

Саранин Владимир Александрович
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики и дидактики физики Глазовского государственного педагогического института.

Об одной задаче электростатики

Подробно рассмотрено решение задачи о взаимодействии двух разноимённо заряженных шариков, один из которых прикреплён к пружине и может двигаться, другой прикреплён к нити и неподвижен. Показано, что задача имеет нетривиальное решение: подвижный шарик может либо иметь одно устойчивое и одно неустойчивое положение, либо вообще не имеет положений равновесия. Найдены величины параметров, разделяющие эти виды решений (точка бифуркации).

В довольно популярном школьном задачнике [1] под № 11.39 приведена следующая задача: «Шарики A и B массой $m = 0{,}1$ кг каждый имеют одинаковые по модулю и противоположные по знаку заряды $q = 10$ мкКл. Шарик A подвешен на непроводящей пружине жёсткостью $k = 9{,}8$ Н/м над шариком B (рис. 1 *а*). В начальном положении сила кулоновского взаимодействия между шариками равна $4mg$. Верхний конец пружины медленно поднимают. На сколько надо переместить точку O, чтобы натяжение шёлковой нити BC стало равным нулю?».

Задача о движении верхнего шарика в такой системе имеет весьма поучительное решение [2]. Поэтому отвлечёмся пока от конкретных данных приведённой выше задачи и рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть оба шарика массой m противоположно заряжены одинаковыми по модулю зарядами q и в начальный момент времени удерживаются в таком положении, что пружина находится в свободном состоянии, то есть не растянута и не сжата (верхний шарик в положении A_0, рис. 1 *а*).

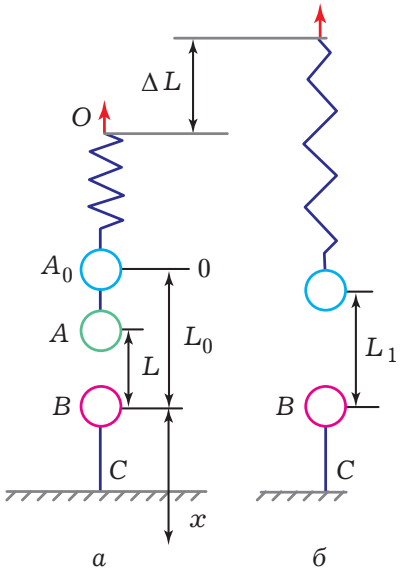


Рис. 1

Расстояние между центрами шариков L_0, верхний конец пружины жёстко зафиксирован, вместо нити BC – непроводящий жёсткий стержень. Нас будет интересовать движение верхнего шарика после того, как его отпустят. Для этого запишем сначала потенциальную энергию шарика A при его отклонении на величину X от начального положения (в нём потенциальную энергию будем считать равной нулю). Для простоты будем считать шарики точечными зарядами, расположенными в их центрах, а пружину подчиняющейся закону Гука во всём интервале движения шарика. Тогда потенциальная энергия равна

$$W(X) = -mgX + \frac{kX^2}{2} - \frac{k_e q^2}{(L_0 - X)} + \frac{k_e q^2}{L_0},$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

Как известно, потенциальная энергия определена с точностью до постоянной величины, которая позволяет выбрать начало отсчёта. Поэтому в выражение для потенциальной энергии (1) добавлено последнее слагаемое, позволяющее отсчитывать потенциальную энергию шарика от положения равновесия $X = 0$.

В полученном выражении четыре параметра: m, k, q, L_0, их значениями будет определяться поведение шарика A. Для уменьшения числа параметров физики часто используют так называемую процедуру обезразмеривания, то есть приведение выражения к безразмерному виду. Для этого нужно выбрать подходящие единицы измерения. Выберем, например, за единицу измерения длины L_0, а за единицу измерения потенциальной энергии $kL_0^2/2$. В безразмерном виде выражение (1) запишется так:

$$W(x) = -2Gx + x^2 - Q^2\left(\frac{1}{1-x} - 1\right),$$

$$G = \frac{mg}{kL_0},\ Q^2 = \frac{2k_e q^2}{kL_0^3},\ x = \frac{X}{L_0}. \qquad (2)$$

Теперь выражение для потенциальной энергии содержит всего два параметра G и Q^2. Для оценки этих параметров в рамках обсуждаемой задачи надо знать величину L_0. Она складывается из величины растяжения пружины ΔL и расстояния между центрами шаров в начальный момент времени L (по данным задачи). Будем считать, что в начальный момент времени по данным задачи верхний шарик находится в равновесии. Тогда

$$k\Delta L = mg + 4mg = 5mg,$$

$$\frac{k_e q^2}{L^2} = 4mg. \qquad (3)$$

Из этих уравнений находим $\Delta L = 0{,}5$ м, $L \approx 0{,}48$ м. Получаем:

$$L_0 = L + \Delta L \approx 0{,}98\,\text{м}. \qquad (4)$$

Подставляя полученное значение в последние два выражения (2), найдём:

$$G \approx 0{,}10,\ Q^2 \approx 0{,}20. \qquad (5)$$

Теперь можно построить график зависимости потенциальной энергии от координаты центра верхнего шарика $W(x)$. Соответствующая кривая изображена линией 1 на рис. 2.

Согласно условиям задачи, в начальный момент времени шарик находился в положении

$$x_1 = \Delta L/L_0 \approx 0{,}51.$$

И действительно, на кривой в этой точке достигается локальный максимум, в котором сила, действующая на шарик, равна нулю:

$$\partial W / \partial x = |F| = 0,$$

то есть шарик находится в положении равновесия. Но это положение равновесия абсолютно неустойчиво! При малейшем возмущении шарик

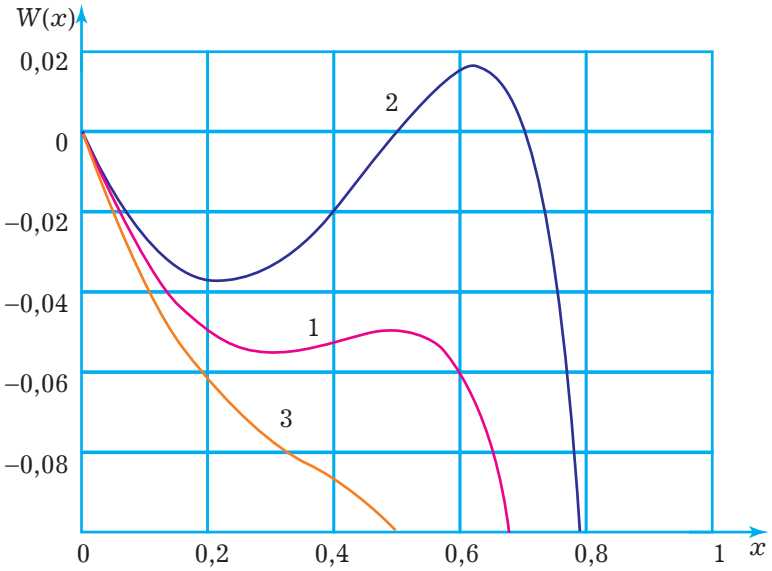


Рис. 2

скатится как с горки из этого положения влево либо вправо. Устойчивым положением равновесия шарика является точка локального минимума потенциальной энергии, то есть точка с координатой $x_2 = 0{,}3$. В связи с такой возможностью неоднозначного поведения верхнего шарика представляет интерес исследовать его возможную динамику при других значениях параметров. При этом зафиксируем параметр G, поскольку он связан с постоянной по величине силой тяжести и, как можно показать (см. ниже), не имеет решающего влияния на динамику шарика. Графики зависимости потенциальной энергии от координаты при $Q_1^2 = 0{,}15$ и $Q_2^2 = 0{,}25$ показаны на рис. 2 кривыми 2 и 3 соответственно.

Какова же возможная динамика верхнего шарика в соответствии с тремя полученными зависимостями? Для простоты предположим, что сопротивление движению шарика мало, будем считать также, что в начальный момент времени шарики заряжены как было сказано, и шарик A начинает движение из положения A_0. Тогда при $Q^2 = Q_1^2$ верхний шарик дойдёт практически до уровня $W = 0$ с координатой $x \approx 0{,}5$ и в конце своего движения остановится в положении равновесия в точке с координатой $x \approx 0{,}22$. При $Q^2 = 0{,}2$ и малом трении шарик преодолеет потенциальный барьер (локальный максимум) и столкнётся с шариком B. При достаточно большом трении шарик может в конце своего движения остановиться в положении равновесия $x \approx 0{,}3$. Наконец, при $Q^2 = Q_2^2$ верхнего шарика ждёт неизбежное столкновение с нижним.

Теперь представляет интерес выяснить, при каком значении параметра Q^2 теряется положение устойчивого равновесия, то есть исчезает локальный минимум потенциальной энергии. Для этого найдём выражение для силы, действующей на верхний шарик, используя соотношение между силой и потенциальной энергией:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}. \qquad (6)$$

Будем измерять силу в единицах $kL_0/2$, а координату по-прежнему в единицах L_0. Тогда из (2) и (6) получим:

$$F_x = 2G - 2x + \frac{Q^2}{(1-x)^2}. \qquad (7)$$

В равновесии, то есть в точках локальных экстремумов, $F_x = 0$. Получающееся из этого условия уравнение относительно x – кубическое.

Решение его найти непросто, поэтому для дальнейшего анализа выразим в этом уравнении Q^2. Получаем

$$Q^2 = 2(1-x)^2(x-G). \qquad (8)$$

Так как $G \le x \le 1$ и в крайних точках этого интервала Q^2 обращается в ноль, то где-то в промежутке значение Q^2 должно достигать максимума. Найдём это положение, взяв производную от правой части (8) и приравняв её к нулю. Простые выкладки, которые читатель может проделать сам, приводят к результату

$$x_m = \frac{1+2G}{3}, \quad Q_m^2 = \frac{8}{27}(1-G)^3. \qquad (9)$$

График зависимости $x(Q^2)$, построенный по (8), показан на рис. 3. Видно, что при $Q^2 < Q_m^2$ имеются два решения уравнения (8) (или $F_x = 0$), соответствующие устойчивому (нижняя ветвь) и неустойчивому (верхняя ветвь) положениям равновесия шарика. Точка b с координатами $(Q_m^2,\ x_m)$ называется точкой бифуркации – она разделяет область параметров, где есть положения равновесия, от области, где их нет. Вообще бифуркация – это раздвоение чего-нибудь на две ветви (например, бифуркация русла реки). Бифуркация – термин, часто встречающийся в теории колебаний, синергетике, теории катастроф. Бифуркация может происходить как при уменьшении управляющего параметра (в нашем случае), так и при увеличении.

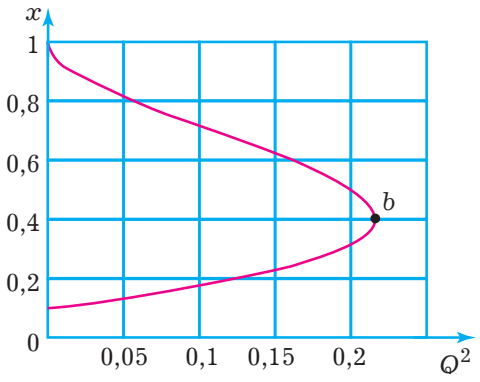


Рис. 3

Вернёмся к исходной задаче из задачника [1]. Теперь ясно, что условие задачи не совсем корректно. Тянуть вверх пружину не надо, если «повезёт», она сама будет возвращать шарик назад в положение устойчивого равновесия (если не «повезёт», верхний шарик столкнётся с нижним). Предположим, что «повезло», тогда при малом трении шарик поднимется вверх до уровня первоначальной потенциальной энергии, то есть дойдёт до точки с координатой $x_1 = 0{,}2$. Для того чтобы натяжение нити стало равным нулю, расстояние между центрами шариков L_1 должно удовлетворять условию

$$mg = \frac{k_e q^2}{L_1^2}. \qquad (10)$$

Отсюда

$$L_1 = \sqrt{\frac{k_e q^2}{mg}} \approx 0{,}96 \text{ м}. \qquad (11)$$

Видим, что этому значению L_1 соответствует координата x, близкая к нулю, поэтому пружину дей-

ствительно надо подтянуть вверх, чтобы удовлетворить условию (10). Допустим, что её надо подтянуть на величину ΔL (рис. 1 *б*). Тогда из рис. 1 *а*, *б* имеем

$$\Delta L = L_{00} + \Delta L_1 + L_1 - (L_{00} + L_0), \quad (12)$$

где L_{00} – собственная длина пружины, ΔL_1 – растяжение пружины в состоянии *б* рис. 1. Из (12) нетрудно получить ответ:

$$\Delta L = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k_e}{mg}} - \frac{3mg}{k} \approx 0{,}18 \text{ м}, \quad (13)$$

который и приведён в задачнике [1].

Но главное не в получении ответа, а в выяснении динамических свойств системы «заряженный шарик на пружине рядом с противоположно заряженным шариком», которую можно назвать пружинным электростатическим маятником. Как оказалось, такой маятник обладает интересными свойствами: у него существуют области параметров, в которых могут быть либо два положения равновесия, либо ни одного (в этом случае говорят о потере устойчивости), разделяет эти области точка бифуркации.

К электростатическому маятнику с аналогичными свойствами можно отнести и одиночный заряженный шарик вблизи заземлённой проводящей пластины (рис. 4). В такой пластине формируется зеркально отображённый заряд, который имеет противоположный знак (подробно о методе электрических изображений можно прочитать, например, в книге [3]). Более того, как это обычно бывает в электромагнетизме, у электростатического маятника имеется хорошо известный магнитный аналог: это провод длиной l с током I_1, подвешенный на двух пружинах и расположенный параллельно бесконечному проводнику с током I_2 (рис. 5, подробно об этой задаче можно прочитать, например, в книге [4]). Возможны такие же движения верхнего провода, как и у рассмотренного выше заряженного шарика.

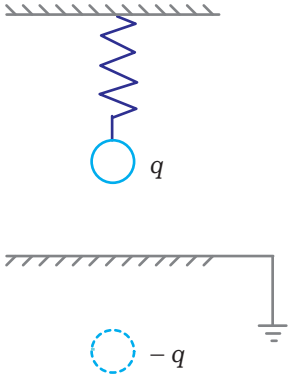


Рис. 4

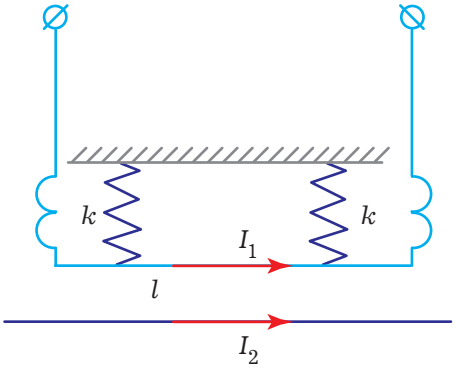


Рис. 5

Покажем теперь, что сила тяжести не играет никакой роли в характере движения верхнего шарика. Для этого сделаем следующие преобразования выражения для силы (7):

$$y = x - G,$$

$$F_x = -2y + \frac{Q^2}{(1-G-y)^2} = -2y + \frac{Q^2/(1-G)^2}{(1-z)^2} = (1-G)\left(-2z + \frac{Q^2/(1-G)^3}{(1-z)^2}\right), \quad (14)$$

$$z = \frac{y}{1-G} = \frac{x-G}{1-G}.$$

Сделаем единицей измерения силы величину $kL_0^2/2(1-G)$ и введём новый управляющий параметр

$$\tilde{Q}^2 = Q^2/(1-G)^3,$$

тогда получим

$$\tilde{F}_x = -2z + \frac{\tilde{Q}^2}{(1-z)^2}. \qquad (15)$$

В перенормированных переменных выражение для силы в точности совпадает с выражением для силы (7) при $G = 0$, что соответствует отсутствию силы тяжести. Интересно отметить, что бифуркационное значение нового управляющего параметра равно

$$\tilde{Q}_m = (2/3)^{3/2}.$$

Литература

1. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы/Авт.-сост. *Н.В. Турчина, Л.И. Рудакова, О.И. Суров и др.* – М.: Дрофа, 2000. – 672 с.

2. *Саранин В.А.* Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 332 с.

3. *Саранин В.А.* Метод электрических изображений в задачах экспериментах. Монография, изд. 2-е, испр. и доп. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. – 118 с.

4. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Сеть для «ловли» автомобиля



На железнодорожных переездах часто происходят трагические аварии из-за того, что водитель автомобиля надеется успеть, обогнув шлагбаум, проехать раньше приближающегося поезда. Но не всем это удаётся...

Американский изобретатель Мэтью Гельфанд создал устройство, препятствующее водителю выскочить на переезд, когда вскоре по нему должен проехать состав. Идея будущей установки возникла у него при просмотре по телевизору, как специальной сетью останавливают самолёт, севший на палубу авианосца. Сетку он решил применить и для остановки автомобиля.

Изготовленная из высокопрочного кеврала (волокна, которое применяется в бронежилетах) сеть укладывается в сложенном виде в узкую щель в дорожном покрытии на некотором расстоянии до шлагбаума и выталкивается из неё мгновенно (за три секунды) при срабатывании фотоэлемента, если его минует автомашина. Укреплённая на мощных амортизаторах сетка, оказавшись на её пути, поглощает энергию удара и останавливает машину.



Кроме железнодорожного ведомства, задерживающее автомобили «на ходу» устройство сразу же заинтересовало и службы безопасности – как средство защиты от прорыва террористов на ту или иную территорию. Первая установка такого рода появилась перед Музеем военно-морского флота США.