

Куракин Владимир Андреевич
Студент НИЯУ МИФИ



Муравьёв Сергей Евгеньевич
Доцент кафедры теоретической ядерной физики НИЯУ МИФИ,
кандидат физико-математических наук

Применение принципов размерности и подобия при решении олимпиадных задач по физике

В настоящей статье рассмотрены принципы использования соображений размерности и подобия при решении олимпиадных задач по физике. В качестве реальных примеров последних взяты задачи, которые в разные годы предлагались школьникам на физических олимпиадах НИЯУ МИФИ — отраслевой физико-математической олимпиаде школьников «Росатом» и Инженерной олимпиаде школьников.

Введение

На школьных физических олимпиадах высокого уровня сложности иногда встречаются задачи, прямые способы решения которых оказываются неприменимыми из-за громоздких вычислений, которые к тому же зачастую не могут быть реализованы в рамках школьной математики. Тем не менее, ряд таких задач может быть решен «обходными» способами. Одним из «обходных» способов решения задач является метод размерности и подобия, в котором окончательный или промежуточный ответ «угадывается» и параметризуется на основе соображений размерности, а потом пересчитывается на любые другие значения параметров с использованием соображений подобия. Для школьников такие рас-

суждения, как правило, являются очень сложными, поскольку все задачи школьного курса физики являются точнорешаемыми, что создаёт иллюзию такой же структуры реальной физики. На самом деле в реальной физике точно решаемых задач нет вообще, поэтому метод «угадывания» ответа на основе соображений размерности и подобия является одним из основных методов настоящих научных исследований.

В этой статье мы собрали ряд олимпиадных физических задач, для решения которых используются соображения размерности и подобия, и подробно разобрали логику использования этих соображений.

Математический пример

В качестве иллюстрации применения принципов размерности и подобия рассмотрим доказательство теоремы Пифагора с использованием вышеупомянутых принципов вместо обычных планиметрических соображений. Итак, пусть имеется произвольный прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b, гипотенузой c и острым углом α, противолежащим катету a (см. рис. 1). Необходимо доказать, что

$$a^2 + b^2 = c^2, \qquad (1)$$

независимо от угла α, причём при доказательстве использование каких-либо тригонометрических соотношений не допускается, т.к. все они связаны с основным тригонометрическим тождеством, которое доказывается с помощью теоремы Пифагора (1).

Из соображений размерности ясно, что площадь треугольника ABC должна выражаться через квадрат какого-либо его линейного размера. В качестве последнего можно выбрать, например, гипотенузу c треугольника ABC. Тогда площадь S_{ABC}

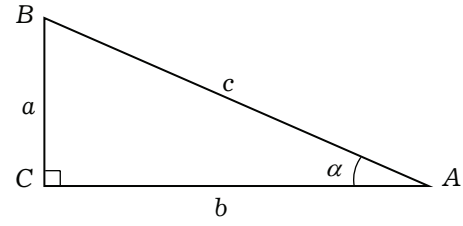


Рис. 1

этого треугольника будет выражаться следующим соотношением:

$$S_{ABC} = \beta c^2,$$

где β — некоторый безразмерный коэффициент пропорциональности, который зависит только от формы прямоугольного треугольника, но не от его размеров. Поэтому этот коэффициент пропорциональности одинаков для всех треугольников, подобных треугольнику ABC.

Опустим теперь перпендикуляр CE из вершины прямого угла C треугольника ABC на его гипотенузу c (см. рис. 2). В результате треугольник ABC разобьётся на два меньших

[1] Можно было бы выразить площадь треугольника ABC через квадрат любого другого его линейного размера, при этом изменился бы лишь безразмерный коэффициент пропорциональности β, а доказательство самой теоремы Пифагора фактически не изменилось.

прямоугольных треугольника CEB и AEC, причём геометрически очевидно, что в каждом из этих треугольников один из острых углов окажется равным α. Значит, треугольники CEB и AEC подобны как друг другу, так и исходному треугольнику ABC (по двум углам). Поэтому площади $SCEB$ и $SAEC$ треугольников CEB и AEC могут быть выражены через квадраты их гипотенуз a и b соответственно с тем же самым безразмерным коэффициентом пропорциональности β, что и площадь $SABC$ треугольника ABC:

$$S_{CEB} = \beta a^2, \;\; S_{AEC} = \beta b^2.$$

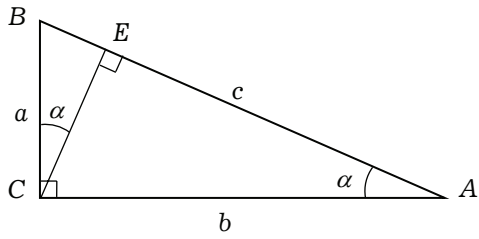


Рис. 2

А поскольку площадь S_{ABC} треугольника ABC равна сумме площадей S_{CEB} и S_{AEC} треугольников CEB и AEC, получаем:

$$\beta c^2 = \beta a^2 + \beta b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2,$$

т. е. теорему Пифагора (1).

Центр тяжести полушаров

Задача 1

Два полушара склеены так, что их центры совпадают. Радиус верхнего полушара вдвое больше радиуса нижнего полушара (см. рис. 3). Плотность вещества, из которого изготовлен нижний полушар, равна ρ. При какой плотности ρ_0 вещества верхнего полушара положение конструкции, изображённое на рис. 3, будет положением её устойчивого равновесия?

Очевидно, что исходное положение конструкции из двух полушаров, изображённое на рис. 3, является положением её равновесия, поскольку в данном положении сила тяжести и сила реакции опоры, действующие на эту конструкцию, полностью компенсируют друг друга. Для анализа устойчивости этого равновесия необходимо вывести конструкцию из равновесия и исследовать силы, действующие на неё при этом.

Итак, отклоним конструкцию из двух полушаров от её исходного положения равновесия и исследуем действующие на неё при этом силы. Т. к. нижняя поверхность рассматриваемой конструкции является сферической, то линия действия силы реакции опоры проходит через общий центр полушаров. Поэтому устойчивость или неустойчивость положения равновесия системы полушаров определяется точкой приложения к ней силы тяжести — т.е.

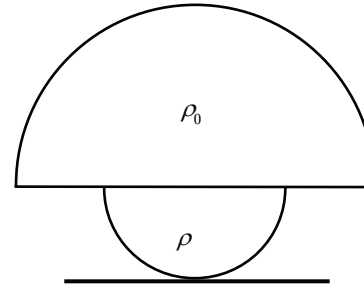
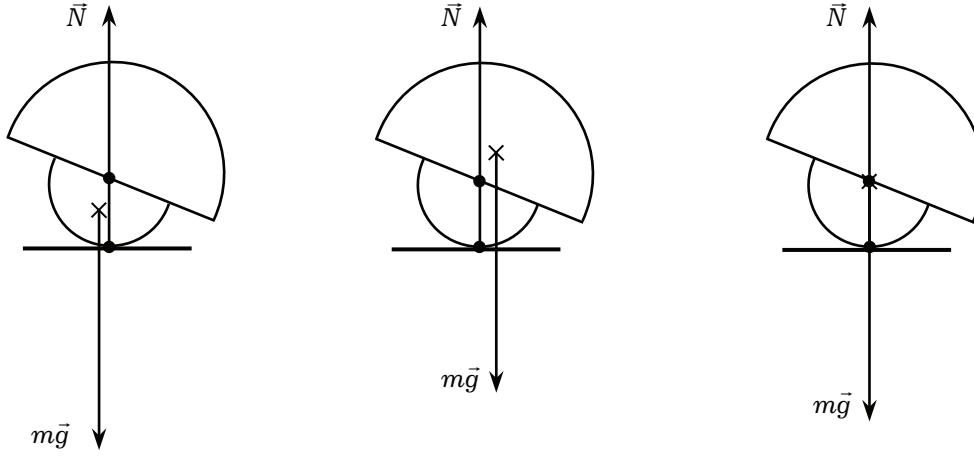


Рис. 3

положением центра тяжести этой системы. Если центр тяжести системы полушаров находится ниже их общего центра, то рассматриваемое равновесие устойчиво, если выше — неустойчиво, если совпадает с общим центром полушаров — безразлично.

Этот вывод иллюстрируется рис. 4, из которого видно, что если центр тяжести системы полушаров расположен ниже их общего геометрического центра, то момент силы тяжести полушаров относительно точки их опоры, возникающий при их отклонении от исходного положения равновесия, вернёт полушары в их первоначальное положение. Если выше — будет продолжать отклонять полушары ещё дальше от их исходного положения равновесия, если совпадает — вообще не будет менять положение системы полушаров.

Итак, нам нужно найти положение центра тяжести склеенных полушаров. Здесь удобно воспользоваться следующим приёмом, который можно применять к любому телу и который непосредственно следует из определения центра тяжести. Если тело можно мысленно разделить на такие составные части, положения центров тяжести которых известны, то центр тяжести всего составного тела можно найти как центр тяжести системы материальных точек, массы которых равны массам этих составных частей и которые расположены в их центрах тяжести. В применении к рассматриваемой конструкции это означает, что её центр тяжести совпадает с центром тяжести двух материальных точек с массами, равными массам верхнего и нижнего полушаров, и которые расположены в центрах тяжести верхнего и нижнего полушаров. Таким образом, задача нахождения центра тяжести системы полушаров сводится к задаче нахождения центра тяжести системы двух материальных точек, что хорошо умеют делать школьни-



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 4

ки. Но как найти положение центра тяжести полушара? Эта задача не решается без высшей математики... Как быть? А давайте попробуем угадать!

Пусть есть полушар радиуса r. Где находится его центр тяжести? Из соображений симметрии понятно, что центр тяжести полушара расположен на оси его симметрии ниже его центра (см. рис. 5, положение центра тяжести полушара отмечено крестиком). А поскольку в решаемой задаче есть единственный параметр с размерностью длины — радиус r полушара, то расстояние y от центра полушара до его центра тяжести может выражаться только через этот радиус r:

$$y = \alpha r,$$

где α — безразмерный параметр, который благодаря своей безразмерности не может зависеть ни от массы, ни от радиуса полушара (просто потому, что эти массу и радиус нечем обезразмерить). А, следовательно, параметр α должен быть одинаковым у всех полушаров независимо от их масс и радиусов.

Теперь можно найти и положение центра тяжести конструкции из двух полушаров. Пусть радиус нижнего полушара равен R, а верхнего — $2R$, плотность нижнего полушара равна ρ, а верхнего — ρ_0. Тогда $y_{\text{ц.т.}}$ — координата центра тяжести полушаров в системе координат, начало которой находится в их общем центре, а ось y направлена вдоль оси симметрии конструкции (см. рис. 6), определяется следующей формулой:

$$y_{\text{ц.т.}} = \frac{m_1 \alpha R - m_2 2\alpha R}{m_1 + m_2},$$

где m_1 и m_2 — массы нижнего и верхнего полушаров соответственно. Конечно, для вычисления координаты $y_{\text{ц.т.}}$ центра тяжести системы полушаров необходимо знать параметр α. Однако в данной задаче нужно не вычислить координату центра тяжести системы полушаров, а только сравнить его положение с положением центра полушаров, а для этого сравнения параметр α не нужен. Действительно, если центр тяжести составной конструкции лежит ниже центра полушаров, то при нашем выборе системы координат координата центра тяжести положительна ($y_{\text{цт}} > 0$), а если выше — отрицательна ($y_{\text{цт}} < 0$). Поэтому из предыдущей формулы следует, что система полу-

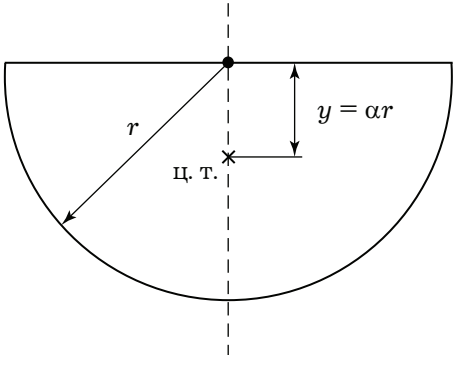


Рис. 5

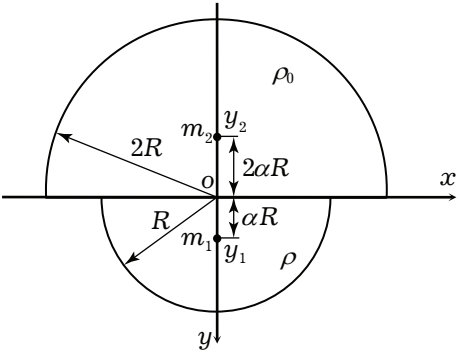


Рис. 6

шаров будет находиться в положении устойчивого равновесия, если

$$m_1 \alpha R > m_2 \alpha 2R,$$

и неустойчивого — в обратном случае. Выражая массы полушаров через их плотности, найдём, что система полушаров будет находиться в положении устойчивого равновесия, если

$$\alpha\rho\frac{2}{3}\pi R^4 > \alpha\rho_0\frac{2}{3}\pi(2R)^4.$$

В этом неравенстве неизвестный нам параметр α сокращается, и мы получаем окончательный ответ для плотности верхнего полушара ρ_0 при которой система полушаров будет находиться в устойчивом равновесии в положении, изображённом на рис. 3 в условии задачи:

$$\rho_0 < \frac{1}{16}\rho.$$

Ещё центр тяжести

Рассмотрим ещё одну задачу, сводящуюся к поиску центра тяжести тела, которая может быть решена как методами размерности и подобия, так и непосредственным (хотя и довольно громоздким) вычислением, и потому допускает проверку рассматриваемых методов.

Задача 2

Незнайка решил собрать инновационного «ваньку-встаньку». Для этого Незнайка взял очень много шаров одинаковой плотности, и скрепил их так, что центры шаров легли вдоль одной прямой, а радиус каждого последующего шара оказался меньше радиуса предыдущего в два раза (см. рис. 7). Незнайка решил, что из-за большой массы нижнего шара такая конструкция, поставленная на её большой шар, будет устойчивой. Но «ванька-встанька» устойчивым не был. Объясните, почему. Знайка посоветовал Незнайке прикрепить к самой нижней точке большого шара конструкции точечное массивное тело. Какую оно должно иметь массу μ, чтобы «ванька-встанька» стал устойчивым? Масса самого большого шара инновационного «ваньки-встаньки» равна m_1.

В предыдущей задаче мы доказали, что тело, имеющее сферическую нижнюю поверхность и обладающее осевой симметрией, находится в устойчивом равновесии, стоя на горизонтальной поверхности, если центр тяжести данного тела располагается ниже геометрического центра его нижней поверхности. Если же центр тяжести тела оказывается выше геометрического центра его нижней поверхности, то при

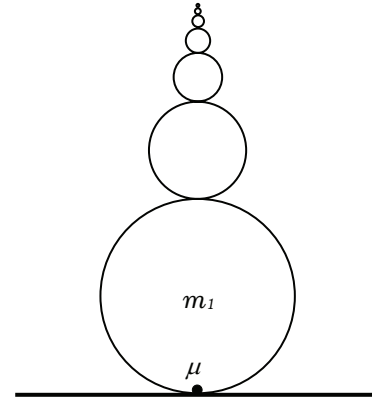


Рис. 7

отклонении данного тела от его положения равновесия момент силы тяжести продолжает и дальше отклонять это тело от его первоначального положения. Поскольку центр тяжести нижнего шара инновационного «ваньки-встаньки» лежит в геометрическом центре этого шара, и есть дополнительные шары сверху, то центр тяжести всего «ваньки-встаньки» лежит выше геометрического центра его нижнего шара, и «ванька-встанька» неустойчив.

Чтобы найти массу μ точечного массивного тела, которое нужно прикрепить к нижней точке Незнайкиной конструкции для обеспечения её устойчивости, нужно отыскать положение центра тяжести инновационного «ваньки-встаньки». Так же, как и в предыдущей задаче, попробуем «угадать» это месторасположение. Очевидно, центр тяжести «ваньки-встаньки» лежит на оси его симметрии выше геометрического центра его нижнего шара на некотором расстоянии от него (см. рис. 8). На каком? Поскольку в задаче есть единственный параметр с размерностью длины — радиус R нижнего шара «ваньки-встаньки» (радиусы остальных шаров пропорциональны этому радиусу), то это расстояние (обозначим его x) пропорционально радиусу R:

$$x = \alpha R,$$

причём безразмерный коэффициент пропорциональности α не может зависеть ни от радиусов, ни от масс шаров, поскольку эти параметры нечем обезразмеривать[2]. Но как найти этот коэффициент пропорциональности α, ведь в этой задаче он не сокращается, как в предыдущей?

И здесь может помочь следующий приём, основанный на соображениях подобия. Мысленно разобьём «ваньку-встаньку» на две части — нижний шар и «ваньку-встаньку», подобного первоначальному, но с вдвое меньшим радиусом нижнего шара. И будем искать положение центра тяжести исходного (большого) «ваньки-встаньки» как центр тяжести системы двух материальных точек с массами, равными массам нижнего шара и «ваньки-встаньки» с вдвое меньшим радиусом нижнего шара, расположенными соответственно в их центрах тяжести, причём центр тяжести меньшего «ваньки-встаньки» можно связать с радиусом его нижнего шара так же, как мы связали между собой соответствующие параметры большого «ваньки-встаньки».

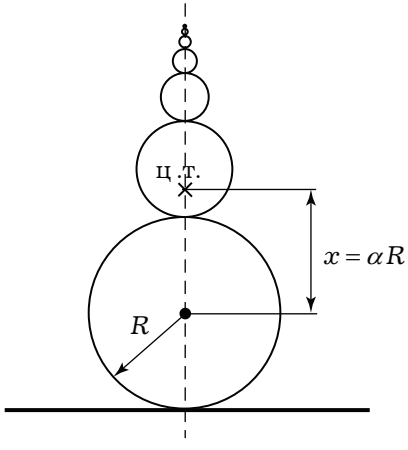


Рис. 8

[2] Параметр α одинаковый у всех «ванёк-встанёк», у которых радиус каждого последующего шара, начиная с самого нижнего из них, вдвое меньше радиуса предыдущего шара. Для других соотношений между радиусами шаров «ваньки-встаньки» параметр α будет другим.

Итак, центр тяжести нижнего шара исходного «ваньки-встаньки» находиться в центре этого шара, центр тяжести меньшего «ваньки-встаньки» находится на расстоянии $\alpha(R/2)$ от центра его большого шара (т.е. шара с радиусом $R/2$). Поэтому координата $x_{\text{ц.т.}}$ центра тяжести большого «ваньки-встаньки» в системе координат, начало которой находится в центре его нижнего шара, а ось x направлена вверх вдоль оси симметрии этого «ваньки-встаньки», равна

$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{m\left(R + R/2 + \alpha(R/2)\right)}{M},$$

где M и m — массы исходного и меньшего «ванек-встанек» соответственно. С другой стороны, эта координата $x_{\text{ц.т.}}$ равна расстоянию x от центра нижнего шара большого «ваньки-встаньки» до его центра тяжести. Поэтому

$$\alpha R = \frac{m\left(R + R/2 + \alpha(R/2)\right)}{M}. \quad (2)$$

Соотношение масс m/M «ванек-встанек» можно найти, также исходя из соображений размерности и подобия. Т.к. плотности ρ всех шаров исходного «ваньки-встаньки» одинаковые, то масса M последнего есть

$$M = \rho V,$$

где V — объём большого «ваньки-встаньки». А поскольку в задаче есть единственный параметр с размерностью объёма — куб радиуса нижнего шара R. Поэтому для массы M большого «ваньки-встаньки» имеем:

$$M = \rho\beta R^3,$$

где β — некоторый числовой коэффициент. Эта формула с тем же коэффициентом β «годится» для любого «ваньки-встаньки», радиусы шаров которого последовательно друг за другом, начиная с самого нижнего из них, уменьшаются в два раза. Поэтому для массы m «ваньки-встаньки» с вдвое меньшим радиусом нижнего шара получим:

$$m = \rho\beta\left(R/2\right)^3.$$

В результате из формулы (2) находим, что

$$\alpha = \frac{1}{5}.$$

Вернёмся теперь к нахождению массы μ точечного массивного тела, которое нужно прикрепить к нижней точке Незнайкиного инновационного «ваньки-встаньки», чтобы он находился в устойчивом равновесии. Для этого центр тяжести «ваньки-встаньки» (с прикреплённым телом) должен располагаться ниже центра его нижнего шара. Или

$$\mu R > M\alpha R \Rightarrow \mu > \frac{M}{5}.$$

Осталось только найти массу M инновационного «ваньки-встаньки». Это можно сделать непосредственным вычислением. Имеем:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots =$$

$$= m_1 + \frac{1}{2^3}m_1 + \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 m_1 + \ldots, \quad (3)$$

где m_1, m_2, m_3 ... — массы шаров «ваньки-встаньки», начиная с самого большого из них, соответственно. Здесь использовано то обстоятельство, что радиус каждого последующего шара «ваньки-встаньки», начиная с самого нижнего из них, вдвое меньше радиуса предыдущего шара, а объём в $2^3 = 8$ раз меньше. Сумма в (3) представляет собой сумму убы-

вающей геометрической прогрессии со знаменателем $1/8$. Поэтому

$$M = \frac{m_1}{1-(1/8)} = \frac{8}{7}m_1. \qquad (4)$$

В результате для массы μ точечного массивного тела, которое нужно прикрепить к нижней точке большого шара инновационного «ваньки-встаньки» для обеспечения его устойчивости, получаем:

$$\mu > \frac{8}{35}m_1.$$

Найдём положение центра тяжести Незнайкиного инновационного «ваньки-встаньки» (без прикреплённого снизу тела) с помощью непосредственного вычисления. Положение центра тяжести системы тел в некоторой системе координат определяется соотношением:

$$X_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}, \qquad (5)$$

где $m_1, m_2, m_3, \ldots$ — массы частей, на которые можно мысленно разбить данное тело, соответственно, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — координаты центров тяжести этих частей в данной системе координат соответственно. В знаменателе этой формулы стоит полная масса M «ваньки-встаньки», которую мы уже нашли (формула (4)).

Сумма в числителе формулы (5) не сводится к простому суммированию геометрической прогрессии, поэтому для вычисления этой суммы поступим следующим образом. Положим «ваньку-встаньку» «на бок» на горизонтальную поверхность (см. рис. 9), найдём расстояние d от этой поверхности до центра тяжести лежащего «ваньки-встаньки» и угол φ между этой поверхностью и прямой, проведённой от самой нижней точки лежащего «ваньки-встаньки» к его центру тяжести.

Очевидно, все шары «лежащего» «ваньки-встаньки» касаются поверхности. Поэтому расстояния от центров тяжести каждого шара до поверхности равны их радиусам.

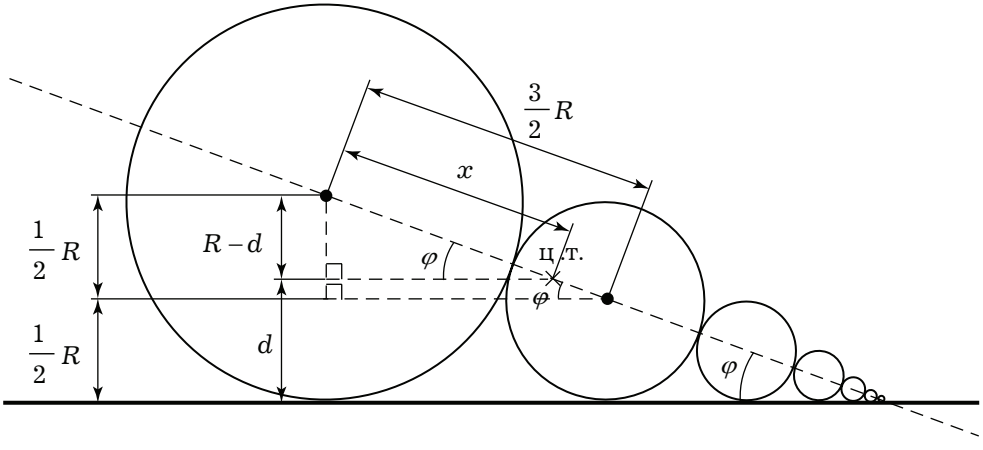


Рис. 9

Используя формулу (5), найдём расстояние d от поверхности до центра тяжести «ваньки-встаньки»:

$$d = \frac{m_1 R + m_2 (R/2) + m_3 (R/4) + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}. \quad (6)$$

Сумма в знаменателе формулы (6) есть полная масса M «ваньки-встаньки» (формула (4)). Сумма в числителе формулы (6) есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем 1/16. Следовательно

$$d = \frac{mR\dfrac{1}{1-(1/16)}}{\dfrac{8}{7}m} = \frac{14}{15}R.$$

Поскольку центр тяжести Незнайкиного «ваньки-встаньки» лежит на прямой, соединяющей центры его шаров, то угол φ между этой прямой и поверхностью (см. рис. 9) можно найти как

$$\sin\varphi = \frac{R-(R/2)}{R+(R/2)} = \frac{1}{3}.$$

Теперь легко найти расстояние x от центра большого шара инновационного «ваньки-встаньки» до его центра тяжести:

$$x = \frac{R-d}{\sin\varphi} = \frac{R}{5},$$

т.е. тот же самый результат, который мы получили, используя соображения размерности и подобия. Все остальные вычисления будут точно такими же и приведут к тому же ответу.

Складываем, складываем, складываем...

Рассмотрим ещё одну физическую задачу, в которой не обойтись без угадывания, основываясь на соображениях размерности и подобия.

Задача 3

Тонкий плоский лист из гибкого диэлектрика имеет форму квадрата и равномерно заряжен по поверхности. Для того, чтобы этот лист дважды медленно сложить пополам — сначала по прямой AB, а затем по прямой CD — необходимо совершить работу A (см. рис. 10). Какую работу нужно совершить, чтобы исходный (несложенный) лист разрезать вдоль прямых AB и CD соответственно и получившиеся в результате этого четыре части медленно отнести очень далеко друг от друга? Считать, что при сложении и разрезании данного листа перераспределения зарядов на нём не происходит, а электрическое поле не совершает работы при разрезании листа.

Рассмотрим сначала процесс сложения квадрата. Из соображений размерности можно заключить, что потенциальная энергия взаимодействия зарядов любой изолированной

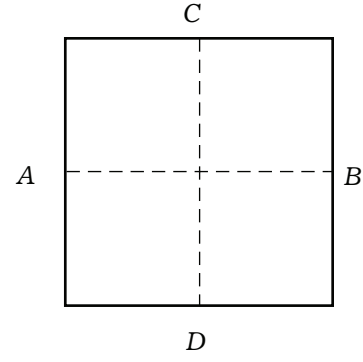


Рис. 10

системы зарядов определяется соотношением:

$$W = \alpha \frac{kQ^2}{R},$$

где Q — суммарный заряд данной системы, R — её характерный линейный размер, $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$ — постоянная закона Кулона, α — безразмерный коэффициент пропорциональности, зависящий от формы этой системы, но не от её размеров или заряда (например, для равномерно заряженной сферы $\alpha = 1/2$).

У нашего заряженного листа есть два характерных линейных размера — сторона a квадрата и его толщина d. Но от толщины листа d (при условии, что эта толщина d много меньше стороны a квадрата) потенциальная энергия взаимодействия его зарядов зависеть не может. Действительно, из-за того, что напряжённость электрического поля равномерно заряженного по поверхности листа не возрастает вблизи самого листа, работа, которую нужно совершить, например, для сжатия этого листа до толщины $d/2$ очень мала для малого d. Т.е. переход от толщины d к толщине $d/2$ для нашего листа практически не потребует совершения работы, и, следовательно, потенциальная энергия взаимодействия его зарядов от этой толщины d не зависит. Поэтому потенциальная энергия взаимодействия W_1 зарядов исходного листа равна

$$W_1 = \alpha \frac{kQ^2}{a}.$$

Т.к. при двукратном сложении исходного квадрата по прямым AB и CD снова получается плоский, равномерно заряженный по поверхности квадрат, имеющий тот же заряд, но вдвое меньшую сторону, то потенциальная энергия взаимодействия W_2 зарядов сложенного квадрата определяется той же самой формулой с тем же самым безразмерным коэффициентом пропорциональности α и с тем же самым зарядом Q, но с вдвое меньшей стороной $a/2$:

$$W_2 = \alpha \frac{kQ^2}{(a/2)} = \alpha \frac{2kQ^2}{a}.$$

Поскольку работа A, совершаемая внешними силами при рассматриваемом сложении квадрата, равна разности потенциальных энергий взаимодействия зарядов конечного (W_2) и исходного (W_1) квадратов, то

$$A = W_2 - W_1 = \alpha \frac{kQ^2}{a}.$$

Рассмотрим теперь процесс разнесения частей разрезанного квадрата на большие расстояния друг от друга. В результате разрезания исходного квадрата образуются четыре тонких плоских квадратика с зарядами $Q/4$ и сторонами $a/2$ каждый. Поэтому потенциальная энергия взаимодействия (W_3) зарядов четырёх этих квадратиков в том случае, когда их разнесли на очень большие расстояния друг от друга, и нет взаимодействия зарядов разных квадратиков друг с другом, равна

$$W_3 = 4\alpha \frac{k(Q/4)^2}{(a/2)} = \alpha \frac{kQ^2}{2a}.$$

Вычитая из конечной потенциальной энергии системы зарядов W_3 её начальную потенциальную энергию W_1, найдём работу A_1, которую нужно совершить, чтобы разнести ча-

сти разрезанного исходного квадрата на большие расстояния друг от друга:

$$A_1 = W_3 - W_1 = -\alpha\frac{kQ^2}{2a} = -\frac{1}{2}A.$$

То, что работа A_1 оказалась отрицательной, абсолютно понятно: части разрезанного квадрата заряжены одноименно и отталкиваются. Поэтому для медленного разнесения их необходимо удерживать, т.е. действовать на них силами, направленными противоположно их перемещениям.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выпиленный из тонкого листа фанеры прямоугольный треугольник с меньшим острым углом α расположен на горизонтальной поверхности стола (см. рис. 11; вид сверху). Чтобы повернуть этот треугольник относительно закреплённой вертикальной оси, проходящей через вершину его угла α (вершину A), к треугольнику необходимо приложить минимальную горизонтальную силу F_A, а чтобы повернуть этот же треугольник относительно закреплённой вертикальной оси, проходящей через вершину другого его острого угла B — минимальную горизонтальную силу F_B. Какую минимальную горизонтальную силу F_C необходимо приложить к треугольнику, чтобы повернуть его относительно закреплённой вертикальной оси, проходящей через вершину его прямого угла C?

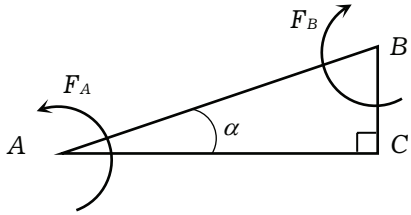


Рис. 11

2. Равномерно заряженный по объёму куб создаёт в своей вершине A электрическое поле с напряжённостью E_0. Из данного куба удаляют кусок в форме куба с ребром, вдвое меньшим ребра исходного куба, и распределяют электрический заряд этого куска равномерно по всему объёму оставшейся части куба (см. рис. 12). Чему теперь равна напряжённость E электрического поля в вершине A исходного куба?

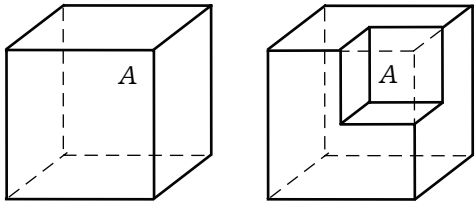
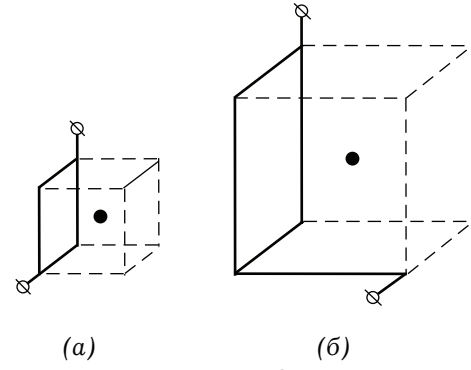


Рис. 12

3. Электрическая цепь образована четырьмя проводами, расположенными вдоль рёбер куба (см. рис. 13(а)). К данной цепи приложили некоторое



(а) *(б)*

Рис. 13

электрическое напряжение, и при этом в центре куба возникло магнитное поле с индукцией B_0. Чему будет равна индукция B магнитного поля в центре куба, если то же самое напряжение приложить к электрической цепи, образованной проводами, расположенными вдоль пяти рёбер куба с вдвое большим ребром (см. рис. 13(б))? Материал и площадь поперечного сечения всех проводов обеих электрических цепей одинаковы.

4. Тонкая прямоугольная диэлектрическая пластинка с соотношением сторон $1/\sqrt{2}$ равномерно заряжена по поверхности. Потенциал электрического поля в центре пластинки равен φ_0. Определить потенциал электрического поля φ_1 в углу пластинки, а также потенциал электрического поля φ_2 в середине её большей стороны.

5. Минимальная напряжённость внешнего однородного электрического поля, которое способно разорвать на две части незаряженную проводящую тонкостенную сферу, равна E_0. Найти минимальную напряжённость E внешнего однородного электрического поля, которое способно разорвать незаряженную проводящую тонкостенную сферу вдвое большего радиуса.

6. Две маленькие одинаковые бусинки, несущие на себе одинаковые электрические заряды, нанизаны на длинную гладкую горзонтальную непроводящую спицу. Если эти бусинки расположить на некотором расстоянии друг от друга и отпустить без начальной скорости, то расстояние между ними удвоится спустя время t. Через какое время τ расстояние между бусинками удвоится, если начальное расстояние между ними увеличить в k раз?

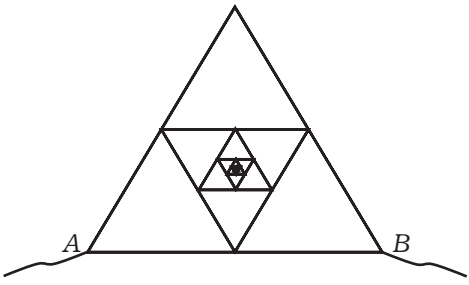


Рис. 14

7. Электрическая цепь составлена из бесконечного количества равносторонних треугольников так, как это показано на рис. 14. Каждый «последующий» треугольник присоединён к серединам соответствующих сторон «предыдущего». Определить сопротивление R такой цепи, включённой в сеть между точками A и B. Известно, что сопротивление каждой из сторон большого треугольника равно r. Сопротивление каждого проводника пропорционально его длине с одним и тем же коэффициентом пропорциональности для всех проводников.

Ответы

1. $F_C = F_A \dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} + F_B \cos^2\alpha.$

2. $E = \dfrac{4}{7}E_0.$

3. $B = \dfrac{1}{4}B_0.$

4. $\varphi_1 = \dfrac{1}{2}\varphi_0,\ \ \varphi_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varphi_0.$

5. $E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}E_0.$

6. $\tau = tk^{\frac{3}{2}}.$

7. $R = \dfrac{\sqrt{7}-1}{3}r.$