

Корнеев Валерий Трофимович
Директор центра довузовской подготовки БГТУ им. В.Г. Шухова, старший преподаватель кафедры физики. Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации.

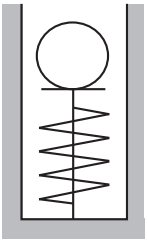
Пружинки лёгкие… и тяжёлые

В условиях задач встречаются подсказки, на которые мы реагируем, порой не задумываясь: «лёгкая пружина», «колебаниями пренебречь». По сути дела, на этих подсказках строится модель физического явления. Чтобы получить количественное описание явления, нужно найти адекватное математическое описание всех его существенных особенностей, т. е. составить математическую модель явления. При этом, нужно проявлять осторожность в сопоставлении результатов расчётов с физическим явлением, ибо математическая модель не бывает тождественна явлению: что-то упрощается, чем-то пренебрегаем. При решении «школьных» задач мы даже не осознаем, что учимся строить физические модели и работать с ними. В этой статье делается попытка «поиграть с моделью»: внимательнее рассмотреть, что же мы получили, а после этого – попытаться поменять что-либо в модели (заменить, например, «лёгкие» пружины на «тяжёлые») и посмотреть, как система поведёт себя в новых условиях. Автору представляется, что такой подход полезен при решении любых задач.

Часть 1

Часто в задачах встречается сжатая на Δx пружинка, которую сначала удерживают, потом отпускают. Приведём полностью задачу с решением, представленную на (https://self-edu.ru/ /ege2019_phis_30.php?id=7_25):

Задача. Нить, удерживающая вертикально расположенную лёгкую пружину в сжатом на 1 см состоянии, внезапно оборвалась (см. рисунок). Определите скорость, которую приобрёл при этом шарик массой 4 г. Жёсткость пружины 1 кН/м. Колебаниями пружины после отрыва шарика пренебречь.



Решение. По закону сохранения энергии потенциальная энергия пружины $E_n = \frac{kx^2}{2}$ в момент обрыва нити полностью переходит в кинетическую энергию шарика $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Приравнивая эти величины, получаем: $\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}x.$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}x = \sqrt{\frac{1000}{4\cdot 10^{-3}}}0{,}01 = 5{,}000\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Всё просто? Сделаем два замечания. Шарик к моменту отрыва от пружины не только приобретет кинетическую энергию, но и изменит потенциальную энергию на величину mgx. Поэтому уравнение нужно записать следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} - mgx.$$

И тогда $v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gx}$.

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gx} =$$

$$= \sqrt{\frac{1000\cdot(0{,}01)^2}{4\cdot 10^{-3}} - 2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}01} \approx 4{,}998\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Разница в численных результатах может показаться незначительной. Но важно, что само явление происходит несколько иначе. А числа... Читатель может самостоятельно поменять числовые данные, например, увеличим массу до 0,4 кг и сжатие пружины – до 0,1 м. Сравнив полученные ответы для новых данных, легко будет заметить, что разница в скоростях вырастет уже до 4%.

Кроме того, обратим внимание на замечание: колебаниями пружины после отрыва шарика пренебречь.

Для простоты расположим пружинку горизонтально, уперев её вторым концом в стенку, – от этого изменится только положение равновесия. Давайте представим, что после отрыва шарика пружинка колеблется. Когда она проходит недеформированное состояние, её энергия равна нулю (пружинка невесомая!). Когда пружинка во время колебаний оказывается максимально деформированной, потенциальная энергия упругой деформации достигает максимума. Но откуда может взяться эта энергия? Она – то возникает, то исчезает? И откуда она появляется, если – это заложено в решение – потенциальная энергия упруго деформированной пружины полностью перешла в кинетическую энергию шарика?

Конечно, всё просто. Никаких колебаний *невесомой* пружинки не возникает. У пружины нет инертных свойств (масса – мера инертности), передав энергию шарику, она просто останавливается и не колеблется.

Рассмотрим это внимательнее.

Модуль силы упругости пропорционален деформации пружины:

$$F = kx.$$

Если мы сжали пружинку с шариком на конце, деформация пружинки может быть представлена выражением:

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

Это выражение описывает колебание пружинного маятника. До момента отрыва шарика такое рассмотрение справедливо. Здесь x_0 – максимальное сжатие пружинки (напоминаем: сейчас мы пружинку расположили горизонтально), ω – круговая частота колебаний пружинного маятника:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

После освобождения пружинки шарику передается импульс

$$p = \int_0^{T/4} F(t)dt = \int_0^{T/4} kxdt =$$

$$= \int_0^{T/4} kx_0 \cos(\omega t)dt = \frac{kx_0}{\omega} \int_0^{T/4} \cos(\omega t)d(\omega t).$$

Отрыв шарика происходит в момент, когда пружина перешла в недеформированное состояние, до этого момента проходит четверть периода колебания, поэтому и выбраны такие пределы интегрирования. Произведём вычисления:

$$p = \frac{kx_0}{\omega} \int_0^{T/4} \cos(\omega t)d(\omega t) =$$

$$= \frac{kx_0}{\omega} \sin(\omega t)\Big|_0^{T/4} = \frac{kx_0}{\omega} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) =$$

$$= \frac{kx_0}{\omega} = \frac{kx_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}};$$

$$v = \frac{p}{m} = \frac{kx_0}{m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}x_0.$$

(Интегрирование известно старшеклассникам из математики, но в большинстве школ оно редко применяется на уроках физики, потому здесь всё прописано максимально подробно).

Таким образом, мы строго получили уже известный нам ответ (для горизонтально расположенной пружинки!).

Как и говорилось выше, для невесомой пружинки вся её потенциальная энергия перешла в кинетическую энергию движения шарика, а пружинка осталась в недеформированном состоянии.

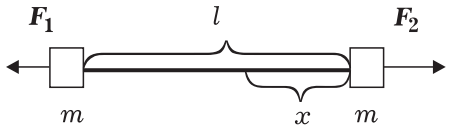
А теперь пара вопросов на будущее:

1) Как изменится решение, если пружина тоже имеет массу?

2) В Интернете бурно обсуждалась задача из учебника физики для 9 класса: «Мальчик и девочка тянут за динамометр в противоположные стороны. Каковы показания динамометра, если мальчик тянет с силой 300 Н, а девочка - 200 Н?» Ответ в том же учебнике: 250 Н. (https://dxdy.ru/topic130594.html)

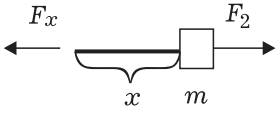
Согласны ли вы с ответом?

Часть 2
Сила натяжения нити (пружинки) в произвольном сечении



Рассмотрим *лёгкую* нить, на которую действуют две противоположно направленные силы F_1 и F_2, приложенные к разным концам нити. На концах нити закреплены грузики массой m. Для определённости примем $F_2 > F_1$.

Рассмотрим силу натяжения нити F_x на расстоянии x от правого её конца.



Для этого мысленно заменим левую часть нити с грузиком силой F_x, действующей в данном сечении нити на её правую часть.

Запишем уравнения для всей нити и для правой части нити:

$$2ma = F_2 - F_1, \quad ma = F_2 - F_x.$$

Из этих уравнений получим

$$F_x = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

Заметим, что сила натяжения в любом сечении *лёгкой* нити не зависит от координаты сечения, а зависит только от приложенных сил.

Рассмотрим ситуацию, когда грузики имеют разную массу – слева m_1, справа m_2:

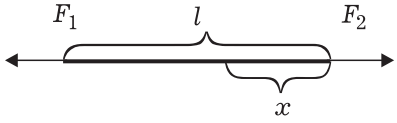
$$(m_1 + m_2)a = F_2 - F_1, \quad m_2 a = F_2 - F_x.$$

Отсюда получим

$$F_x = \frac{m_2 F_1 + m_1 F_2}{m_1 + m_2}.$$

На силу натяжения в каком-либо сечении нити влияет распределение масс на концах нити. (Заметим, кстати, что от ускорения эта сила не зависит.)

Сделаем следующий шаг. Пусть у нас нить массивная, масса её m. Грузики с концов нити уберём.





Уравнения для этого случая будут выглядеть так:

$$ma = F_2 - F_1, \quad \frac{x}{l}ma = F_2 - F_x.$$

Решение системы даёт

$$F_x = \frac{l-x}{l}F_2 + \frac{x}{l}F_1 = F_2 - (F_2 - F_1)\frac{x}{l}.$$

Подставив сюда $x = 0$ и $x = l$, получим очевидные выводы: на концах нити силы натяжения равны приложенным к этим концам силам. А вот в произвольном сечении нити сила натяжения меняется от точки к точке. Для *массивной* нити, к концам которой приложены разные силы, натяжение оказывается различным в разных её сечениях!

То же относится и к пружинкам: сила упругости в лёгкой пружинке одинакова вдоль всей её длины, а в

массивной пружинке будет зависеть от сечения. Но тогда и пружинка оказывается растянутой по-разному вдоль своей длины.

Вернёмся к задаче с динамометром: «Мальчик и девочка тянут за динамометр в противоположные стороны. Каковы показания динамометра, если мальчик тянет с силой 300 Н, а девочка – 200 Н?».

Сначала разберемся, ЧТО показывает динамометр. Динамометр проградуирован *в состоянии покоя* таким образом, что его *показания* соответствуют длине растянутой пружины. (Мы рассматриваем пружинный динамометр в виде пружины, закрепленной на проградуированной планке).

Если динамометр *покоится*, то вдоль всей растянутой пружины установится одинаковая сила:

$$ma = F_2 - F_1, \quad a = 0, \quad F_1 = F_2.$$

Пружина будет растянута равномерно. (Во время измерений мы делали всё аккуратно, пружина растягивалась постепенно, медленно, без рывков. Колебаний нет). К точке закрепления пружины на планке приложена та же сила, которую мы прикладываем к концу пружины динамометра, на который воздействуем силой.

Но если к разным концам пружины приложены разные силы, то она будет ускоренно двигаться. Тогда

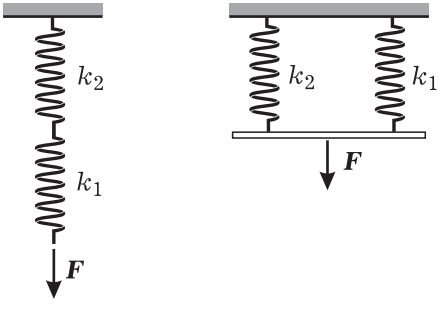
$$F_x = F_2 - (F_2 - F_1)\frac{x}{l}.$$

Чему будет равно удлинение пружины? (Ведь динамометр проградуирован по удлинению в состоянии покоя.)

Последовательное и параллельное соединение пружинок

При параллельном соединении лёгких пружинок их жесткости складываются: $k = k_1 + k_2$, а при последовательном соединении складываются величины, обратные жесткостям:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$



Эти формулы легко получить. При параллельном соединении пружин сила упругости равна сумме сил упругости каждой пружины, а их удлинение оказывается одинаковым:

$$F = F_1 + F_2,$$

$$k\Delta x = k_1\Delta x + k_2\Delta x.$$

Разделим обе части второго равенства на Δx, получим $k = k_1 + k_2$.

При последовательном соединениии лёгких пружинок сила натяжения вдоль пружин будет оинакова, а общее удлинение равно сумме удлинений каждой пружины:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2.$$

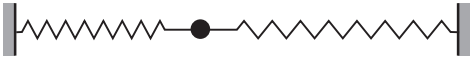
Тогда

$$\frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}.$$

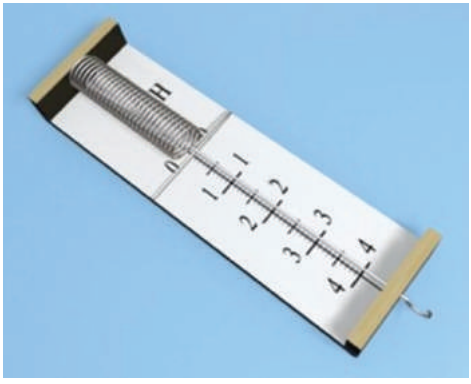
Разделив обе части равенства на F, получим $\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ или

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}.$$

Кстати заметим, что иногда учащиеся ошибаются, определяя вид соединения пружин по картинке. На рисунке показано параллельное соединение: пружины деформируются на одинаковую (по модулю) величину, а сила, действующая на шарик, равна сумме сил (силы в данном случае направлены одинаково).



Что же измеряет динамометр



При измерении мы смотрим, насколько растянута пружина. Динамометр показывает удлинение пружины, проградуированное в единицах силы *при неподвижном динамометре*.

Рассмотрим динамометр с очень лёгкой подставкой, но тяжёлой пружиной (массой m).

Разобьём мысленно пружину на большое число N одинаковых кусочков. Жёсткость каждого кусочка kN. Для всей пружины и для её части, содержащей n кусочков, получим:

$$ma=F_2-F_1,\quad n\frac{m}{N}a=F_2-T_n.$$

Найдём силу натяжения пружины в сечении, «отделяющем» рассматриваемую часть пружины T_n.

$$T_n=F_2-n\frac{F_2-F_1}{N}.$$

Удлинение этого участка пружины равно

$$\Delta x_n=\frac{T_n}{kN}.$$

Суммируя удлинения по всей длине пружины, получим

$$\Delta x=\sum_{i=1}^{N}\frac{T_i}{kN}=\sum_{i=1}^{N}\frac{F_2-n\dfrac{F_2-F_1}{N}}{kN}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{F_2}{kN}-\sum_{i=1}^{N}n\frac{F_2-F_1}{kN\cdot N}=$$

$$=\frac{1}{kN}\left(NF_2-\sum_{i=1}^{N}n\frac{F_2-F_1}{N}\right).$$

Строго говоря, мы суммируем «бесконечно малые» элементы – это интегрирование $(N\to\infty)$. В результате сумма в последней скобке даст нам

$$\sum_{i=1}^{N}n\frac{F_2-F_1}{N}=\frac{F_2-F_1}{N}\cdot\frac{N^2}{2},$$

и мы получаем

$$\Delta x=\frac{1}{kN}\left(NF_2-N\frac{F_2-F_1}{2}\right)=\frac{F_1+F_2}{2k};$$

$$F=\frac{F_1+F_2}{2},$$

то есть, растяжение массивной пружинки определяется полусуммой растягивающих сил. Динамометр проградуирован по растяжению пружинки, это и будет его показание.

Рассмотрим ещё динамометр, у которого подставка со шкалой имеют значительную (сравнимую с массой пружины) массу m_0.

Для этого случая:

$$(m+m_0)a = F_2 - F_1, \quad ma = F_2 - F_0.$$

Здесь F_1 и F_2 – силы, приложенные к динамометру в целом, F_2 и F_0 – силы, приложенные к пружине.

Получим:

$$F_0 = \frac{F_2 m_0 + F_1 m}{m + m_0}$$

и показания динамометра в этом случае

$$F = \frac{F_0 + F_2}{2} = \frac{1}{2}\left(F_2 + \frac{F_2 m_0 + F_1 m}{m + m_0}\right).$$

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Таинственный конверт Фарадея

В биографии великого английского физика Майкла Фарадея есть любопытный эпизод. Обычно он регулярно публиковал отчёты о результатах своих работ, но однажды (12 марта 1832 года) вместо них учёный передал в Лондонское Королевское общество конверт с надписью «Новые воззрения, подлежащие в настоящее время хранению в архивах Королевского общества».

Что же это за «новые воззрения», которые Фарадей «спрятал до поры – до времени»? Спустя – чуть более 100 лет (в 1938 году) конверт был вскрыт. На уже пожелтевшей бумаге было написано: «Я пришёл к заключению, что на распространение магнитного воздействия требуется время, которое, очевидно, скажется весьма незначительным. Я полагаю также, что электрическая индукция распространяется точно таким же образом. Я полагаю, что ... (их) распространение похоже на колебания взволнованной водной поверхности... По аналогии я считаю возможным применить теорию колебаний к распространению электрической индукции... В настоящее время, насколько мне известно, никто из учёных кроме меня, не имеет подобных взглядов».

Поразительно! Фарадей по существу предсказал распространение электромагнитных волн задолго до их открытия (1888 г.) и указал возможный механизм этого явления: электрические и магнитные колебания. Это было тогда (когда изучение электромагнетизма ещё только началось) настолько «новым воззрением», что учёный, не надеясь на положительную его оценку коллегами, но интуитивно чувствуя научную ценность своих идей, решил сохранить их для будущих физиков. Вот и появился таинственный конверт Фарадея. Это «послание потомкам – яркое свидетельство его глубокого проникновения в суть изучаемых физических явлений, мощи его научной проницательности.

Материал подготовила А.В. Чеботарёва