





**Бондаров Михаил Николаевич**
*Учитель физики лицея №1501 г. Москвы.*
*Почётный работник общего образования Российской Федерации.*

# Олимпиадная школа. Урок 2. Прямолинейное равноускоренное движение

На этом уроке рассмотрены приёмы решения олимпиадных задач на *прямолинейное равноускоренное движение*. Основное внимание уделено выбору *оптимального* способа решения, позволяющего быстро и надёжно прийти к верному ответу.

Стандартный подход к решению большинства задач по теме «Прямолинейное равноускоренное движение» («РУД»), так называемый **координатный метод**, хорошо известен. Он предполагает использование четырёх основных формул:

$$s_x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad (1)$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t, \qquad (2)$$

$$s_x = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}, \qquad (3)$$

$$s_x = \frac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2} t. \qquad (4)$$

При этом в некоторых случаях достаточно ограничиться формулами (1) и (2), в других же оказывается полезным добавление к ним формул (3) и (4). Правда, иногда такой способ решения может привести к достаточно громоздким выкладкам. Особенно в том случае, когда выбор формул окажется неудачным.

В олимпиадных задачах по данной теме нередко пользуются другими способами, и главный из них – **графический**. Итак, переходим к рассмотрению *олимпминимума* по теме «РУД», который состоит из шести задач и четырёх примеров. Большинство из них, кроме трёх последних, взяты из классических задачников и предлагались в разные годы на вузовских олимпиадах.

Начнём с классической задачи, которая позволит познакомиться сразу с несколькими олимпиадными методами решения.

**Задача 1.** За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь $s$=5 м и останавливается. Какой путь пройдёт тело за вторую секунду этого движения?

**Решение.**

**Способ 1.** Попытка решить эту задачу **координатным способом** с помощью формул (1)–(3) приводит к ответу, но этот путь нельзя назвать рациональным, поскольку он оказывается очень трудоёмким. Если же воспользоваться формулой (4), то такой подход позволит легко обойти математические трудности.

Запишем выражение для пути, пройденного за пятую секунду

$$s_{4-5} = \frac{\upsilon_4 + \upsilon_5}{2}\tau\,, \qquad (5)$$

где $\tau$ = 1 с, $\upsilon_5$ = 0. Учитывая, что его величина нам задана по условию ( $s_{4-5} = s = 5\text{м}$ ), найдём из формулы (5) скорость в конце четвёртой секунды $\upsilon_4$ = 10 м/с. Вспомним теперь, что за одинаковые промежутки времени при равноускоренном движении скорость изменяется на одинаковую величину. Тогда сразу определим скорости в конце третьей $\upsilon_3$ = 20 м/с, второй $\upsilon_2$ = 30 м/с и первой $\upsilon_1$ = = 40 м/с секунд движения. Осталось лишь вновь применить формулу (4) для пути, пройденного за вторую секунду:

$$s_{1-2} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}\tau = \frac{40+30}{2}\cdot 1 = 35\text{м}\,.$$

Таким образом, мы пришли к ответу, применив только формулу (4) и понимание характера изменения скорости при РУД.

**Способ 2.** Если вы пытались решать данную задачу с помощью первых трёх формул, то, скорее всего, столкнулись с тем, что ненулевая начальная скорость мешает упрощению преобразований и расчётов. Для того чтобы избавиться от этих трудностей, применим **метод обращения** (напомню, что мы уже знакомы с ним по первому уроку). Если записать движение тела на киноплёнку, а затем прокрутить её назад с той же скоростью, то торможение до остановки превратится в разгон с нулевой начальной скоростью и с тем же по модулю ускорением.

Давайте видоизменим условие задачи: «*Двигаясь равноускоренно без начальной скорости, тело за первую секунду прошло 5 м. Какой путь оно пройдёт за четвёртую секунду?*»

Теперь задача сведена к стандартной. Путь за четвёртую секунду равен разности путей, пройденных за четыре секунды и за три секунды:

$$s_{3-4} = s_4 - s_3 = \frac{at_4^2}{2} - \frac{at_3^2}{2} = \frac{a(t_4^2 - t_3^2)}{2}\,, \qquad (6)$$

где $t_3$ = 3 с, $t_4$ = 4 с. При этом легко записать выражение для пути, пройденного за первую секунду:

$$s = \frac{at_1^2}{2} = 5\text{м}\,. \qquad (7)$$

Поделив выражение (6) на (7), получим

$$\frac{s_{3-4}}{s} = \frac{t_4^2 - t_3^2}{t_1^2}\,,$$

откуда

$$s_{3-4} = s\frac{t_4^2 - t_3^2}{t_1^2} = 35\text{м}\,.$$

Итак, **переформулировав условие задачи**, мы существенно упростили её решение.

**Способ 3.** Очень удобно для решения задач на РУД использовать **графический способ**. Разнообразные графики будут ещё не раз помогать нам в решении других задач, а в данной построим график зависимости скорости тела от времени.

Один из первых вопросов, который встаёт перед нами при построении, – какой выбрать масштаб? Тут мы вольны поступать по своему усмотрению. Руководствуемся в первую очередь соображениями удобства. Пусть тогда одной клеточке по оси времени соответствует 1 секунда. Начальная скорость тела нам не известна, поэтому можно выбрать просто удобное количество клеток. Зададим её равной пяти условным единицам. Таким образом, у нас получится график, изображённый на рис. 1.

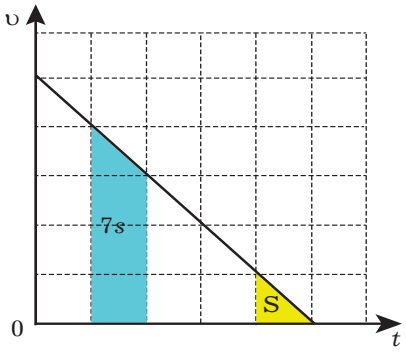



*Рис. 1*

Главное достоинство графика скорости – возможность быстро оценивать и легко рассчитывать *пройденное расстояние*, так как оно *численно равно площади под графиком*.

Выделим на рисунке цветом площади, численно равные расстояниям, пройденным за вторую и пятую секунды движения. Соотношение площадей можно определить совсем просто, например, посчитав их «по клеточкам». Пути за пятую секунду соответствует жёлтый треугольник площадью в полклетки. Выделенная синим цветом трапеция состоит из семи таких треугольников. Можно сказать, что мы практически вплотную приблизились к конечному результату. Действительно, если площади различаются в семь раз, то во столько же раз различаются и численно равные им расстояния. Итак, едва лишь взглянув на построенный график, мы мгновенно приходим к ответу:

$$s_{1-2} = 7s.$$

Очень хорошо! Возьмём на вооружение этот замечательный приём!

«Какое-то несолидное решение! – может возмутиться читатель, привыкший к классическому оформлению. – А без клеточек, более строго, можно?» Конечно! И это будет показано на примере решения других задач, которые мы рассмотрим далее.

**Способ 4.** Из графического способа плавно вытекает ещё один: **закон нечётных чисел**. Вернее, в данном случае мы имеем дело со следствием этого закона для равнозамедленного движения.

Но сначала напомним сам закон: *в равноускоренном движении без начальной скорости перемещения, совершённые телом за последовательные равные промежутки времени, относятся как последовательный ряд нечётных чисел.*

Применив *метод обращения*, можно заметить, что в данном случае мы имеем дело с обратным рядом тех же нечётных чисел. Действительно, пути, пройденные телом за 5 секунд движения, относятся как

$$s_{0-1} : s_{1-2} : s_{2-3} : s_{3-4} : s_{4-5} = 9 : 7 : 5 : 3 : 1.$$

Из этого соотношения ответ виден сразу: путь за вторую секунду в 7 раз больше пути за последнюю секунду.

Итак, у нас на вооружении имеется несколько различных приёмов. Рассмотрим теперь четыре тренировочные задачи, чтобы на их примере

показать удобство применения каждого из них. В трёх случаях я ограничусь одним, наиболее удобным, по моему мнению, способом решения, а в четвёртом приведу два способа.

**Пример 1.** От движущегося поезда отцепляют последний вагон. Поезд продолжает двигаться с той же скоростью. Как будут относиться пути, пройденные поездом и вагоном к моменту остановки вагона? Считать, что вагон двигался равнозамедленно.

**Решение.** В этой задаче удобно построить на одном рисунке два графика: 1) зависимости скорости *поезда* от времени *AB* и 2) зависимости скорости *последнего вагона* от времени *AC* (рис. 2).

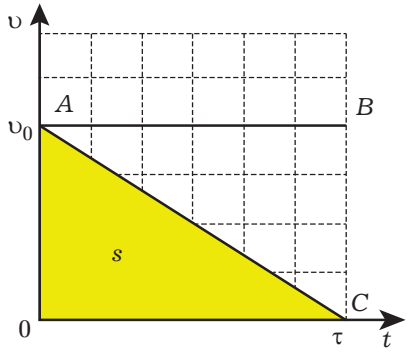



*Рис. 2*

Последний вагон проходит до остановки путь, численно равный площади треугольника *AOC*, выделенного жёлтым цветом. Из графика ясно видно, что за это же время поезд проходит вдвое больший путь, численно равный площади прямоугольника *ABCO*. Таким образом, ответ получен: искомое отношение равно 2.

**Пример 2.** Тело свободно падает с высоты $H = 270$ м. Разделить эту высоту на три части $h_1$, $h_2$, $h_3$ так, чтобы на прохождение каждой из них потребовалось одно и то же время.

**Решение.** В задаче рассматривается равноускоренное движение при нулевой начальной скорости. Тогда можно использовать **закон нечётных чисел**, т.е. $h_1 : h_2 : h_3 = 1 : 3 : 5$. Выходит, что $H = 9h_1$. Отсюда $h_1 = H/9 = 30$ м. Две другие части соответственно равны $h_2 = 90$ м и $h_3 = 150$ м.

**Пример 3.** Тело, имея начальную скорость $\upsilon_0 = 1$ м/с, двигалось равноускоренно и, пройдя некоторое расстояние, приобрело скорость $\upsilon = 7$ м/с. Какова была скорость тела на половине этого расстояния?

**Решение.** В этой задаче удобнее всего воспользоваться **формулой (3)**, в которую не входит время. Обозначив *половину* расстояния через $s$, ускорение тела через $a$, а искомую скорость через $\upsilon_1$, запишем эту формулу дважды: для первой половины

$$s = \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2}{2a}$$

и для всего пути

$$2s = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}.$$

Разделив нижнее уравнение на верхнее, получим

$$2 = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2},$$

откуда

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{\upsilon^2 + \upsilon_0^2}{2}} = 5 \text{ м/с}.$$

**Пример 4.** Тело падало с некоторой высоты и последние $s = 200$ м прошло за время $t_0 = 4$ с. С какой высоты $H$ падало тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Решение.**

**Способ 1.** Применив **метод обращения**, переформулируем условие задачи: «*Тело брошено вертикально вверх. За первые 4 с полёта оно подня-*

*лось на 200 м. Найти максимальную высоту подъёма тела».* Из формулы (1)

$$s = \upsilon_0 t_0 - \frac{g t_0^2}{2} \qquad (8)$$

найдём начальную скорость тела

$$\upsilon_0 = \frac{s}{t_0} + \frac{g t_0}{2} = 70 \text{ м/с}.$$

Теперь искомая высота определяется из формулы (3)

$$H = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = 245 \text{ м}. \qquad (9)$$

Надеюсь, что всем понятно, откуда в формуле (8) появился знак «минус» и куда исчезла конечная скорость в формуле (9). Если полного понимания пока нет, полезно проработать статью [1], в которой подробно рассмотрен *координатный* способ решения.

**Способ 2.** А что если вновь применить **графический способ**? Оказывается, в этом случае (рис. 3) ответ получить можно практически устно.

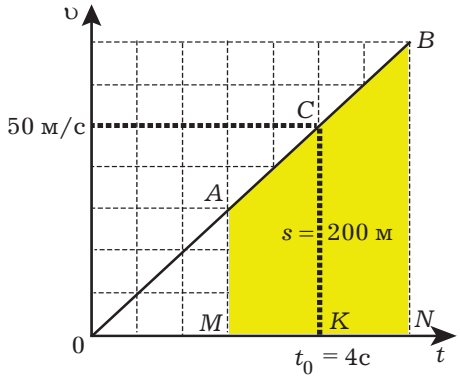



*Рис. 3*

Определим сначала среднюю скорость тела в течение последних 4 секунд:

$$\upsilon_{ср} = \frac{s}{t_0} = 50 \text{ м/с}.$$

Этой же величине – 50 м/с – равна мгновенная скорость тела в точке $C$ графика, т.е. за 2 секунды до падения. Но за каждую секунду падающее тело увеличивает свою скорость на 10 м/с. Следовательно, конечная скорость равна 70 м/с, а общее время падения составляет 7 секунд. Осталось лишь найти площадь треугольника $OBN$, так как она численно равна пройденному пути, т.е. искомой высоте. Таким образом, мы достаточно быстро приходим к ответу:

$$H = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 7 = 245 \text{ м}.$$

Интересно, какой способ вам больше по душе, уважаемый читатель?

Не скрою, мне больше нравится графический способ. Поэтому именно его я и предлагаю использовать для решения большинства задач по теме «РУД».

*Замечание.* Конечно, в данной задаче рассмотрена слишком идеализированная ситуация. Трудно поверить, что при падении с высоты 245 метров сопротивление воздуха будет пренебрежимо мало. Напомню, что перед падением скорость тела достигнет 70 м/с!

**Задача 2.** За последнюю секунду свободно падающее тело пролетело 3/4 всего пути. Сколько времени падало тело?

**Решение.** Попробуем снова построить график зависимости скорости тела от времени (сделайте это самостоятельно). У вас получился график, похожий на рис. 3? Тогда отлично! Весь пройденный телом путь $s$ можно разбить на два участка: начальный – длиной $s/4$ и конечный – длиной $3s/4$. Обратите внимание, что их пути относятся, как 1:3. Знакомое соотношение, не правда ли? Да-да, это отношение мы уже встречали в первой задаче. И далее можно воспользоваться как *графическим* способом, так и *законом нечётных чисел.*

Из графика зависимости $\upsilon(t)$ следует, что промежутки времени, необходимые для прохождения этих участков, должны быть одинаковыми, т.е. общее время падения тела $t = 2$ с.

«И это всё решение?» – можете спросить вы. Конечно, и в этом прелесть графического способа.

Да, но ведь нам просто повезло с условием, однако соотношение путей могло быть и не таким удобным для решения. Работает ли в этом случае графический способ? В качестве ответа рассмотрим следующую задачу.

**Задача 3.** Свободно падающее без начальной скорости тело в последнюю секунду падения прошло 2/3 своего пути. Найдите путь $s$, пройденный телом.

**Решение.** Путь, пройденный свободно падающим телом за всё время движения $t_0$, находится по формуле

$$s = \frac{gt_0^2}{2}.$$

Отметим на графике (рис. 4) время движения на первой трети пути $(t_0 - \tau)$, где $\tau = 1$ с – последняя секунда падения.

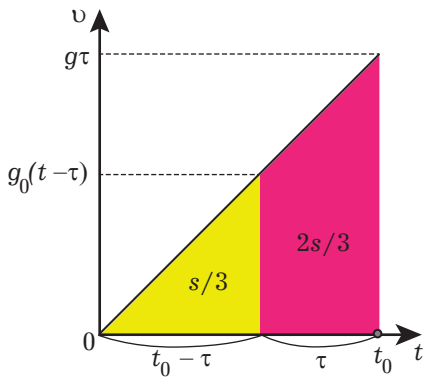



*Рис. 4*

Поскольку площадь большого треугольника, численно равная всему пройденному пути, втрое больше площади выделенного жёлтым цветом треугольника, численно равного пути, пройденного за время $(t_0 - \tau)$, получаем $t_0 = \sqrt{3}(t_0 - \tau)$. (Мы использовали подобие треугольников и пропорциональность площади треугольника квадрату его стороны.) Отсюда

$$t_0 = \tau\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

Подставив найденное значение $t_0$ в формулу для $s$, получим

$$s = \frac{3}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)g\tau^2 = 28 \text{ м}.$$

Заметим, что на графике можно было бы не отмечать величины скоростей в конце первой трети и всего пути – они нам не понадобились в решении.

Как видим, графический способ снова достаточно быстро привёл нас к верному ответу.

Три последние задачи предлагались на олимпиадах высокого уровня. Однако графический способ позволит без больших трудностей справиться даже с ними.

**Задача 4** [2]**.** Тело начинает прямолинейное движение из точки $A$ и движется сначала равноускоренно в течение времени $t_0$, затем с тем же по модулю ускорением – равнозамедленно. Через какое время от начала движения тело вернётся в точку $A$?

**Решение.** В этой задаче тело в некоторый момент времени остановится, а затем станет двигаться в противоположном направлении. Поэтому придётся строить график $\upsilon_x(t)$ зависимости *проекции* скорости от времени (рис. 5).

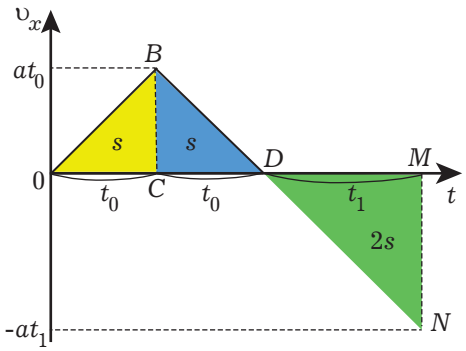



*Рис. 5*

Сначала тело разгонялось из точки *A вдоль* оси *x* с некоторым ускорением *a* в течение времени $t_0$ (пройденный при этом путь *s* численно равен площади жёлтого треугольника *OBC*), затем тормозило до остановки с тем же по модулю ускорением *a*. Значит, на торможение было затрачено столько же времени и тормозной путь также равен *s* (он численно равен площади синего треугольника *CBD*). Наконец, тело, трогаясь с места, вновь стало двигаться с прежним по модулю ускорением *a*, разгоняясь *против* оси *x*, пока не достигло точки *A*. Ясно, что расстояние, пройденное телом в одну сторону, равно расстоянию, пройденному при движении тела назад, т.е. сумма площадей жёлтого и синего треугольников равна площади зелёного треугольника. Ну, а поскольку площади жёлтого и синего треугольников равны, площадь зелёного треугольника вдвое больше площади синего. И тут нам поможет тот факт, что синий и зелёный треугольники подобны. Приглядитесь, они оба прямоугольные и у них равные острые углы *BDC* и *MDN*. Но такое подобие мы использовали в задаче 7. Рассуждая аналогично, имеем, что время

$$t_1 = \sqrt{2}t_0 .$$

Поясним для тех, кому не привычен такой приём: если площади подобных треугольников отличаются вдвое, то соответственные стороны отличаются в $\sqrt{2}$ раз. Таким образом, мы приходим к ответу: общее время движения тела

$$t = 2t_0 + t_1 = t_0(2+\sqrt{2}) .$$

**Задача 5** (IX Всесоюзная олимпиада, 1975)**.** Ракета имеет два двигателя, которые могут сообщать ей постоянные ускорения $a_1$ и $a_2$, направленные вертикально вверх. Первый двигатель рассчитан на работу в течение времени $t_1$, а второй – в течение времени $t_2$, причём $a_1 > a_2$ и $t_1 < t_2$. Двигатели могут включаться как одновременно, так и последовательно. Какой порядок включения двигателей следует выбрать для того, чтобы к моменту окончания работы двигателей ракета поднялась на максимальную высоту?

**Решение.** Начнём, пожалуй, с рассмотрения промежуточного вопроса: в каком порядке надо включать двигатели, чтобы ракета в момент выключения двигателей имела *максимальную скорость*? Ответ на него помогут найти законы динамики.

Из второго закона Ньютона, записанного в импульсной форме

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{\upsilon} ,$$

следует, что при любом порядке включения двигателей импульс сил тяги $\vec{F}\Delta t$ действующих на ракету за всё время работы двигателей при неизменной массе *m* ракеты и нулевой начальной скорости сообщит ей одинаковую конечную скорость $\upsilon_1$.

Попробуем сначала оценить качественно, какой порядок включения двигателей оптимален. Для этого применим **метод предельного перехода**: будем считать, что ускорение первого двигателя значительно боль-

ше ускорения второго $a_1 >> a_2$, а время его работы значительно меньше $t_1 \ll t_2$. Изобразим для данного *предельного случая* примерные графики зависимости скорости ракеты от времени (рис. 6).

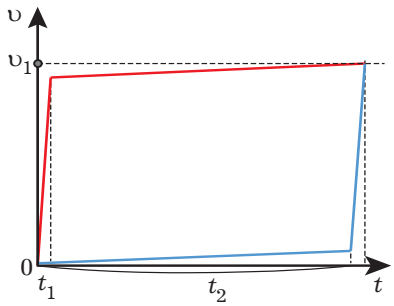



*Рис. 6*

Из графика ясно видно, что в первом случае (красный график) расстояние, пройденное ракетой, значительно больше. Поразмыслив немного, можно легко обосновать полученный качественный результат. Действительно, в первом случае при большом ускорении за малое время $t_1$ ракета набирает значительную (почти максимальную!) скорость, а затем в течение длительного времени $t_2$ движется на этой скорости, даже немного увеличивая её. Во втором же случае ракета много времени тратит на разгон с малым ускорением, почти не увеличивая свою скорость. И лишь в самом конце при малой набранной скорости включается мощный двигатель, который за малое время позволит набрать ту же скорость, что и в первом случае, но расстояние-то, пройденное за малое время, оказывается значительно меньше, чем в первом случае.

Итак, мы убедились, что максимальной высоты ракета достигнет в том случае, если сначала будет работать двигатель с бóльшим ускорением $a_1$, а затем – с меньшим $a_2$. Осталось рассмотреть случаи одновременного включения двигателей. Предлагаем читателям самостоятельно поразмышлять над этим вопросом и убедиться, что и при таком включении ответ не изменится.

После такой оценки можно перейти к конкретным расчётам. Попробуйте проделать математические выкладки самостоятельно.

**Задача 6** (XLIX Всероссийская олимпиада школьников по физике, 2015)**.** Машинист настроил бортовой компьютер электрички так, чтобы он показывал среднюю скорость $\upsilon$ на участке, пройденном между соседними опорами, поддерживающими контактный провод. Расстояния между любыми двумя соседними опорами одинаковы. Электричка отправляется с платформы «Новодачная» и разгоняется с постоянным ускорением (рис. 7). Через некоторое время машинист увидел, что компьютер показывает скорость $\upsilon_1 = 20$ км/ч. На следующем участке скорость оказалась $\upsilon_2 = 30$ км/ч. Какой была мгновенная скорость $u$ электрички на границе между первым и вторым участками?

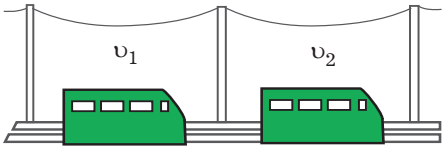



*Рис. 7*

**Решение.** Пусть $s$ – расстояние между соседними опорами. Тогда из определения средней скорости на участке его длину можно записать как

$$s = \upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2. \qquad (10)$$

Построим график зависимости средней скорости электрички от времени (рис. 8). По условию средняя скорость на втором участке $CD$ в полтора раза больше средней скорости на первом участке $AB$. Тогда с учётом равенства (10) движение на первом участке длится в полтора раза дольше, чем на втором (в наших обозначениях 6τ и 4τ).

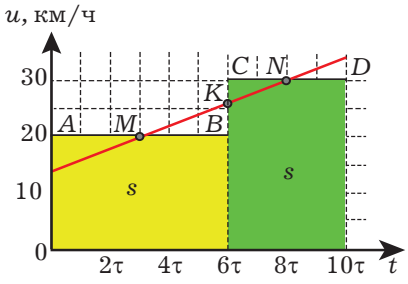



*Рис. 8*

Для любого участка при РУД средняя скорость равна мгновенной скорости на середине временного интервала (точки $M$ и $N$ на графике). Проведя прямую через эти точки, получим график зависимости мгновенной скорости от времени (выделен красным цветом). Из этого графика следует, что изменение мгновенной скорости от 20 до 30 км/ч происходило за время 5τ. Другими словами, за время τ скорость увеличивалась на 2 км/ч.

Искомой скорости на границе двух участков соответствует точка $K$ на графике. Для определения этой скорости рассмотрим участок $MK$ графика. Этому участку соответствует временной интервал 3τ, следовательно, мгновенная скорость от точки $M$ до точки $K$ выросла на 6 км/ч. Тогда искомая скорость $u = 26$ км/ч.

## Джентльменский набор олимпиадника

Итак, можно подвести итог урока. Наш *джентльменский набор* на сей раз состоит из следующих приёмов:

1) координатный метод;
2) метод обратимости;
3) графический метод;
4) закон нечётных чисел;
5) метод предельного перехода.

Мы сконцентрировали внимание в основном на *графическом* методе, однако не надо забывать и остальные приёмы.

Взглянем снова на разобранные задачи и примеры. Теперь мы можем ответить на вопрос: когда удобно применять графический способ? Как показали нам решения, он особенно хорош в тех случаях, когда в условии задачи задано или требуется найти время движения. Если же, как в примере 3, время отсутствует, удобно использовать формулу (3).

Подчеркнём ещё раз: стандартное использование формул (1)–(4) *практически всегда* позволит вам решить задачу по теме «РУД», правда, не всегда этот способ будет *оптимальным*.

В качестве тренировки попробуйте поразмышлять над задачами для самостоятельного решения. Они подобраны так, чтобы вы могли в большинстве из них использовать разобранные выше способы (наиболее часто – графический). В качестве справочного пособия можно использовать статьи [3] и [4], в которых задачи решены именно графическим способом.

На стр. 42 и 80 журнала вы найдёте *подсказки и ответы*. Только не спешите заглядывать в подсказки, лучше ещё раз обратитесь к задачам, разобранным выше.

До встречи на следующем уроке!