0, \\ t^2-8\ge 0\Leftrightarrow t\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};+\infty\right); \end{cases} \\ \begin{cases} t-3\ge 0, \\ t^2-8\ge 4t^2-24t+36 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};3\right), \\ \begin{cases} t-3\ge 0, \\ 3t^2-24t+44\le 0\Leftrightarrow t\in\left[\frac{12-\sqrt{12}}{3};\frac{12+\sqrt{12}}{3}\right]\Rightarrow t\in\left[3;4+\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};4+\frac{2}{\sqrt{3}}\right]\Leftrightarrow -\infty<t\le-2\sqrt{2}\cup 2\sqrt{2}\le t\le 4+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Переходим к старым переменным:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x \le -2\sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x \le 2^{-2\sqrt{2}},\\ 2\sqrt{2} \le \log_2 x \le 4 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{2}} \le x \le 2^{4+\frac{2}{\sqrt{3}}}\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(0; 2^{-2\sqrt{2}}\right] \cup \left[2^{2\sqrt{2}}; 2^{4+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]$$

Ответ. $\left(0; 2^{-2\sqrt{2}}\right] \cup \left[2^{2\sqrt{2}}; 2^{4+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]$.

Заключение. Статья закончена — вопросы остались.

Я в самом начале статьи писала, что учитель перед контрольной предупредил детей, что работу сделать они не смогут, потому что найти решения таких задач невозможно. Разрешил при этом пользоваться на уроке всем, чем угодно: телефоном, Интернетом, соседом и т. д.

Но один ученик сказал, что хотя бы одну задачу он решит – и он, единственный в классе, решил весь первый вариант (решение представлено выше).

И что же?

Учитель не сделал ни единой пометка в работе, но поставил в середине листа 2 и автограф. На вопрос «за что 2?» ответил: «Решишь с равносильностями — поговорим». Учительница, ответственная за математику в старших классах, тоже ничего не поняла, но ничего при этом не сделала для школьника.

Вот такой оказалась ситуация с проблемой

«**Учебник, учитель, ГДЗ, репетитор, и … ученик**».

Остался вопрос – «Сколько 100-балльников решит такую контрольную за 60 минут в конце февраля учебного года?»

Литература

1. А. Г. Мордкович, П. В.Семёнов. Алгебра и начала математического анализа, 11. часть 1. Углублённый уровень. Москва, «Мнемозина», 2021
2. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс»,2008 (с 2004г), 6-изд., допущено ФИПИ.
3. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс»,2008, 4-е изд.
4. Колесникова С.И. Решение сложных задач ЕГЭ по математике. Москва, «ВАКО», 2011
5. Колесникова С.И. ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические неравенства. Москва, ООО «Азбука»
6. Колесникова С.И. ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические уравнения Москва, ООО «Азбука»
7. С.И. Колесникова ЕГЭ. Математика. Уравнения и неравенства, содержащие модуль. Москва, ООО «Азбука»
8. С.И. Колесникова ЕГЭ. Математика. Иррациональные неравенства. Москва, ООО «Азбука»