

Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук,
доцент, Лаборатория по работе с одаренными детьми МФТИ

Об объёме смеси воды и спирта, а также смеси сыпучих материалов. Часть 1

Рассказано об уменьшении объёма смеси воды и спирта (по сравнению с начальной суммой объёмов компонент). Предложена простая «теория» такого уменьшения. Она применена к сыпучим веществам, для которых проведены простые эксперименты. Согласие «теории» и эксперимента не идеальное, но хорошее. Обсуждаются возможные недостатки предложенной «теории».

Введение

Современный школьник (уже 7-классник — наверное), безусловно, знаком с идеей атомного строения вещества [1], хотя сами атомы или молекулы (комбинации атомов) видел, скорее всего, лишь на картинках — и то в виде моделей.

Каковы причины того, что учёные не просто верят в атомную гипотезу, но могут, как они утверждают, изменять по своему усмотрению строение молекул и создавать новые молекулы нужного строения, — это тема отдельного разговора. Школьник об этом может лишь догадываться и верить взрослым.

Есть, впрочем, экспериментальные данные доступные даже школьнику, которые, — стоит лишь чуть-чуть поразмышлять! — легко убедят и школьника в факте существования атомов и молекул. Не станем здесь говорить о целочисленных соотношениях в химии (в химические реакции разные вещества всегда входят в одних и тех же массовых долях; оценить такое сходу нелегко и взрослому с высшим образованием).

Но есть и другие хорошо и всем известные опытные данные в пользу атомной гипотезы. Каждый из нас много раз в жизни накачивал велосипедные камеры. Задумывались ли вы, что происходит с воздухом в корпусе насоса, когда вы двигаете поршень? — Газ, очевидно, сжимается в несколько раз. Простейшее объяснение этого таково. Между молекулами воздуха существуют большие пустоты. Сжимая газ, мы уменьшаем расстояние между ближайшими молекулами (впрочем, и в среднем меж-

ду любыми молекулами, а не только между ближайшими). Впервые такое объяснение сжимаемости газов дал Р. Бойль (1627–1691). Можно, конечно, предположить, что при этом сжимаются и сами молекулы, но это уже гипотеза более высокого порядка; реально атомы и молекулы при их контакте друг с другом деформируются незначительно [2].

1. Постановка задачи

Имеются и другие легко доступные каждому факты. О них рассказывают реже, но это не секретные данные. Известно, что если смешать 50 мл воды и 50 мл этилового спирта, то получится не 100 мл смеси, а немного меньше, 96 мл. Данные можно взять из Интернета; автор доверяет книге О.Ф. Кабардина 2005 г. [3]. Это явление носит название контракции (стягивания, сжатия). Его изучал еще наш великий соотечественник Д.И. Менделеев в своей докторской диссертации 1865 г. «О соединении спирта с водой» [4].

Понятно, что если взять в 2 раза больше воды и спирта, то получится в 2 раза больше смеси: 100 мл + + 100 мл → 192 мл (если взять в два раза меньше, то будет в 2 раза меньше смеси: 25 мл + 25 мл → 48 мл).

А что будет, если взять 100 мл воды и 50 мл спирта? Или, наоборот, — 50 мл воды и 100 мл спирта? И вообще — взять любые соотношения воды и спирта. Какой объём смеси получится? Попробуем разобраться.

Почему объём смеси вообще получается меньше суммы объёмов компонентов? — Простейшее молекулярное объяснение этого такое: более мелкие молекулы воды (H_2O) проникают в промежутки между большими молекулами спирта (C_2H_5OH). Мы будем придерживаться такой модели.

Реально положение дел сложнее: могут измениться и расстояния между большими молекулами. А это уже не просто математика. Это — сложная физика. Почему происходит увеличение или уменьшение расстояния между молекулами? Каковы механизмы этого? Какие силы между молекулами делают расстояние между ними «нужным»? — Автор статьи пока не знает, как учесть возможное изменение расстояния между молекулами.

Химики не без оснований утверждают, что происходит не просто перемешивание одних молекул с другими, но имеет место химическая реакция между водой и спиртом с выделением тепла (последнее легко заметить в экспериментах). Физики добавят, что имеет место еще и сильное электростатическое взаимодействие молекул воды и спирта (молекулы воды обладают большим дипольным моментом).

Ясно, что всего нам в рамках школьного курса физики не учесть. Сделаем возможное — учтем то, что проще учесть. Но проведем еще и эксперименты. Экспериментировать будем всё же не со спиртом и водой, а с сыпучими веществами — с частицами разного размера, которые будут моделировать молекулы разного размера (большие и маленькие) [3].

2. «Теория»

Сначала — простейшая теория автора (явно, много всего не учитывающая, поэтому автор готов взять слово «теория» в кавычки).

Предположим, что эксперимент показал, что если смешать Vo мл воды и такой же объём спирта, то получится $k \times 2Vo$ мл смеси, причем, $k < 1$ (конкретно для воды и спирта $k = 0{,}96$ [3]).

Заметим, что уменьшение объёма по сравнению с ожидаемым $2Vo$ есть

$$\Delta Vo = 2Vo - k \times 2Vo = (1 - k)2Vo,$$

где $1 - k = 0{,}04$.

Спросим себя: если взять такое же количество спирта, но вдвое больше воды, то сколько маленьких молекул воды может принять в себя спирт (в промежутки между своими большими молекулами)? — Ответ напрашивается: ровно СТОЛЬКО ЖЕ. Свободных мест между молекулами спирта не прибавилось!

Итак,

$$2Vo \text{ воды} + Vo \text{ спирта} \to 3Vo - (1 - k)2Vo = 3Vo - 0{,}08Vo = 2{,}92Vo.$$

Для наглядности можно считать, что в такой модели уменьшение объёма смеси по сравнению с суммой объёмов компонентов — это уменьшение объёма воды (часть ее проникает в спирт).

А если спирта взять в 2 раза больше? — Количество свободных мест в нем будет в 2 раза больше.

Например,

$$Vo \text{ воды} + 2Vo \text{ спирта} \to 3Vo - (1-k)4Vo = 3Vo - 0{,}16\,Vo = 2{,}84Vo.$$

В общем случае, если смешать воду объёмом V и спирт объёмом υ, то уменьшение объёма по сравнению с ожидаемым $V + \upsilon$ будет равно

$$(\upsilon/Vo)\,\Delta Vo = (\upsilon/Vo)(1 - k)\,2Vo = (1 - k)\,2\upsilon.$$

Суммарный объём смеси будет равен

$$V \text{ воды} + \upsilon \text{ спирта} \to V \text{ смеси} = V + \upsilon - (1-k)\,2\upsilon. \qquad (*)$$

Разумеется, приведенные соображения нельзя считать выводом соотношения (*). Эти соображения слишком много всего не учитывали. — Важного или нет, заранее не скажешь. А оценить разные факторы непросто.

Автор не сразу рассмотрел и следующий большой недостаток формулы (*): невозможно провести предельный переход к случаю, когда воды много меньше, чем спирта, $V << \upsilon$, или формально $V \to 0$: объём смеси должен получится просто равным объёму спирта υ, а по формуле (*) выходит $(2k - 1)\upsilon$. Кстати, предельный случай $\upsilon \to 0$ (очень мало спирта) формула (*) описывает правильно: объём смеси будет равен объёму воды V.

В формулу (*) вода и спирт входят сильно не симметрично. Попробуем устранить этот дефект: положим

$$V \text{ смеси } (\upsilon, V) = V + \upsilon - 2(1-k) \times \begin{cases} \upsilon, & \text{если } \upsilon < V, \\ V, & \text{если } V < \upsilon. \end{cases} \qquad (**)$$

В этом случае оба предельных перехода получаются правильными:

$$V \to 0 \Rightarrow V\text{смеси} \to \upsilon \text{ и}$$

$$\upsilon \to 0 \Rightarrow V\text{смеси} \to V.$$

Именно формула (**) будет главной расчетной формулой нашей «теории». Автор отдает себе отчёт в том, что настоящего теорфизического вывода этой формулы здесь не было. Виден и явный изъян формулы: излом кривой в точке $\upsilon = V$ (V спирта = $= V$ воды).

Применим все же формулу (**) и к смесям сыпучих веществ, для которых легко провести эксперимент со школьниками.

3. Эксперименты с сыпучими материалами

Первый опыт автора статьи с колотым горохом и пшеном оказался неудачным: увидеть уменьшение объёма смеси по сравнению с суммой объёмов компонентов, можно сказать, не удалось; см. рис. 1. (Автор не выдающийся оптимист).

Зато, если вместо колотого гороха взять фасоль (фасолины крупнее горошин), а вместо пшена — манку (отдельные ее частицы меньше пшеничных зерен), то эксперимент показывает значительное уменьшение объёма смеси по сравнению с суммой объемов отдельных компонентов; см. рис. 2–4.

Результаты простых вычислений (вполне доступных школьникам 7-8 классов) представлены в таблице, в которой приведены и ожидаемые значения объёмов смесей (полученные по формуле (**)), и эти же величины, полученные в экспериментах.

Для пары «фасоль-манка» коэффициент k теории оказался равным

$$k = 0{,}825, \text{ т.е. } 1-k = 0{,}175.$$

Это значение было получено при смешивании 100 мл манки и 100 мл фасоли. Объём смеси оказался не 200 мл, а всего ≈ 165 мл. Это

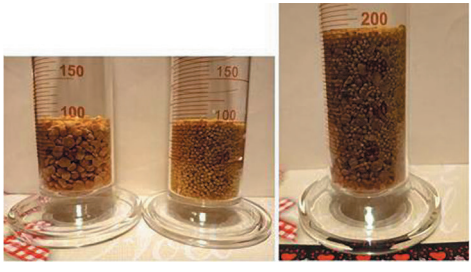


Рис. 1, а-б

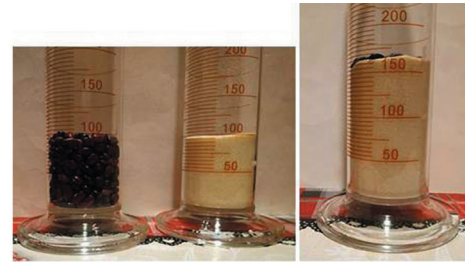


Рис. 2, а-б

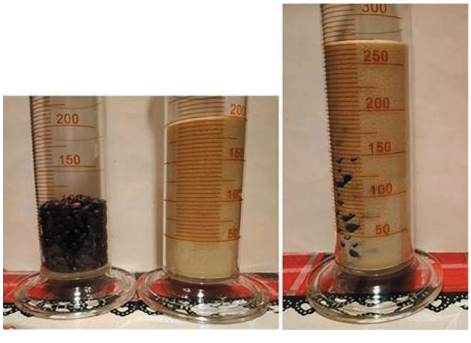


Рис. 3, а-б

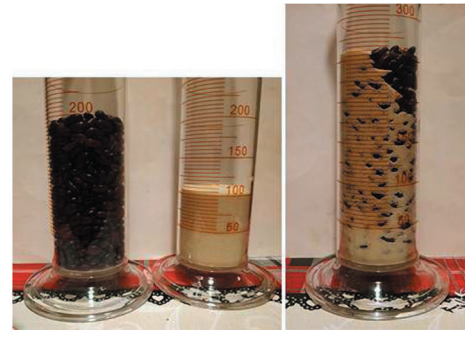


Рис. 4, а-б

Таблица

манка, объём V, мл	фасоль, объём v, мл	объём смеси, эксперимент, мл	k $1-k$	объём смеси, «теория», мл	расхождение теории и эксперимента
100	100	165	$k=\frac{165}{200}=0{,}825$ $1-k=0{,}175$		
200	100	275		265 [1)]	$1-\frac{265}{275}\approx 0{,}036$ $\approx 4\%$
100	200	260		265 [1)]	$\left\|1-\frac{265}{260}\right\|\approx 0{,}019$ $\approx 2\%$

[1)] $200+100\to 300-2\cdot 0{,}175\cdot 100=265$.

можно было трактовать так, что 35 мл манки проникло в пустоты между отдельными фасолинами. (О погрешности см. еще задачу 2 в конце статьи).

Ожидалось, что если взять те же 100 мл фасоли, но 200 мл манки, то по-прежнему в пустоты фасоли проникнут те же 35 мл манки. В результате объём смеси будет равен

$$200+100-35=265 \text{ мл.}$$

Эксперимент показал значение близкое к ожидаемому, но все же другое, 275 мл. Правда, отличие друг от друга двух значений невелико $1-265/275\approx 0{,}04$ (4%).

Такое согласие «теории» и эксперимента можно считать вполне хорошим, если к тому же принять во внимание экспериментальные погрешности. Во-первых, мы могли недостаточно хорошо перемешать компоненты, а кроме того, имея дело с фасолью, с ее крупными отдельными частицами, затруднительно было измерить начальный объем всей фасоли (граница была крайне неровной).

Еще лучше оказалось согласие опытных и «теоретических» значений в том случае, когда фасоли взяли вдвое больше, чем манки. Эксперимент показал значение объёма смеси скорее близкое к 260 мл. Расхождение с теорией здесь $|1-265/260|\approx$ $\approx 0{,}019$ (2%).

Это совсем неплохо, учитывая простоту (почти примитивность) «теоретической» модели, и возможные погрешности эксперимента. (Напомним, что граница фасоли чрезвычайно неровная, что не гарантирует хорошей точности в определении начального объема фасоли).

Есть и еще один дефект «теории», о котором говорилось ранее: частицы манки могли увеличить средние расстояния между отдельными фасолинами. Учесть этот эффект школьными методами не представляется возможным. Это совсем не просто и в рамках Высшей Физики. Во всяком случае, автор, много лет проработавший в Институте атомной энергии им. Курчатова в качестве физика-теоретика, сходу не знает, как учесть этот эффект.

Все же предложенная модель и «теория» на ее основе, видимо,

не так плохи, если дают расхождение с опытом в 2% или 4%. Во всяком случае, у школьников возникнет представление о том, какие эффекты «теория» учитывает, а какие нет. К тому же сам эксперимент тоже провести совсем не сложно средствами школьной лаборатории.

Задача 1 для самостоятельного рассмотрения. Зная плотности ρ воды и этилового спирта (1 г/см^3 и 0,79 г/см^3), оцените среднее расстояние между ближайшими молекулами в воде и в спирте. Это даст представление о размерах молекул H_2O и C_2H_5OH. **Указание:** Пользуясь таблицей Менделеева, вычислите молярные массы μ воды и спирта. Затем вычислите массу одной их молекулы по формуле $m_1 = \mu / N_A$, где N_A — число Авогадро. Далее по формуле $\rho = n \cdot m_1$ оцените концентрацию молекул n, а по формуле $d = n^{-1/3}$ — среднее расстояние между ближайшими молекулами.

Ответ. $d_1 = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м (вода), $d_2 = 4{,}6 \cdot 10^{-10}$ м (спирт).

Задача 2 для самостоятельного рассмотрения. Какова цена Δ деления шкалы на колбах рис. 1-4? Оцените минимальную (приборную) погрешность (абсолютную δ и относительную ε) в определении объёмов на рис.1 и коэффициента k.

Ответ. $\Delta = 5$ мл, $\delta = \pm\ 2{,}5$ мл, $\varepsilon = 2{,}5\%$, $k = 0{,}83 \pm 0{,}02$.

Литература

1. Лукьянов А.А. Откуда есть пошла атомная теория? // Потенциал, Декабрь, 2018, №12, с. 2–20
2. Лукьянов А.А. О двойных и тройных столкновениях молекул в воздухе // Потенциал, Август, 2022, № 8, с. 31–37
3. Кабардин О.Ф. История физики и развитие представлений о мире: 10–11 класс: учеб. пособие. — М.: АСТ: Астрель: Транзиткнига, 2005. — 318 с. (стр.20)
4. Кушнарев А.А. Дмитрий Менделеев: «Какой я химик?». — М.: Майор: Осипенко, 2017. — 192 с. (Серия книг «Неформальная биография»)

НОВОСТИ

Учёные МФТИ оценили готовность площадки энергополигона на Ямале

Делегация МФТИ завершила рабочую поездку на Полярный Урал, где в Нефритовой долине создается инфраструктура водородного энергополигона в рамках трёхстороннего соглашения между МФТИ, Минобрнауки РФ и правительством ЯНАО.

В 2026–2027 годах регион обеспечивает подготовку площадки и энергоснабжение, а МФТИ как головной научный интегратор приступает к поставке и монтажу исследовательского оборудования по проекту «Чистая энергетика». Учёные проверили ход работ: завершена разметка территории и подготовка участков под вагон-городок для исследователей.

Энергополигон и международная арктическая станция «Снежинка» станут автономными экологичными кластерами, работающими на водородных элементах, ветрогенераторах и солнечных панелях. Научная программа включает испытания энергоустановок, беспилотников, водородного транспорта и новых материалов в суровых арктических условиях.

Источник: https://mipt.ru/news