

Чивилёв Виктор Иванович
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики
Московского физико-технического института (МФТИ),
Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации,
заместитель председателя научно-методического совета
Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ,
член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Правило знаков в формуле тонкой линзы

В статье уточнены понятия действительных и мнимых источников и изображений в оптических системах. Уточнено понятие фокуса. Рассказано о правиле знаков в формуле тонкой линзы. На примерах решения конкретных задач показано применение правила знаков.

1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ИСТОЧНИКИ И ИЗОБРАЖЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Под *оптической системой* будем понимать линзу, плоское или сферическое зеркало, несколько линз, расположенных вплотную или на некотором расстоянии друг от друга, линзу и зеркало и т. д. Вообще говоря, под оптической системой можно понимать любую совокупность преломляющих и отражающих свет поверхностей.

Когда в оптике говорят об источнике (предмете) для оптической системы, то рассматривают падающие от источника на оптическую систему лучи. Если речь идёт об изображении в оптической системе какого-либо источника, то смотрят на вышедшие из системы лучи после преломлений и отражений падающих лучей (от источника на систему).

Пусть на оптическую систему (на рис. 1 и далее оптическая система изображена прямоугольником) падает расходящийся пучок лучей, пересекающихся в точке S (точнее, в точке S пересекаются направления этих лучей). В этом случае S называется *действительным источником (предметом)*. Оптическая система человеческого глаза встречается повседневно с такой ситуацией, когда есть небольшой реально (действительно) существующий светящийся предмет, который находится на пересечении самих падающих на глаз лучей. Любая точка реального предмета является действительным источником.

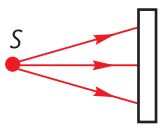

Рис. 1. Действительный источник

Если на оптическую систему падает сходящийся пучок лучей (рис. 2) и продолжения падающих лучей пересекаются в точке S, то S называется *мнимым источником* (предметом). Такое название связано с тем, что источник S находится не на пересечении самих падающих лучей, а на пересечении их продолжений, т. е. существует не реально, а фиктивно, мнимо. На рис. 3 приведён пример мнимого предмета S для оптической системы, полученного с помощью линзы.

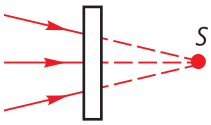

Рис. 2. Мнимый источник

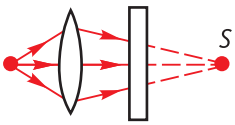

Рис. 3

Перейдём к изображениям. Пусть у оптической системы есть действительный или мнимый источник. Пусть падающие на систему лучи после преломлений и отражений выходят из системы сходящимся пучком лучей (рис. 4) и вышедшие лучи (точнее, направления вышедших лучей) пересекаются в точке S'. S' называется *действительным изображением*, поскольку для вышедших лучей есть реальная (действительная) возможность пересечься самим.

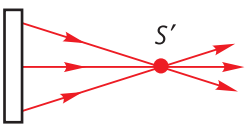

Рис. 4. Действительное изображение

Если из оптической системы вышел расходящийся пучок лучей (рис. 5) и продолжения вышедших лучей пересеклись в точке S', то S' называется *мнимым изображением*. Это название обусловлено тем, что изображение находится на пересечении не самих вышедших лучей, а на пересечении их продолжений, т. е. изображение существует фиктивно, мнимо.

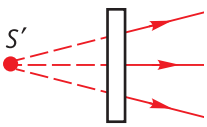

Рис. 5. Мнимое изображение

На рисунках 6–10 приведены примеры действительных и мнимых предметов и изображений в простейших оптических системах – линзе и плоском зеркале.

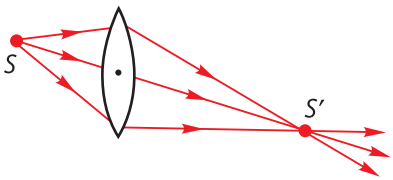

Рис. 6. Действительное изображение S' в линзе от действительного источника S

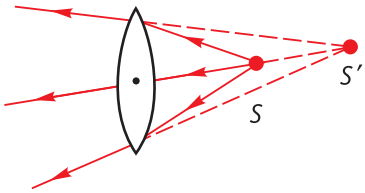

Рис. 7. Мнимое изображение S' в линзе от действительного источника S

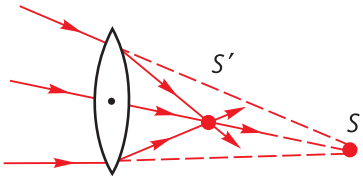

Рис. 8. Действительное изображение S' в линзе от мнимого источника S

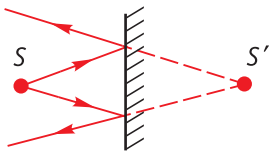

Рис. 9. Мнимое изображение S' в плоском зеркале от действительного источника S

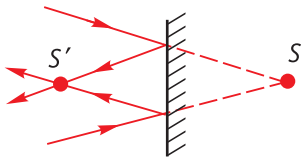

Рис. 10. Действительное изображение S' в плоском зеркале от мнимого источника S. Источник и изображение симметричны относительно плоскости зеркала, что следует из законов отражения

Замечание 1. Выше шла речь о точечных источниках и изображениях. Любой протяжённый источник может быть представлен как совокупность множества точечных источников. Изображение от протяжённого источника есть совокупность изображений от точечных источников и тоже протяжённым.

Замечание 2. В изложенном выше материале предполагалось, что изображение существует. Но могут быть случаи, когда в оптической системе нет изображения. Например, кусок стекла произвольной формы вряд ли даст изображение точечного источника.

2. ФОКУС СИСТЕМЫ

Пустим на оптическую систему параллельный пучок лучей. Если есть точка, где соберутся (пересекутся) вышедшие из системы лучи (или их продолжения), то она называется точкой фокуса, или просто фокусом. Множество точек фокуса даёт фокальную поверхность. Получить параллельный пучок лучей можно, поместив точечный источник в бесконечность (удалив достаточно далеко от оптической системы). Тогда можно сказать, что фокус (точка фокуса) есть изображение от бесконечно удалённого источника. Поэтому фокус, как и изображение, может быть действительным или мнимым. На рис. 11 показана оптическая система, у которой точки фокуса (фокусы) F_1 и F_2 действительные. Заметим, что эта оптическая система напоминает собирающую линзу.

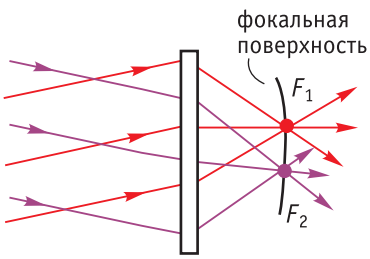

Рис. 11

На рис. 12 приведен пример выпуклого зеркала, у которого фокус F мнимый.

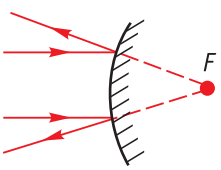

Рис. 12

Если в оптической системе есть так называемая *главная оптическая ось*, то фокус, лежащий на этой оси, называется *главным фокусом*, или просто фокусом. У линзы со сферическими поверхностями главная оптическая ось – прямая, проходящая через центры кривизны поверхностей.

Если на оптическую систему можно пускать параллельные пучки лучей с противоположных сторон, то у такой системы может существовать два главных фокуса, которые, вообще говоря, не симметричны относительно системы. Заметим, что у тонкой линзы фокусы симметричны.

3. ФОРМУЛА ТОНКОЙ ЛИНЗЫ. ПРАВИЛО ЗНАКОВ

Из законов преломления можно вывести формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \qquad (1)$$

Раскроем смысл и правило знаков для всех параметров в формуле. d – «расстояние» от предмета (источника) до линзы, $d>0$ для действительных предметов, $d<0$ для мнимых предметов. f – «расстояние» от изображения до линзы, $f>0$ для действительных изображений, $f<0$ для мнимых изображений. Естественно, что истинные расстояния от предмета и изображения до линзы положительны и равны $|d|$ и $|f|$. n – показатель преломления материала линзы относительно окружающей среды. Заметим, что в приведённой формуле полагается, что среда с обеих сторон одна и та же! R_1 – «радиус» кривизны одной из поверхностей линзы; $R_1>0$, если эта поверхность видится снаружи выпуклой, в противном случае $R_1<0$. Аналогичное правило знаков и для «радиуса» R_2 кривизны второй поверхности линзы. Истинные радиусы кривизны положительные и равны $|R_1|$ и $|R_2|$. Заметим, что для плоской поверхности у линзы радиус кривизны $R=\infty$ и $1/R=0$. «Расстояния» d и f берутся вдоль главной оптической оси линзы. Формула справедлива для изображений и предметов, связанных параксиальными лучами, т.е. лучами, составляющими малые углы с главной оптической осью линзы. Следует сказать ещё о том, что кавычки в словах «расстояние» и «радиус» обычно опускают, помня, что соответствующие величины не обязательно положительные.

Проиллюстрируем применение формулы (1).

Задача 1. На расстоянии 20 см от выпукло-вогнутой линзы в форме полумеся-

ца вблизи главной оптической оси находится песчинка. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}6$, линза в воздухе. Радиусы кривизны поверхностей равны 6 см и 9 см. Где и какое изображение песчинки получится в линзе?

Решение. Предмет (источник) S действительный, $d = 20$ см. Выпуклая поверхность линзы имеет меньший (по модулю) радиус кривизны, поэтому $R_1 = +6$ см. Вторая поверхность вогнутая и $R_2 = -9$ см (рис. 13). «Расстояние» f от изображения S' до линзы найдём из формулы линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Отсюда $f = -60$ см. Отрицательность f означает, что изображение мнимое. Заметим, что при расположении линзы вогнутой стороной к песчинке положение изображения и ответ не изменятся. Полезно отметить, что изображение S' можно увидеть, если расположить глаз правее линзы (рис. 13) и смотреть в сторону линзы.

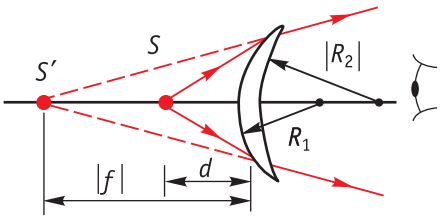

Рис. 13

Ответ: изображение мнимое, находится на расстоянии $|f| = 60$ см от линзы.

Найдём фокусное расстояние F тонкой линзы. Для этого обратимся к формуле (1), поместив источник в бесконечность и положив $d = \infty$. Тогда изображение получится в фокусе и расстояние f от этого изображения до линзы и будет фокусным расстоянием F, т.е. $f = F$. Формула (1) принимает вид:

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \qquad (2)$$

Смысл параметров n, R_1, R_2 и правило знаков для R_1 и R_2 в формуле (2) такие же, как и в формуле (1). Если при расчёте фокусного расстояния F по формуле (2) получится $F > 0$, то фокус, как частный случай изображения, оказывается действительным и линза называется собирающей (положительной). Если получится $F < 0$, то фокус мнимый и линза называется рассеивающей (отрицательной). Часто фокусное расстояние и точку фокуса (фокус) обозначают одной и той же буквой F, что не очень удобно. Но если это не вызывает недоразумений, то допустимо.

Параллельный пучок лучей можно пустить на линзу с двух сторон. Поэтому у линзы два фокуса с соответствующими фокусными расстояниями. Из формулы (2) следует, что фокусные расстояния равны. Поэтому у тонкой линзы два фокуса, расположенные на одинаковом расстоянии от плоскости линзы. Фокусное расстояние F тонкой линзы определяется формулой (2) и является важной характеристикой линзы. Величина $D = 1/F$ называется *оптической силой*.

Преобразуем формулу линзы (1) с учётом (2):

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}. \qquad (3)$$

Мы получили формулу тонкой линзы в виде (3). Смысл величин d и f и правило знаков для них такие же, как и в формуле (1). Подчеркнем еще раз, что правило знаков для фокусного расстояния F и «расстояния» от изображения до линзы f одинаковы, поскольку фокус есть изображение в линзе от бесконечно удалённого точечного источника. Сформулируем кратко *правило знаков для формулы тонкой линзы (3): для действительных предметов, изображений и фокусов соответствующие расстояния d, f и F положительны, для мнимых предметов, изображений и фокусов – отрицательны.* Заметим, что существуют и другие формы правила знаков.

Приведём примеры, иллюстрирующие правило знаков в формуле линзы.

Задача 2. Найти фокусное расстояние линзы из задачи 1.

Решение. По формуле (2)

$$\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Подставив $n=1{,}6$, $R_1=6$ см, $R_2=-9$ см, получаем $F=30$ см >0.

Ответ: линза собирающая с фокусным расстоянием $F=30$ см.

Задача 3. Лампочка находится вблизи главной оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см на расстоянии 30 см от линзы. Где и какое изображение лампочки получится в линзе?

Решение. Запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

У нас предмет действительный, $d=30$ см. Расстояние до изображения

$$f=\frac{dF}{d-F}=-12 \text{ см} <0.$$

Расположение предмета S, мнимого изображения S' и линзы показано на рис. 14. Заметим, что S, S' и оптический центр линзы O лежат на одной прямой, что справедливо для любых тонких линз и любых предметов и их изображений.

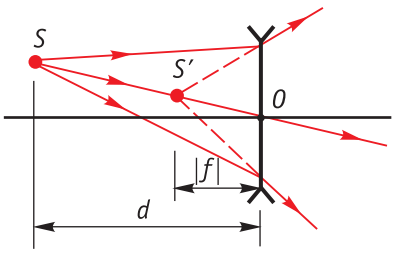

Рис. 14

Ответ: изображение мнимое на расстоянии $|f|=12$ см от линзы.

Задача 4. На линзу падает сходящийся пучок лучей в виде конуса с вершиной в точке A (рис. 15), попадающей на главную оптическую ось OA линзы. Из линзы выходит тоже сходящийся пучок лучей в виде конуса с вершиной в точке B. Найти фокусное расстояние линзы, зная, что $OA=20$ см, $OB=8$ см.

Решение. Точка A – мнимый предмет, $d=-OA=-20$ см. Точка B – действительное изображение, $f=OB=8$ см. Из формулы линзы

$$F=\frac{df}{d+f}\approx 5{,}7 \text{ см} >0.$$

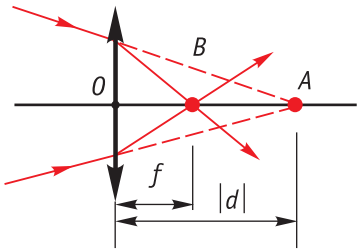

Рис. 15

Ответ: линза собирающая с фокусным расстоянием $F\approx 5{,}7$ см.

Задача 5. Показать, что в собирающей линзе изображение от действительного предмета будет мнимым, если предмет находится между линзой и фокусом.

Решение. Пусть d и f – расстояния от линзы до предмета и изображения, F – фокусное расстояние. Из формулы линзы

$$f=\frac{dF}{d-F}.$$

Требуется найти, при каких d будет $f<0$, т.е. решить неравенство

$$\frac{dF}{d-F}<0.$$

Так как $d>0$ и $F>0$, то $d-F<0$ и $d<F$. Это означает, что предмет должен находиться между линзой и фокусом.

4. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Задача 6. Собирающая и рассеивающая линзы с фокусными расстояниями $F_1=20$ см и $F_2=-14$ см имеют общую главную оптическую ось и расположены на расстоянии $L=20$ см друг от друга. На расстоянии $d_1=60$ см от собирающей линзы на главной оптической оси помещена кнопка. Собирающая линза находится ме-

жду кнопкой и рассеивающей линзой. Где и какое изображение кнопки получится в оптической системе из двух линз?

Решение. Кнопка – действительный источник S, её изображение S_1 в собирающей линзе находится на расстоянии f_1 от линзы. Из формулы линзы

$$f_1 = \frac{d_1 F_1}{d_1 - F_1} = 30 \text{ см} > 0.$$

Действительное изображение S_1 в собирающей линзе (рис. 16) является мнимым источником для рассеивающей линзы. Расстояние от S_1 до рассеивающей линзы

$$d_2 = -(f_1 - L) = -10 \text{ см} < 0.$$

В рассеивающей линзе источник S_1 даст изображение S_2 на расстоянии f_2 от линзы:

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}.$$

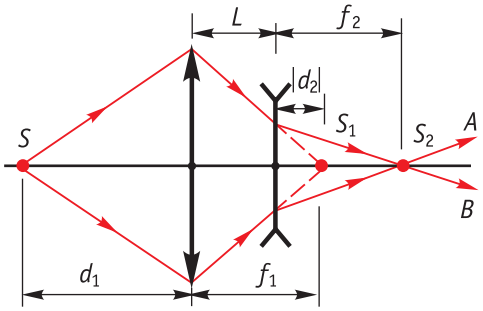

Рис. 16

Отсюда

$$f_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 - F_2} = 35 \text{ см} > 0.$$

Так как $f_2 > 0$, то изображение S_2 действительное. Заметим, что увидеть его можно при некоторых условиях только из области AS_2B.

Ответ: изображение в оптической системе действительное, находится на расстоянии $f_2 = 35$ см от рассеивающей линзы.

Задача 7. На главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см на расстоянии $d_1 = 30$ см от линзы находится бусинка. По другую сторону линзы на расстоянии $L = 20$ см от линзы расположено плоское зеркало перпендикулярно главной оптической оси. Где и какое изображение бусинки получится в этой оптической системе?

Решение. Бусинка – действительный источник S для линзы (рис. 17). Используя формулу линзы, находим расстояние f_1 до изображения S_1 в линзе:

$$f_1 = \frac{d_1 F_1}{d_1 - F_1} = 60 \text{ см} > 0.$$

Так как $f_1 > 0$, то изображение S_1 действительное. На зеркало падает сходящийся пучок лучей. Поэтому S_1 является мнимым источником для зеркала, находящимся на расстоянии

$$d_2 = f_1 - L = 40 \text{ см}$$

от зеркала. После отражения лучей от зеркала в зеркале получается действительное изображение S_2 тоже на расстоянии d_2 от зеркала. Отражённые от зеркала лучи падают на линзу сходящимся пучком лучей и S_2 служит мнимым источником для линзы. Расстояние от S_2 до линзы

$$d_3 = -(d_2 - L) = -20 \text{ см} < 0.$$

По формуле линзы найдём расстояние f_3 от линзы до изображения S_3, полученного в линзе от источника S_2:

$$\frac{1}{d_3} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда

$$f_3 = \frac{d_3 F}{d_3 - F} = 10 \text{ см} > 0.$$

Так как $f_3 > 0$, то изображение S_3 действительное. Оно и есть изображение в системе.

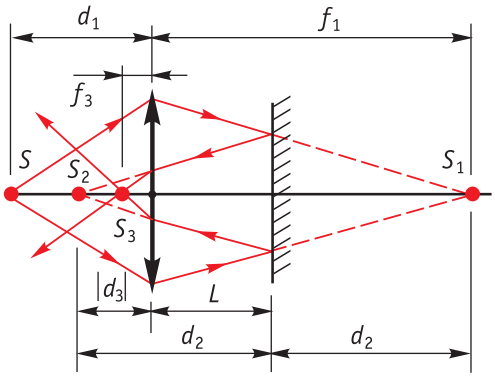

Рис. 17

Ответ: изображение действительное на расстоянии $f_3 = 10$ см от линзы.