

Мукушев Базарбек Агзашулы
профессор Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина, доктор педагогических наук, г. Астана, Республика Казахстан

Решение физических задач посредством метода индукции

В научном и учебном познании окружающего мира широко используется метод, основанный на индуктивных рассуждениях. Этот метод называется методом индукции и относится к общенаучным методам исследования. Метод индукции успешно применяется в физических исследованиях, особенно в экспериментальной физике.

Статья посвящена раскрытию эвристических функций метода индукции в процессе решения учебных физических задач.

Введение

Термин «индукция» (лат. inductio) означает «наведение», а индуктивными называют выводы, сделанные на основе наблюдений и опытов, т.е. полученные путем рассмотрения частных случаев и последующего распространения замеченных закономерностей на общий случай.

Роль метода индукции особенно значительна в экспериментальной физике. Обобщая достаточно большое количество опытных данных, экспериментаторы делают научные выводы и утверждения. Этот этап в математической науке называется *базисом индукции* или *неполной индукцией*.

Неполная индукция, основанная на экспериментальных исследованиях и включающая теоретическое обоснование, способна давать достоверное заключение. По словам известного французского физика Луи де Бройля, индукция, поскольку она стремится раздвинуть уже существующие границы мысли, является истинным источником действительно научного прогресса. Великие открытия, скачки научной мысли вперед создаются, в конечном счете, индукцией – рискованным, но важным творческим методом [1]. Индукция рассматривается в общенаучном масштабе как метод познания, как совокупность последовательных мыслительных операций, в результате которых осуществляется мышление от менее общих утверждений к более общим.

Метод индукции оказывается полезным и при решении учебных физических задач. С помощью индуктивного рассуждения устанавливается некая закономерность или формула на основе обобщения результатов трех или более частных случаев. Нами отобран ряд задач, при решении которых индукция выступает как эвристический прием их решения. Не исключено, что эти задачи имеют и другие способы решения.

Задача 1. За какое время тело, свободно падающее без начальной скорости, проходит десятый метр своего пути?

Решение. Очевидно, длина десятого метра пути тела равна 1 метру. Значит, $h_1 = 1$ м, $h_2 = 1$ м, $h_3 = 1$ м, ... , $h_{10} = 1$ м. Следовательно, $h_1 + h_2 + h_3 + ... + h_{10} = 10$ м. Обозначим через t_1, t_2, t_3, ..., t_{10} численные значения времени, затраченные на прохождение телом этих участков.

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2} t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \text{ или } t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{1} - \sqrt{0}\right)$$

$h_2 = \upsilon_1 t_2 + \frac{gt_2^2}{2}$, где υ_1 начальная скорость тела, когда он проходит участок h_2 : $\upsilon_1 = gt_1$.

Поскольку $h_1 = h_2$, напишем:

$$\frac{gt_1^2}{2} = \upsilon_1 t_2 + \frac{gt_2^2}{2} \Rightarrow \frac{gt_1^2}{2} = gt_1 t_2 + \frac{gt_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$t_1^2 + 2t_1 t_2 - t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 = t_1\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right).$$

Для третьего участка:

$$h_3 = \upsilon_2 t_3 + \frac{gt_3^2}{2} \upsilon_2 = \upsilon_1 + gt_2 = g(t_1 + t_2).$$

Следовательно,

$$\frac{gt_1^2}{2} = \upsilon_2 t_3 + \frac{gt_3^2}{2} \Rightarrow t_3^2 + 2(t_1 + t_2)t_3 - t_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow t_3 = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right).$$

Анализируя выражения для t_1, t_2, t_3 и используя метод индукции напишем следующую формулу:

$$t_n = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$

За это время свободно падающее тело проходит n-ый метр пути.

Следовательно,

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2}{9{,}8}}\left(\sqrt{10} - \sqrt{9}\right) \approx 0{,}073 \text{ с}.$$

Задача 2. Небольшое упругое тело скользит со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости, приближаясь к щели (рис. 1). Щель образована двумя отвесными параллельными стенками, находящимися на расстоянии d = 5 см друг от друга. Глубина щели H = 1 м. Определите, сколько раз ударится тело о стенки, прежде чем упадет на дно. Удары о стенки абсолютно упругие. Считать, что g=9,8 м/с^2.

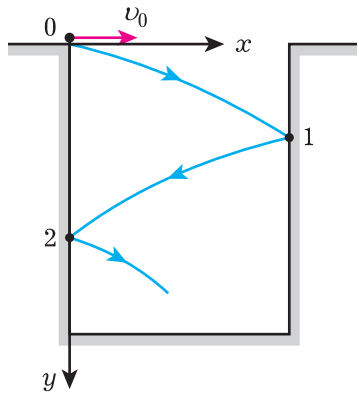


Рис. 1

Решение. При упругих ударах о стенки щели угол отражения равен углу падения, а время полета тела между стенками t постоянно и равно

$$t = \frac{d}{\upsilon_0}.$$

Первый удар произойдет на глубине $h_1 = \upsilon_1 t + \frac{gt^2}{2}$, второй – на глубине $h_2 = \upsilon_2 t + \frac{gt^2}{2}$ от точки первого удара, третий – на глубине $h_3 = \upsilon_3 t + \frac{gt^2}{2}$ от точки второго удара и т.д.

На основе индуктивного рассуждения напишем следующие значения вертикальных составляющих скорости тела: $\upsilon_1 = 0$, $\upsilon_2 = gt$, $\upsilon_3 = 2gt$, ..., $\upsilon_n = (n\text{-}1)gt$. Здесь n – номер удара.

Очевидно, что $h_1 + h_2 + ... + h_n = H$ или

$$(\upsilon_1 + \upsilon_2 + ... + \upsilon_n)t + n\frac{gt^2}{2} = H$$

Далее последовательно имеем

$$(g + 2gt + 3gt + ... + (n-1)gt)t + + n\frac{gt^2}{2} = H,$$

$$gt^2(1 + 2 + 3 + ... + (n-1)) + + n\frac{gt^2}{2} = H, ...,$$

$$..., \frac{gt^2}{2}n(n-1) + n\frac{gt^2}{2} = H.$$

Отсюда получаем

$$n = \sqrt{\frac{2H}{gt^2}} = \frac{\upsilon_0}{d}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 90{,}3.$$

Так как n натуральное число, то $n = 90$. Тело ударится о стенки щели 90 раз.

Задача 3. Мяч свободно падает с высоты $h = 0{,}1$ м на наклонную доску, составляющую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Мяч, подпрыгивая, перемещается по доске (рис. 2). Найти расстояние между точками девятого и десятого удара мяча о доску. Соударения мяча с доской рассматривать как абсолютно упругие.

Решение. Нам нужно найти расстояния между точками первого и второго ($L_{1,2}$), второго и третьего

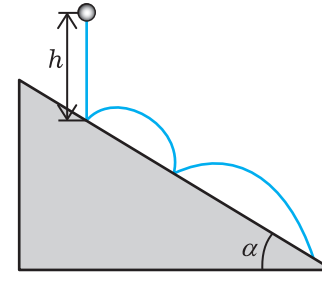


Рис. 2

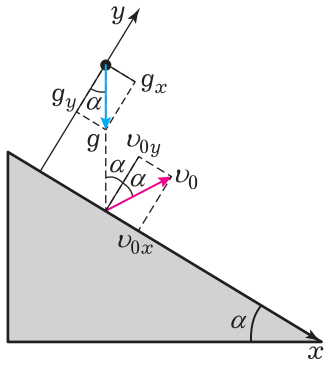


Рис. 3

($L_{2,3}$), третьего и четвертого удара ($L_{3,4}$). Для удобства решения задачи, оси координат направим вдоль доски и перпендикулярно к ней (рис. 3). В этом случае проекции ускорения мяча на оси x и y будут соответственно равны $a_x = g_x = g\sin\alpha$ $a_y = g_y = -g\cos\alpha$.

Скорость мяча в момент первого соударения с доской равна $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$. Начальная скорость мяча после первого соударения равна υ_0 и образует с осью угол α, а проекции скорости мяча равны:

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\alpha \text{ и } \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cos\alpha.$$

Расстояние между точками первого и второго соударений мяча с доской равно

$$L_{1,2} = (\upsilon_0 \sin\alpha)t_1 + \frac{(g\sin\alpha)t_1^2}{2},$$

где t_1 – время полета мяча. Это время определяется уравнением

$$(\upsilon_0 \cos\alpha)\, t_1 - \frac{(g\cos\alpha)t_1^2}{2} = 0.$$

Отсюда $t_1 = 2\upsilon_0/g$ и $L_{1,2} = 8h\sin\alpha$. Скорость мяча к моменту второго соударения определяется равенствами

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_{0x} + a_x t_1 = \upsilon_0 \sin\alpha + (g\sin\alpha)t_1 = 3\upsilon_0 \sin\alpha,$$

$$\upsilon_{1y} = \upsilon_{0y} + a_y t_1 = \upsilon_0 \cos\alpha - (g\cos\alpha)t_1 = -\upsilon_0 \cos\alpha,$$

После второго соударения эти скорости равны

$$\upsilon_{2x} = \upsilon_{1x},\ \upsilon_{2y} = -\upsilon_{1y} = \upsilon_0 \cos\alpha = \upsilon_{0y}$$

Расстояние между точками второго и третьего соударений равно

$$L_{2,3} = (3\upsilon_0 \sin\alpha)\, t_2 + \frac{(g\sin\alpha)t_2^2}{2},$$

где t_2 – время полета. Так как начальная скорость вдоль оси y та же, что и при первом соударении, то $t_2 = t_1$. Поэтому $L_{2,3} = 16\ h\ \sin\alpha$. Аналогично можно показать, что $L_{3,4} = 24\ h\ \sin\alpha$. Опираясь на метод индукции, напишем

$$L_{n,\,n+1} = 8\ n\ h\ \sin\alpha.$$

Следовательно,

$$L_{9,10} = 8 \cdot 9 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 30^\circ = 3{,}6 \text{ м}.$$

Задача 4. Поршневой насос при каждом качании захватывает объем V_0 воздуха (рис. 4). Когда поршень начинает движение слева направо, открывается клапан a, и часть массы воздуха окажется в цилиндре поршня. При движении справа налево, закрывается клапан a и открывается клапан b, через который

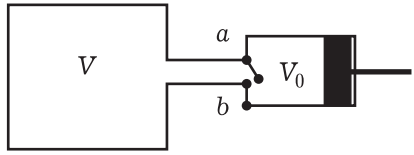


Рис. 4

газ и покидает систему. При откачке этим насосом воздуха из сосуда объема V насос совершил n качаний. Найти установившееся давление в сосуде. Начальное давление во внутри сосуда P_0. Процесс изотермический.

Решение. После одного качания давление в сосуде станет равным $P_1 = \frac{P_0 V}{V + V_0}$, после второго качания $P_1 V = P_2 (V + V_0)$ и, следовательно, $P_2 = \frac{P_0 V}{(V + V_0)^2}$, после третьего $P_3 = \frac{P_0 V}{(V + V_0)^3}$. После n качаний давление в сосуде станет:

$$P_n = \frac{P_0 V}{(V + V_0)^n}.$$

Задача 5. Имеются 20 клемм, каждая из них соединена со всеми остальными клеммами одинаковыми резисторами, сопротивление которых равно 10 Ом. Найти сопротивление между любыми двумя клеммами.

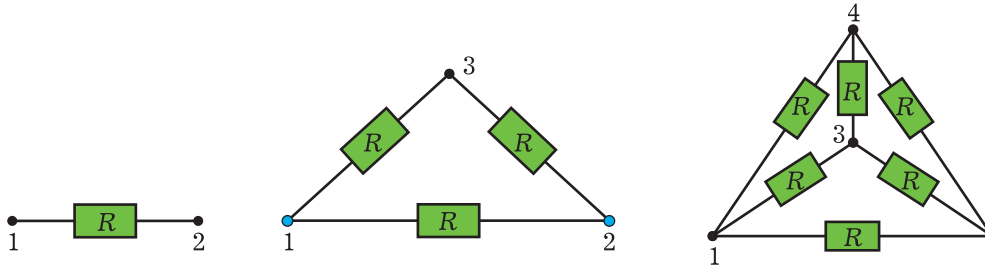
Решение. Вначале берем две клеммы, $n = 2$ (случай, одной клеммы не имеет физического смысла, рис. 5а). Сопротивление между ними $R_2 = R$. Берем три клеммы (рис. 5б). Сопротивление между клеммами 1 и 2

$$R_3 = \frac{2R}{3}.$$

Берем четыре клеммы (рис. 5в). Подключим источник тока к клеммам 1 и 2. Поскольку в точках 3 и 4 потенциалы одинаковы, через резистор соединяющий эти клеммы, ток не идет. Следовательно, можно его убрать. Таким образом, $R_4 = \frac{R}{2} = \frac{2R}{4}$.

Обобщая результаты $\left(R_2 = \frac{2R}{2}; \; R_3 = \frac{2R}{3}; \; R_4 = \frac{2R}{4}\right)$, находим общую формулу для сопротивления между любыми двумя клеммами: $R_n = \frac{2R}{n}$ $(n > 2)$.

Итак, $R_{20} = \frac{2 \cdot 10}{20} = 1$ Ом.



а) *б)* *в)*

Рис. 5

Задача 6. Имеется электрическая цепь, содержащая 10 контактов. Каждая пара этих контактов соединена конденсатором электроемкостью 10 мкФ. Какая электроемкость будет обнаружена при измерении между двумя любыми контактами.

Решение. Задача решается аналогично задаче 5. Читатель может решать задачу самостоятельно.

Ответ: $C_n = \frac{nC}{2}$ $(n > 2)$.

Итак, $C_{10} = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10$ мкФ.

Задача 7. Конденсатор емкости $C_0 = 20$ мкФ заряжают до разности потенциалов $U_0 = 400$ В и подключают к конденсатору емкости $C = 1$ мкФ, в результате чего последний заряжается. Отключив этот конденсатор, заряжают таким же образом второй конденсатор той же емкости ($C = 1$ мкФ), третий и т.д. Затем конденсаторы соединяют последовательно. Какую максимальную разность потенциалов можно получить таким образом?

Решение. Начальный заряд конденсатора $q_0 = C_0 U_0$. После подключения первого конденсатора заряд q_0 распределится между C_0 и C. После отсоединения C от C_0 на обоих конденсаторах установится разность потенциалов равная

$$U_1 = \frac{q_0}{C_0 + C} = \frac{C_0 U_0}{C_0 + C}.$$

Оставшийся заряд на конденсаторе C_0 равен: $q_1 = C_0 U_1 = \frac{C_0^2 U_0}{C_0 + C}$.

При зарядке второго конденсатора напряжение на обоих конденсаторах (C_0 и C) становится равным

$$U_2 = \frac{q_1}{C_0 + C} = U_0 \left(\frac{C_0}{C_0 + C} \right)^2,$$

а после подключения третьего конденсатора $U_3 = U_0 \left(\frac{C_0}{C_0 + C} \right)^3$.

Очевидно, $U_n = U_0 \left(\frac{C_0}{C_0 + C} \right)^n$. Далее напишем формулу максимальной разности потенциалов в виде бесконечного числового ряда, образованного из членов убывающей геометрической прогрессии:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n =$$

$$= U_0 \left(\frac{C_0}{C_0 + C} + \left(\frac{C_0}{C_0 + C} \right)^2 + \left(\frac{C_0}{C_0 + C} \right)^3 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{C_0}{C_0 + C} \right)^n \right).$$

Просуммировав эту геометрическую прогрессию, получим:

$$U = \frac{C_0 U_0}{C} = 8000 \text{ В}.$$

Задача 8. Интенсивность звука (шума) за стеной составляет 10 Вт/м^2 (порог болевого ощущения). Стена сооружена из звукопоглощающего материала. Какая должна быть толщина стены, чтобы в помещении сохранилась допустимая норма интенсивности звука (10^{-10} Вт/м^2), если

интенсивность звука через каждый 1 мм материала убывает на 10%?

Решение. Мысленно разделим стену на слои толщиной 1 мм. После прохождения первого слоя интенсивность звука составляет $I_1 = I_0(1 - \beta)$, где $I_0 = 10$ Вт/м^2; $\beta = 0{,}1$. Аналогично, после прохождения второго слоя $I_2 = I_1(1 - \beta) = I_0(1 - \beta)^2$, после прохождения третьего слоя $I_3 = I_2(1 - \beta) = I_0(1 - \beta)^3$. Тогда для n-го слоя $I_n = I_0(1 - \beta)^n$. Отсюда

$$n = \frac{\lg \frac{I_n}{I_0}}{\lg(1-\beta)} = \frac{\lg 10^{-11}}{\lg(1-0{,}1)} \approx 240.$$

Таким образом, искомая толщина стены равна 240 мм.

Литература

1. Карпенков С.Х. Концепции современного естествознания. Учебник для вузов.- М.: Высш. шк.,. 2014.- 488 с.
2. Рымкевич А.П., Рымкевич П.А. Сборник задач по физике. М.: Просвещение, 2002. -192 с.
3. Сборник задач по физике / Под ред. С.М.Козела. М.: Наука, 1983. – 306 с.
4. Буховцев Б.Б. и др. Сборник задач по физике. М.: Наука, 1974. -416 с.
5. Мукушев Б.А. Движение упругого тела с отскоком // Квант. – 2022. – №7. – С.34-41.

НОВОСТИ

Студенты МФТИ стали абсолютными чемпионами Всероссийской студенческой олимпиады по теоретической механике



На базе Уфимского государственного нефтяного технического университета 20–24 ноября прошла Всероссийская студенческая олимпиада по теоретической механике.

Физтех представили две команды, в которые вошли студенты первого курса Роман Бурцев и Всеволод Доля и студенты второго курса Вадим Ерин и Олег Калашников. Обе команды с двукратным отрывом от ближайших соперников показали лучшие результаты в решении задач по теоретической механике и стали абсолютными победителями олимпиады.

Второе место по итогам олимпиады получили команды НГУ, ИТМО и ТГУ им. Махтумкули (Туркменистан), третье поделили между собой команды ГЭИТ, СПбГУ и УГНТУ.

За звание лучших состязались 115 студентов из 33 команд, представляющих вузы России и Туркменистана.

Участникам нужно было выполнить восемь заданий по основным разделам теоретической механики, чтобы показать свои возможности в решении сложных и нестандартных задач. Результаты оценивались в личном и командном зачетах. Для желающих проводился компьютерный конкурс.

Подготовкой сборной Физтеха к участию во Всероссийской студенческой олимпиаде по теоретической механике занималась преподаватель кафедры теоретической механики МФТИ Ульяна Монахова. Под ее руководством студенты МФТИ уже не в первый раз выигрывают соревнования.

Поздравляем ребят и их преподавателей с блестящей победой!

Источник: https://mipt.ru/news/