

Патрушев Глеб Олегович
Кандидат физико-математических наук, доцент,
учитель физики средней школы № 145, г. Красноярск



Морозова Галина Алексеевна
Старший методист Красноярского многопрофильного
техникума им. В. П. Астафьева, г. Красноярск

Цепи в задачах по механике

Публикуемая ниже статья посвящена анализу свойств объекта, который всем читателям хорошо знаком — цепь, состоящая из соединенных друг с другом звеньев. Рассматриваются учебные задачи, в которых находят отражение как поведение цепочки при ее движении, так и характеристики формы, которую она принимает в статических ситуациях.

Наверное читателям часто приходилось видеть цепи, которые ограждают проход к памятникам или музейным экспонатам. Формой дуги провиса таких цепей заинтересовался еще Галилей. Чуть позже Иоганн Бернулли, Лейбниц и Гюйгенс нашли уравнение кривой, которую Гюйгенс позже назвал — «цепная линия» [1]. Впоследствии оказалось, что эта кривая[1] возникает в самых разных областях физики. Профиль паруса, раздуваемого ветром, имеет форму цепной линии. Если натянуть мыльную пленку на два параллельных обруча, то форма поверхности, которую она образует, тоже является результатом вращения цепной линии [2]. И луч света, распространяющийся в среде с линейно меняющимся показателем преломления, идет вдоль цепной линии [3]. Наконец, значение цепной линии для архитектуры обусловлено тем, что из всех видов арок с данными весовыми характеристиками арка в форме цепной линии обладает наибольшей прочностью [1].

И немудрено, что цепь, форма которой регулярно встречается в окру-

[1] В математике эта функция известна также под названием гиперболический косинус — обозначается $\mathrm{ch}(x)$.

жающей жизни, стала главным действующим лицом во многих учебных физических задачах. Как это часто делается в «учебной» физике, объекты задач идеализируются. Идеальная цепочка, которую мы ниже будем рассматривать, обладает следующими свойствами:

- Масса единицы длины цепочки λ (это обозначение будет сквозным для всей статьи) одинакова в любом ее месте — цепочка однородна.
- Размер звеньев мал по сравнению с длиной цепочки.
- Отсутствует упругость на изгиб и при соударении звеньев.
- Цепочка нерастяжима.
- Чаще всего отсутствует трение между цепочкой и поверхностью, с которой она соприкасается.

Задача 1

Закрепленную за концы и свободно висящую в поле тяжести цепочку оттянули вниз силой, приложенной в ее центре так, что цепочка превратилась в ломаную линию (рис. 1). Что произошло с центром масс цепочки — поднялся он или опустился?

Решение

Свободно висящая цепочка находится в положении устойчивого равновесия. Как известно [4], в таком состоянии потенциальная энергия системы минимальна, а значит, центр масс занимает наинизшее положение. Следовательно, любое отклонение формы цепочки от равновесного связано с увеличением ее потенциальной энергии, а значит — и с подъемом центра масс.



Рис. 1

Задача 2 [5]

Тонкую цепочку массой m и радиусом R положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили до угловой скорости ω. Найдите силу натяжения, возникающую в цепочке.

Решение

Рассмотрим элемент цепочки массой $\lambda R\Delta\varphi$, видимый из центра окружности под малым углом $\Delta\varphi$. На его края действуют возникающие в цепочке силы натяжения, равнодействующая которых сообщает этому участку центростремительное ускорение (рис. 2).

Из параллелограмма сил понятно, что равнодействующая равна

$$2T\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\approx T\Delta\varphi$$

в силу малости угла $\Delta\varphi$.

Второй закон Ньютона для этого элемента выглядит так

$$\lambda R\Delta\varphi\omega^2R=T\Delta\varphi \qquad (1)$$

Таким образом, сила натяжения оказывается равна

$$T=\lambda\omega^2R^2=\frac{m\omega^2R}{2\pi}.$$

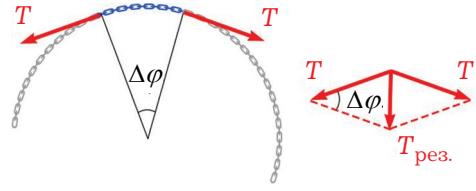


Рис. 2

Задача 3 [5]

Кольцевая цепочка массы m надета на горизонтальный диск радиуса R (рис. 3). Сила натяжения надетой цепочки T. Найдите коэффициент трения μ между диском и цепочкой, если при вращении диска с угловой скоростью, равной или превышающей ω, цепочка с него спадает.

Решение

Условием спадания цепочки с диска является равенство максимальной силы трения покоя (она же сила трения скольжения) и силы тяжести

$$\mu N = mg, \qquad (2)$$

где N— полная сила, прижимающая цепочку к диску по всему периметру.

Как и в предыдущей задаче, рассмотрим малый элемент цепочки и выделим силы, действующие на него в плоскости диска (рис. 4).

Здесь ΔN — сила реакции диска, действующая на выделенный элемент. При вращении равнодействующая сил в проекции на радиальную ось должна сообщать элементу цепочки массой $\Delta m = \lambda R \Delta\varphi$ центростремительное ускорение

$$\lambda R \Delta\varphi \omega^2 R = T\Delta\varphi - \Delta N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta N = \Delta\varphi\left(T - \lambda\omega^2 R^2\right). \qquad (3)$$

Просуммировав последнее выражение по всему периметру окружности, найдем полную прижимающую силу N, действующую на цепочку

$$N = \sum \Delta N = 2\pi\left(T - \lambda\omega^2 R^2\right) =$$

$$= 2\pi T - m\omega^2 R \qquad (4)$$

С учетом (2) выражение для граничного значения коэффициента трения μ, меньше которого цепочка на диске не удерживается, выглядит так:

$$\mu = \frac{mg}{2\pi T - m\omega^2 R}.$$

Из этой формулы видно также, что при угловой скорости, превышающей $\sqrt{\dfrac{2\pi T}{mR}}$, цепочке принципиально невозможно удержаться на диске.

Задача 4 [5, 6]

Длинная тонкая цепочка перекинута через блок так, что ее правая часть свисает до пола, а левая лежит, свернувшись клубком, на уступе вы-

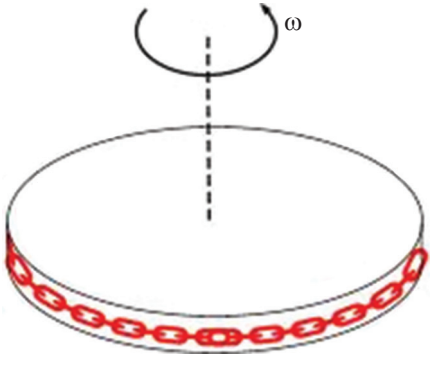


Рис. 3

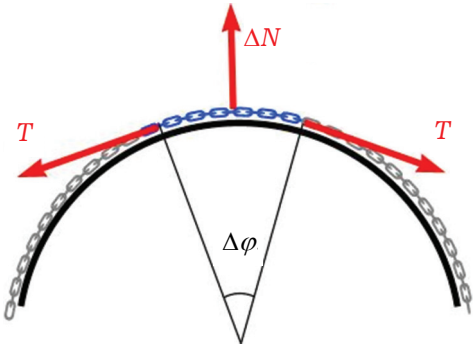


Рис. 4

сотой H (рис. 5). Цепочку отпускают, и она приходит в движение. Найдите скорость установившегося равномерного движения цепочки. Блок идеальный, цепочка неупругая.

Решение

Проанализируем ситуацию и постараемся понять, почему должно существовать установившееся равномерное движение цепочки. Отметим, что масса движущейся цепочки все время одна и та же. В начальный момент времени силой, приводящей цепочку в движение, является сила тяжести нескомпенсированного правого участка длиной H, а сила натяжения в нижних точках вертикальных частей цепочки отсутствует. По мере того, как цепочка набирает скорость, на левом конце (на высоте уступа) возникает сила натяжения, связанная с тем, что сообщается импульс новым вовлекаемым в движение звеньям цепочки. Наличие этой, возрастающей по мере набора скорости силы, приводит к уменьшению модуля ускорения вплоть до установления равномерного движения.

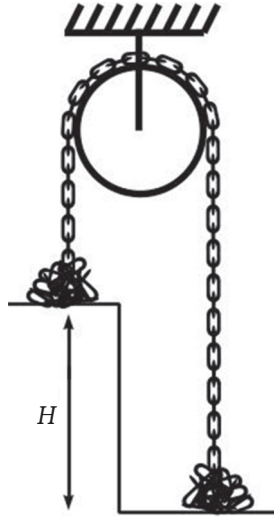


Рис. 5

При равномерном движении цепочки сила натяжения ее правой части на уровне уступа равна силе тяжести нижнего отрезка цепи

$$T_{\text{прав}} = \lambda H g. \qquad (5)$$

Сила натяжения цепочки слева на этом же уровне должна обеспечивать разгон до установившейся скорости v нового участка цепочки массой $\Delta m = \lambda \cdot v \Delta t$ (сообщение ему импульса).

$$T_{\text{лев}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \lambda v^2. \qquad (6)$$

Поскольку движение цепочки равномерное, то силы ее натяжения на одном уровне слева и справа должны быть равны. Окончательно скорость установившегося движения

$$v = \sqrt{gH} \qquad (7)$$

Следует отметить, что, кроме силового, эта задача имеет и элегантное энергетическое решение.

При установившемся движении цепочки за промежуток времени Δt работа силы тяжести $A_{\text{тяж}} = \lambda g H v \Delta t$ должна быть равна выделившемуся за это же время количеству теплоты, поскольку при установившемся движении не происходит изменения кинетической энергии.

Тепло выделяется, во-первых, при неупругом ударе звеньев о стол в правой части цепочки (в тепло переходит кинетическая энергия остановившихся звеньев

$$Q_{\text{прав}} = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{\lambda v \Delta t v^2}{2}).$$

Во-вторых, тепло выделяется при разгоне покоившихся звеньев до установившейся скорости на конце левой части цепочки. Факт выделения тепла здесь неочевиден, и для того, чтобы убедиться в этом, запишем выражение для работы силы натяжения $T_{лев}$ при подъеме кусочка цепи с уступа в левой части $\lambda v^2 \cdot v\Delta t$. Затем сравним его с набранной кусочком кинетической энергией

$$\frac{\lambda v\Delta t \cdot v^2}{2}.$$

Разность этих величин равна выделяющемуся теплу в левой части

$$Q_{лев} = \frac{\lambda v\Delta t v^2}{2}.$$

Таким образом, полное выделяющееся тепло равно

$$Q = Q_{лев} + Q_{прав} = \lambda v\Delta t v \ .$$

После приравнивания его к работе силы тяжести, получаем результат (7).

Задача 5 [5, 7]

Цепочку длиной L и массой m кладут на гладкую сферическую поверхность радиусом R (рис. 6), причем вначале цепочку удерживают за верхний конец, прикладывая горизонтальную силу F в верхней точке сферы, а затем отпускают. Определите значение силы F. Определите ускорение цепочки в момент отпускания.

Решение

Изобразим силы, действующие на произвольный малый элемент цепочки длиной Δl и массой $\Delta m = \lambda\Delta l$ (рис. 7). Здесь φ — угол, под которым этот кусочек расположен к горизонтали, а $\Delta T = T_2 - T_1$ — разность сил натяжения на его краях.

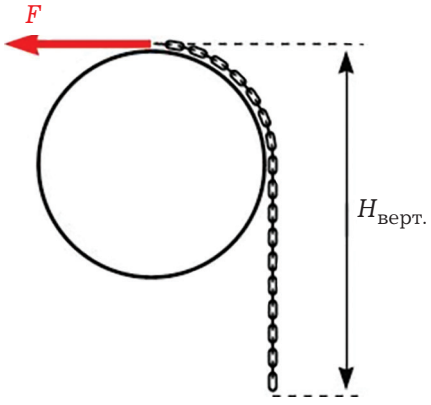


Рис. 6

Тогда второй закон Ньютона в проекции на касательную к цепочке для этого элемента запишется в виде

$$\Delta m\, a = \Delta T + \Delta m g \sin\varphi \text{ или}$$

$$\lambda\Delta l \cdot a = \Delta T + \lambda g \Delta l \sin\varphi, \qquad (8)$$

где a — тангенциальное ускорение, которое в силу нерастяжимости цепочки одинаково для всех ее элементов.

Выразим из последнего уравнения T и учтем, что $\Delta l \sin\varphi = \Delta h$ — проекция длины рассматриваемого элемента на вертикаль

$$\Delta T = \lambda\Delta l \cdot a - \lambda g \Delta h \qquad (9)$$

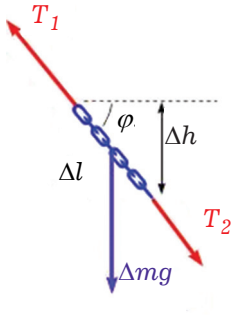


Рис. 7

Просуммируем уравнения (9) для всех элементов цепочки. $\sum \Delta T$ даст разность сил натяжения на концах цепочки, $\sum \Delta l = L$, а $\sum \Delta h = H_{\text{верт}}$ даст расстояние по вертикали между концами цепочки (см. рис 6).

Когда цепочку удерживают, ее ускорение $a = 0$, а $\sum \Delta T = 0 - F$ (на свободном конце сила натяжения равна нулю), так что

$$F = \lambda g H_{\text{верт}} \qquad (10)$$

Для нахождения ускорения учтем, что после отпускания цепочки из-за наличия двух свободных концов $\sum \Delta T = 0$, поэтому

$$a = g\frac{H_{\text{верт}}}{L} \qquad (11)$$

Чтобы получить окончательные ответы необходимо рассмотреть два случая:

I. Цепочка полностью лежит на сфере:

$$L < \frac{\pi R}{2}.$$

II. Цепочка свисает со сферы:

$$L > \frac{\pi R}{2}.$$

В первом случае

$$H_{\text{верт}} = R\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right)$$

и

$$F_I = \lambda g R\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right)$$

и

$$a_I = g\frac{R}{L}\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right). \qquad (12)$$

Во втором случае

$$H_{\text{верт}} = R + \left(L - \frac{\pi R}{2}\right)$$

$$F_{II} = \lambda g\left(R + L - \frac{\pi R}{2}\right)$$

и

$$a_{II} = g\frac{R + L - \frac{\pi R}{2}}{L}. \qquad (13)$$

Задача 6 [7]

Однородную цепочку массой m и длины L поместили на гладкую сферическую поверхность радиусом $R = 4L$ так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. Верхний конец цепочки освобождают. Найдите наибольшую величину силы натяжения цепочки сразу после ее освобождения. *Указание:* для рассматриваемых в задаче углов считать

$$\sin\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Решение

Поскольку сразу после отпускания цепочки оба ее конца являются свободными, то сила натяжения цепочки в этих точках равна нулю. Это означает, что где-то между этими точками сила натяжения достигает максимума (сначала возрастая от 0 до $T_{\max}$, а затем снова убывая до нуля). Из геометрии понятно, что вся цепочка соприкасается со сферой, то есть реализуется случай *I* из предыдущей задачи (рис. 8).

Рассчитаем тангенциальное ускорение звеньев цепочки в начальный момент времени, исходя из формулы (12).

$$a = g\frac{4L}{L}\left(1 - \cos\frac{L}{4L}\right) = 4g\left(1 - \cos\frac{1}{4}\right) \approx$$

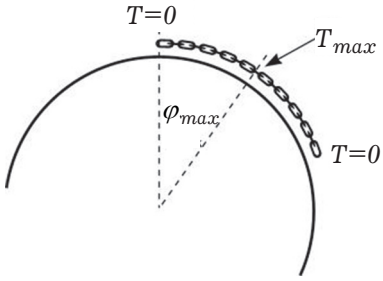


Рис. 8

$$\approx 4g\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\right)=\frac{g}{8}. \qquad (14)$$

При этом использование приближения из условия задачи для расчета косинуса вносит ошибку только в третьем знаке после запятой.

Найдем положение точки с максимальным натяжением (то есть определим направление на эту точку из центра сферы $\varphi_{\max}$). Для малого кусочка цепочки вблизи такой точки в силу условия экстремальности разность сил натяжения на краях $\Delta T = 0$. Из формулы (8) в решении предыдущей задачи с учетом того, что $\Delta l = R\Delta\varphi$

$$\Delta T = 0 = \lambda R\left(a - g\sin\varphi_{\max}\right)\Delta\varphi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a - g\sin\varphi_{\max} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\varphi_{\max} = \frac{1}{8}. \qquad (15)$$

Ясно, что этот угол $\varphi_{\max}$ тоже невелик, а значит можно пользоваться приближением в условии задачи:

$$\varphi_{\max} \approx \sin\varphi_{\max} = \frac{1}{8}$$

(отличие от истинного результата тоже только в третьем знаке).

Просуммируем теперь уравнения (8) для всего верхнего кусочка цепи, масса которого $\lambda R\varphi_{\max}$, в интервале $(0;\varphi_{\max})$:

$$\lambda R\varphi_{\max}\cdot a =$$

$$= \left(T_{\max} - 0\right) + \lambda Rg\cdot\sum\left(\Delta\varphi\cdot\sin\varphi\right) =$$

$$= T_{\max} - \lambda Rg\cdot\Delta\left(\cos\varphi\right) \qquad (16)$$

В основе последнего преобразования — формула производной

$$\frac{d\left(\cos\varphi\right)}{d\varphi} = -\sin\varphi.$$

Отсюда

$$T_{\max} =$$

$$= \lambda R\varphi_{\max}\cdot a + \lambda Rg\left(\cos\varphi_{\max} - \cos 0\right) =$$

$$= 4\lambda Lg\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{128}\right) = \frac{mg}{32}. \qquad (17)$$

Задача 7 [8]

Однородную цепочку длиной $L = 1$ м и массой $m = 1$ кг удерживают в покое за верхний конец так, что 1/3 цепочки находится на столе, а 2/3 свисает (рис. 9). В некоторый момент цепочку перестают удерживать и начинают втаскивать на стол, прикладывая силу F = 8 Н вдоль

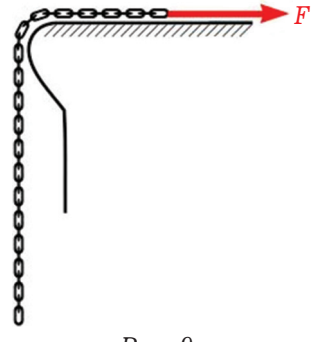


Рис. 9

горизонтальной поверхности стола. Трением о стол пренебречь. Найти ускорение цепочки в начальный момент ее движения, а также скорость цепочки в момент, когда она полностью окажется на столе.

Решение

Мысленно разрежем цепочку у края стола и соединим ее части невесомой и нерастяжимой нитью. Тем самым мы сведем исходную задачу о длинной цепочке к классической задаче о движении двух связанных тел (рис. 10).

Система уравнений движения для этих тел имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{3}ma = F - T \\ \frac{2}{3}ma = T - \frac{2}{3}mg \end{cases} \qquad (18)$$

Исключая из этой системы T, получим ускорение

$$a = \frac{F}{m} - \frac{1}{3}g \approx 1{,}3\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \qquad (19)$$

Для определения скорости цепочки воспользуемся законом сохранения энергии. Работа внешней силы F по полному втаскиванию цепочки на стол $A = F \cdot \frac{2}{3}L$ идет на изменение потенциальной энергии цепочки и появление у нее кинетической энергии. Потенциальную энергию удобно отсчитывать от уровня стола. У горизонтальной части она в этом случае равна нулю, а у вертикальной в начальном состоянии равна

$$\left(-\frac{2}{3}mg\frac{1}{3}L = -\frac{2}{9}mgL\right),$$

поскольку центр масс свисающей части расположен на $\frac{1}{3}L$ ниже стола. Из закона сохранения энергии выразим скорость цепочки

$$F \cdot \frac{2}{3}L = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{9}mgL \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4}{3}L\left(\frac{F}{m} - \frac{g}{3}\right)} \approx 2{,}5\ \text{м/с} \qquad (20)$$

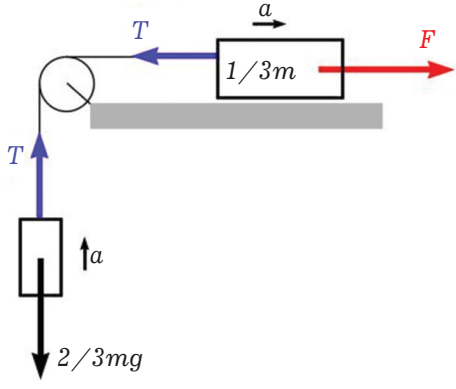


Рис. 10

Задача 8 [5, 6]

Цепочка массы m и длиной L подвешена за концы к потолку так, что вблизи точек подвеса она образует с горизонталью угол α (рис. 11). Определите силу натяжения цепочки в ее нижней точке и в точках подвеса, а также стрелу провиса H, то есть расстояние от нижней части цепочки до потолка.

Решение

Изобразим силы, действующие, например, только на левую половину цепочки (массы $\frac{m}{2}$) (рис. 12). По-

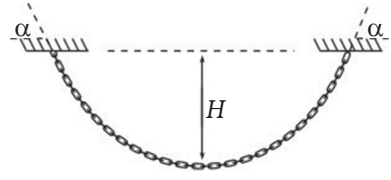


Рис. 11

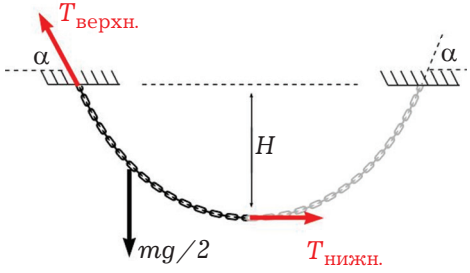


Рис. 12

скольку цепочка находится в покое, то уравнения равновесия в проекции на горизонталь и вертикаль будут выглядеть так

$$\begin{cases} T_{верх} \cdot \cos\alpha = T_{нижн} \\ T_{верх} \cdot \sin\alpha = \dfrac{mg}{2} \end{cases} \qquad (21)$$

Решение этой системы дает сразу

$$\begin{cases} T_{нижн} = \dfrac{mg}{2\operatorname{tg}\alpha} \\ T_{верхн} = \dfrac{mg}{2\sin\alpha} \end{cases} \qquad (22)$$

Для определения вертикальной стрелы провиса поступим аналогично тому, как это делали в задаче 5. Запишем уравнение равновесия для произвольного малого кусочка в проекции на касательную к цепочке и затем просуммируем эти уравнения для всех кусочков одной половины.

$$T_1 = T_2 + \Delta mg\sin\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \Delta mg\sin\varphi =$$

$$= \lambda g\Delta l\sin\varphi = \lambda g\Delta h. \qquad (23)$$

После суммирования уравнений:

$$T_{верхн} - T_{нижн} = \lambda gH \qquad (24)$$

Сделав подстановку (22), получим окончательно для стрелы провиса

$$H = \frac{L}{2}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (25)$$

Проверка соответствия результатов (22) и (25) предельным случаям предоставляется читателю.

Задача 9 [5]

Цепочку длиной L закрепили за концы на разных уровнях. Оказалось, что у одного конца цепочка образует с горизонталью угол α, а у другого — угол β. На сколько первый конец цепочки выше второго?

Решение

В этой задаче нижняя точка цепи разбивает ее уже на две неравные части. Повторяя описанный в предыдущей задаче алгоритм записи уравнений равновесия для обеих частей цепочки (см. рис. 13), найдем величины сил в левой и правой точках крепления и в нижней точке

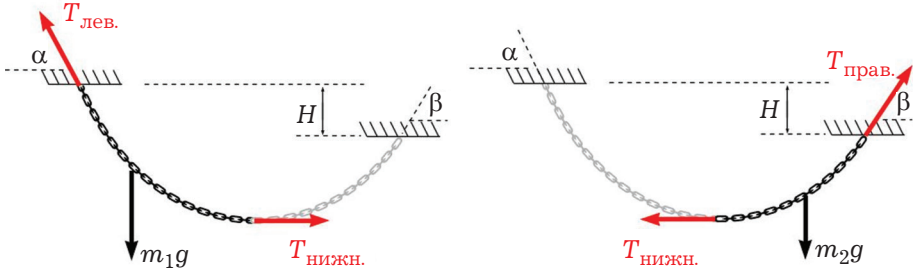


Рис. 13

$$\begin{cases} T_{\text{лев}} \cdot \cos\alpha = T_{\text{нижн}} \\ T_{\text{лев}} \cdot \sin\alpha = m_1 g \\ T_{\text{прав}} \cdot \cos\beta = T_{\text{нижн}} \\ T_{\text{прав}} \cdot \sin\beta = m_2 g \end{cases} \qquad (26)$$

Здесь m_1 и m_2 — массы левой и правой частей.

С учетом того, что полная масса цепочки $m_1 + m_2 = m$, удобно из (26) вначале выразить массы частей цепочки:

$$_1 = \frac{\cdot \operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}$$

и

$$m_2 = \frac{m \cdot \operatorname{tg}\beta}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)},$$

а затем и силы на краях цепочки:

$$\begin{cases} T_{\text{лев}} = \dfrac{mg}{\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} = \dfrac{mg\cos}{\sin(\alpha+\beta)} \\ T_{\text{прав}} = \dfrac{mg}{\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} = \dfrac{mg\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \end{cases} \qquad (27)$$

После записи уравнения равновесия (23) для произвольного кусочка и суммирования по всей длине цепи получим:

$$T_{\text{лев}} - T_{\text{прав}} = \lambda g H \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{L(\cos\beta - \cos\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (28)$$

Задача 10 [9]

На краю гладкого стола кучкой лежит идеальная цепочка. В какой-то момент времени начальные звенья цепочки без толчка начинают соскальзывать вниз, увлекая за собой постепенно остальную часть цепочки. Как меняется со временем длина свешивающейся части цепочки?

Решение

За начало отсчета времени примем момент начала движения. Спустя какое-то время длина свешивающейся части цепочки равна x, а

$$v = \frac{dx}{dt} = x' \ —$$

скорость движения этой части[1].

Сила натяжения T цепочки у края стола за малый промежуток времени dt сообщает импульс очередному (покоившемуся до сих пор) участку цепи длиной dx:

$$T = \frac{dp}{dt} = \frac{\lambda \cdot dx \cdot v}{dt} = \lambda v^2 = \lambda x'^2 \qquad (29)$$

Повторим идеологию суммирования уравнения (9), записав второй закон Ньютона для всей свешивающейся части, масса которой равна λx (на эту часть действуют две противоположно направленные силы — сила тяжести и сила T)

$$\lambda x \cdot x'' = \lambda x g - \lambda x'^2 \qquad (30)$$

Уравнение движения можно было бы оставить и в таком виде, но лучше переписать его в более компактной форме. Сократим λ и перенесем квадрат скорости в правую часть.

$$x \cdot x'' + x'^2 = xg \qquad (31)$$

---

[1] Здесь в качестве обозначения производной, как принято в школьной программе, выбран штрих, тогда как в физике для обозначения производной по времени используют точку над величиной. Так что, скорость $v = \dfrac{dx}{dt} = x' = \dot{x}$, а ускорение $a = v' = x'' = \ddot{x}$.

Учтем, что в силу правила взятия производной произведения

$$\left(x\cdot x'\right)' = x\cdot x'' + x'^2,$$

и, кроме того

$$x\cdot x' = \frac{1}{2}\left(x^2\right)'.$$

Выполнив все подстановки, окончательно получим уравнение движения

$$\left(x^2\right)'' = 2gx \qquad (32)$$

Подстановка $x = \frac{at^2}{2}$ превращает уравнение (32) в верное равенство при условии, что $a = \frac{g}{3}$. Отсюда следует вывод, что движение конца цепочки происходит с постоянным ускорением, равным $\frac{g}{3}$, а, значит, длина свешивающейся части цепочки меняется со временем по закону

$$\frac{at^2}{2} = \frac{gt^2}{6}.$$

Нужно отметить, что если бы в момент начала движения длина свешивающейся части цепочки была отлична от нуля, то вывод о равноускоренном движении конца цепочки все равно бы сохранился. В самом деле, пусть в начальный момент времени цепочка свисает от края стола на величину x_0. Если отсчитывать координату конца цепочки от этой точки, то уравнение движения (30) немного изменится

$$\lambda\left(x + x_0\right)x'' = \lambda\left(x + x_0\right)g - \lambda x'^2 \qquad (33)$$

Введем новую переменную $y = x + x_0$. Тогда $y' = x'$, $y'' = x''$ и уравнение движения примет тот же вид, что и раньше

$$\lambda y\cdot y'' = \lambda yg - \lambda y'^2, \qquad (34)$$

а значит и его решение будет тоже соответствовать равноускоренному движению с тем же ускорением

$$a = \frac{g}{3}.$$

Литература

1. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. — М.: АСТ: Астрель, 2006. — 992 с.
2. Математические этюды [Электронный ресурс] // URL: https://etudes.ru
3. Майер В. В. Полное отражение света в простых опытах. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 128 с.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. I. Механика. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. — 560 с.
5. Черноуцан А. И. Задачи с распределенной массой // Квант. — 1998. — № 2. — с. 46–48.
6. Воробьев И. И. и др. Задачи по физике: Учебное пособие. Под ред. О. Я. Савченко. 4-е изд., исправленное. — СПб.: Лань, 2001. — 368 с.
7. Плис В. А. О динамике криволинейного движения // в сб. Приложение к журналу Квант. № 1. — 2009. — с. 102–112.
8. Методическое пособие по физике для поступающих в вузы / Под ред. Чешева Ю. В. — М.: Физматкнига, 2006. — 288 с.
9. Заключительный тур олимпиады «Росатом» по физике, 2020–2021 [Электронный ресурс] // URL: https://olymp.mephi.ru/content/public/uploads/files/rosatom/2021/ / tasks/rosatom_2020–21_physics_11_2.pdf