Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент,
лаборатория по работе с одаренными детьми МФТИ



О задачах, которые мы откладываем, чтобы додумать потом

Рассмотрены две задачи: 1) о поршне, выдавливающем жидкость из широкого горизонтального цилиндра через малое отверстие, и 2) об истечение жидкости из широкого вертикального открытого цилиндрического сосуда через малое отверстие внизу. Рассмотрены начальные (нестационарные) стадии движения жидкости, которые невозможно описать в рамках уравнения Бернулли.

Введение

Будем откровенны, у каждого из нас, изучавших разнообразные науки в школе и в вузе (математику, физику, химию, биологию), осталось немало «темных мест» в каждой из них. Сами для себя мы без труда вспомним десятки примеров этого. Науку (или какой-то ее раздел) прошли вроде и не совсем мимо, но «дыры в анализе» остались. Все мы на собственных примерах знаем, как временно приходится мириться с тем, что какие-то места в любом разделе любой науки остаются недопонятыми. Что ж, процесс обучения кусочно-непрерывен.

Вопросы, которые автор намерен обсудить сегодня, возникли у него лет 50 назад, когда он еще был студентом, но ответы на них были получены и опубликованы много позже – в статье [1]. Предлагаемый автором метод рассмотрения не чересчур сложен (не многим сложнее первых для школьников задач на применение производных в физике).

Речь пойдет о двух близких задачах гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, давно вошедших в курсы общей физики не только физических, но и технический вузов. Конкретно поговорим о следующих задачах: 1) о поршне, выдавливающем жидкость из цилиндра через малое отверстие (велосипедный насос, спринцовка), и 2) об истечение жидкости из вертикального цилиндрического сосуда через малое отверстие внизу.

1. Задача о поршне, выдавливающем идеальную несжимаемую жидкость из цилиндрического сосуда через небольшое отверстие

Задача [2]. *Площадь поршня, вставленного в горизонтально расположенный заполненный жидкостью цилиндр, равна S, а площадь отверстия* $s \ll S$ *(см. рис.1). Пренебрегая массой поршня, а также трением и вязкостью, определить время, за которое вся жидкость будет выдавлена из цилиндра, если на поршень подействовать силой F. Ход поршня равен L.*

1.1. Стандартное решение задачи о поршне

Стандартное решение основано на использовании уравнения Бернулли, примененного для линий тока, идущих от поршня к отверстию:

$$p_0 + \frac{F}{S} + \frac{\rho u^2}{2} = p_0 + \frac{\rho \upsilon^2}{2}, \quad (1.1)$$

где p_0 – наружное (атмосферное) давление, ρ – плотность жидкости, u – скорость движения поршня, υ – скорость истечения жидкости из отверстия. Эти скорости связаны уравнением неразрывности

$$u S = \upsilon s; \quad (1.2)$$

под s здесь (и в следующей задаче) следует понимать не площадь сечения, но (вследствие известного эффекта «сжатия» струи вблизи отверстия (рис.2)) некую «эффективную» площадь, составляющую 0,61–0,64 от геометрической площади. Физически наиболее интересен случай (легко реализуемый в эксперименте)



Рис. 1

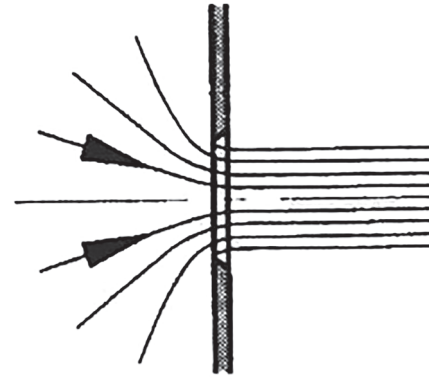


Рис. 2

отвечает сильному неравенству $k = S/s \gg 1$.

Совместное решение уравнений (1.1-2) дает известное решение (далее мы будем называть его решением в приближении уравнения Бернулли)

$$\upsilon \equiv \upsilon_B = \sqrt{\frac{2\Delta p/\rho}{1-1/k^2}} \approx \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \quad (1.3)$$

$$u \equiv u_B = \sqrt{\frac{2\Delta p/\rho}{k^2-1}} \approx \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \frac{s}{S}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \quad (1.4)$$

где $\Delta p = F/S$ – избыточное давление в жидкости, связанное с действием на поршень силы F. Время, за которое вся жидкость будет выдавлена из цилиндра, находится по формуле

$$t_0 = \frac{L}{u} \approx L\frac{S}{s}\sqrt{\frac{\rho}{2F/S}}. \qquad (1.5)$$

В дальнейшем нам для сравнения понадобится выражение для «удельной кинетической энергии жидкости в цилиндре», которое в приближении уравнения Бернулли имеет вид

$$w = \frac{u^2}{2} = \frac{\Delta p/\rho}{k^2 - 1} \equiv w_B \approx \frac{1}{k^2}\frac{\Delta p}{\rho} =$$

$$= \frac{s^2}{S^2}\frac{\Delta p}{\rho}. \qquad (1.6)$$

Для случая, когда скорость жидкости в цилиндре одинакова в разных точках (в пренебрежении «сжатием струи») величина $w = \frac{u^2}{2}$ есть кинетическая энергия жидкости, отнесенная к единице массы.

Проведем еще числовую оценку в условиях задачи 9-6 [2] о спринцовке:

$$S = 1{,}2\ \text{см}^2 = 1{,}2\times 10^{-4}\ \text{м}^2,$$

$$s = 1\ \text{мм}^2 = 10^{-6}\ \text{м}^2,\ L = 4\ \text{см} = 0{,}04\ \text{м},$$

$$F = 5\ \text{Н},\ \rho = 10^3\ \text{кг/м}^3\ \text{(вода)}.$$

При этом имеем: $k = S/s = 120$, $\Delta p = F/S = 4{,}2\times 10^4$ Па $\approx$ 0,4 атм, $\upsilon \approx 9$ м/с, $u \approx 8$ см/с $= 0{,}08$ м/с, $t_0 = 0{,}53$ с, $w = 0{,}003\ \text{м}^2/\text{с}^2$.

1.2. Неприятности в стандартном решении задачи о поршне и новое решение задачи

Что же в приведенном решении задачи, по мнению автора, неудовлетворительно? Во-первых, то, что к явно *нестационарному* процессу было применено уравнение Бернулли, справедливое, строго говоря, лишь для *стационарных* процессов. Вторая неприятность состоит в том, что согласно (1.4) скорость движения жидкости в цилиндре всё время постоянна, а это значит, что жидкость *мгновенно* (сразу после начала действия на поршень силы F) приобретает *отличную от нуля* скорость u (1.4). Никакого переходного процесса не рассматривается.

В литературе автор нашел лишь одну книгу [3], где обсуждаемый далее вопрос не решается, но хотя бы фиксируется (см. стр.32–33): «*Когда мы начинаем прилагать силу, поршень и непосредственно контактирующая с ним жидкость должны приобрести ускорение. Однако довольно скоро, если сила остается постоянной, будет достигнуто стационарное состояние, когда их скорость постоянна, и в дальнейшем мы будем анализировать только это состояние. Теперь жидкость, которая движется равномерно в инерциальной системе координат – системе, в которой шприц неподвижен – находится в покое в другой инерциальной системе координат, и несомненно, к ней применима теорема Паскаля. Следовательно, сразу перед поршнем имеется некоторое изотропное давление, скажем,* p_p, *которое выше атмосферного давления* p_A. *Оно связано с силой* F, *приложенной к поршню, уравнением*

$$F = (p_p - p_A)S \qquad (1.6)$$

(*S – площадь поршня*)»

Отличие предлагаемого ниже решения от стандартного состоит в как раз в рассмотрении этого переходного процесса. Стандартное решение

основывается на уравнении Бернулли, т.е. в конце концов, на законе *сохранения* энергии для *стационарного* движения жидкости. Попытаемся для *нестационарного* движения жидкости применить закон *изменения* энергии в форме «приращение кинетической энергии равно работе внешних сил».

Направим ось x вдоль оси цилиндра в сторону от поршня к отверстию и совместим точку $x = 0$ с начальным положением поршня. Пусть $x = x(t)$ – текущее положение поршня. Оно должно удовлетворять начальным условиям для координаты поршня и для его скорости $u = \dot{x}$:

$$x(t=0) = 0, \qquad (1.7)$$

$$u(t=0) = 0, \qquad (1.8)$$

или с учетом (1.7)

$$u(x=0) = 0. \qquad (1.8')$$

Пусть поршень, находившийся в момент времени t в положении с координатой x, за малый промежуток времени dt переместился в положение с координатой $x + dx$. Приравняем совершенную за это время силой F работу изменению кинетической энергии жидкости (пренебрегая массой и кинетической энергией поршня, которые, впрочем, легко учесть)

$$F\,dx = \rho(L-x-dx)S\frac{(\dot{x}+d\dot{x})^2}{2} +$$

$$+\rho S\,dx\frac{1}{2}\left(\frac{S}{s}\dot{x}\right)^2 - \rho(L-x)S\frac{\dot{x}^2}{2}. \qquad (1.9)$$

Здесь третье слагаемое дает в момент времени t значение кинетической энергии жидкости между поршнем и отверстием. Считаем, что скорость движения жидкости $u = \dot{x}$ одинакова в разных точках, но ее значение будет меняться с течение времени по мере продвижения поршня. Разумеется, вблизи входа в отверстие течение будет весьма сложным, но в случае длинного цилиндра область вблизи отверстия будет составлять лишь малую часть от общего объема жидкости. Первое слагаемо в (1.9) дает кинетическую энергию жидкости внутри цилиндра в момент времени $t + dt$; второе слагаемое есть кинетическая энергия жидкости, вытекшей через отверстие за малый промежуток времени dt (см. рис. 3).

Если бы мы пренебрегли слагаемым в правой части уравнения (1.9), содержащем приращение скорости $d\dot{x}$, то сразу получили бы стандартное решение, основанное на уравнении Бернулли. Но мы не будем пренебрегать приращением скорости. Сохраняя лишь слагаемые первого порядка по dx и $d\dot{x}$, приходим к уравнению

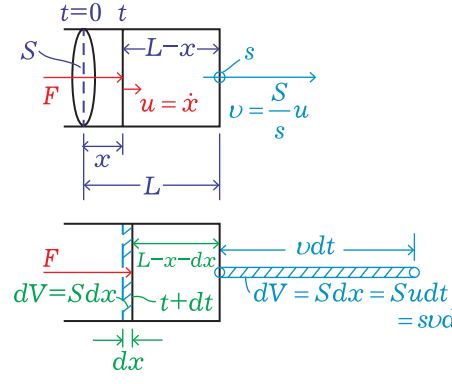


Рис. 3

$$F\,dx = \rho(L-x)S\,u\,du + \\ +\rho S\left(\frac{S^2}{s^2}-1\right)\frac{u^2}{2}dx. \qquad (1.9')$$

Уравнение (1.9') удобно записать не для скорости жидкости в цилиндре u, а для функции $w(x)=\frac{u^2(x)}{2}$; для нее согласно (1.9') имеем дифференциальное уравнение

$$(L-x)\frac{dw(x)}{dx}+(k^2-1)w(x)=\frac{\Delta p}{\rho} \qquad (1.10)$$

с очевидным граничным (начальным) условием

$$w(x=0)=0\,. \qquad (1.11)$$

Решение поставленной задачи имеет вид

$$w(x)=\frac{\Delta p/\rho}{k^2-1}\left[1-\left(\frac{L-x}{L}\right)^{k^2-1}\right]= \\ =w_B\left[1-\left(\frac{L-x}{L}\right)^{k^2-1}\right], \qquad (1.12)$$

где w_B – решение (1.6), полученное на основе уравнения Бернулли. Решение (1.12) заведомо не справедливо в случае $k = S/s = 1$, что нас, однако, не должно смущать: этот случай вообще, по-видимому, невозможно реализовать; интересен случай $k \gg 1$.

1.3. Обсуждение полученных результатов

Решение (1.12) обладает очевидным свойством $w(x = 0) = 0$: в самом начале движения удельная кинетическая энергия жидкости в цилиндре, а с ней и скорость движения жидкости в нем, равны нулю. Далее по мере продвижения поршня следует разгон жидкости и линейный

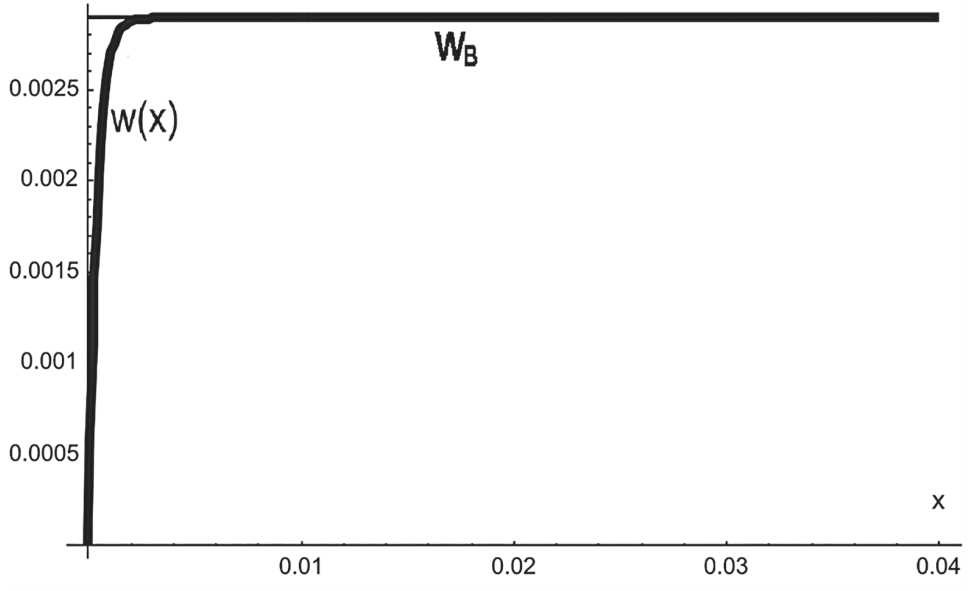


Рис. 4. Зависимость (отнесенной к единице массы) кинетической энергии жидкости в цилиндре (в единицах м²/с²) как функция координаты поршня (в метрах)

рост удельной энергии, – впрочем, рост довольно быстрый, и линейный лишь на очень коротком интервале (рис. 4):

$$x \ll L : w(x) \approx w_B \frac{k^2-1}{L} x = \frac{\Delta p}{\rho} \frac{x}{L}. \quad (1.13)$$

Заметим, что согласно (1.13) на начальном этапе движение поршня есть движение с постоянным ускорением:

$$u^2 \approx 2a \cdot x, \quad (1.14)$$

$$a = \frac{F}{\rho L S} = \frac{F}{m(0)}, \quad (1.15)$$

где $m(0) = \rho L S$ – начальная масса жидкости в цилиндре. В условиях [2] $a \approx 100g \approx 10^3$ м / с^2. Оценим еще, какое расстояние должен пройти поршень, чтобы линейная функция $w(x) \approx w_B \frac{k^2-1}{L} x$ (1.13) приблизилась к константе $w_B \approx 0{,}003$ м^2 / с^2: $x \approx \frac{L}{k^2-1} \approx \frac{s^2}{S^2} L \approx 2{,}8$ мкм. При этом пройдет время $\tau = \sqrt{\frac{2x}{a}} \approx 73$ мкс.

При дальнейшем движении поршня функция $w(x)$ довольно быстро выходит на константу w_B (см. рис. 4), построенный для $L = 4$ см и $k = 10$), т.е. на решение, полученное в рамках уравнения Бернулли, дающее движение поршня *с постоянной скоростью*.

Таким образом, несмотря на выдвинутые ранее претензии к стандартному решению, оно при $k \gg 1$ оказывается с хорошей точностью справедливым почти на всем пути движения поршня, кроме самого начального очень короткого участка. Как следствие, отпадает необходимость нахождения явной зависимости от времени $x(t)$ на всем интервале времен (что было бы совсем непросто). Для времени полного выдавливания жидкости из цилиндра с хорошей точностью будет справедлива формула (1.5).

Хотя предложенное решение задачи в общих чертах, видимо, правильно передают характер движения жидкости (во всяком случае, оно кажется более естественным, чем решение, основанное на уравнении Бернулли), все же оно не лишено недостатков.

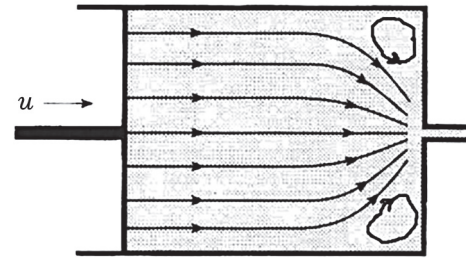


Рис. 5

Об одном было сказано: запись изменения кинетической энергии в форме (1.9) молчаливо предполагает, что скорость жидкости в цилиндре одна и та же во всех точках, в том числе в переходной области от широкой его части к отверстию, что заведомо не так. Кроме очевидного схождения линий тока вблизи отверстия, возможно образование вихрей в «углах» вблизи границ, учесть которые весьма проблематично. Можно лишь надеяться, что предложенные рассуждения будут хотя бы приближенно правильными для большого хода поршня L на начальном этапе движения, – вклад от переходной области будет при этом мал. Однако по мере приближения поршня к отверстию предложенное приближенное

решение окажется заведомо не верным. Впрочем, в равной мере не верным при этом будет и решение, основанное на стационарном уравнении Бернулли.

Примерно об этом пишет на стр. 61 автор книги [3]: «*Мы получили разумное и правильное решение, хотя по пути к нему порой допускали «натяжки». Одна очевидная «натяжка» состояла в том, что мы полагали цилиндр шприца гладким; в действительности он столь же шероховат, как и игла, и наше предположение, что до входа в иглу в жидкости отсутствует завихренность, безусловно, ошибочно с этой точки зрения. Менее очевидная, потенциально более серьезная «натяжка» состоит в том, что течение в игле предполагается ламинарным. На самом деле это допущение будет неверным…*»

На следующее важное обстоятельство обратил внимание автора А.А. Иванов. В своем рассмотрении мы основывались на модели несжимаемой жидкости (с уравнением неразрывности в форме (1.2)). Это приближение, однако, требует проверки. Ранее мы сказали, что выход на режим движения с постоянной скоростью происходит уже при очень малых смещениях поршня. Ясно, что и время τ выхода на этот режим будет тоже очень маленьким. Возникает вопрос: успеет ли за это время возмущение сжатия в жидкости, созданное внешней силой, распространиться от поршня до стенки цилиндра с отверстием? А это необходимо, чтобы можно было пользоваться приближением несжимаемой жидкости: в движение должна быть включена вся масса жидкости в цилиндре.

Время распространения возмущения оценим по формуле $T = L / c_S$, где c_S – скорость звука. Полагая (для воды) $c_S = 1500$ м/с и $L = 4$ см [2], получаем $T = 27$ мкс. Это время должно быть самым маленьким в задаче. Отношение этого времени к продолжительности разгона поршня до постоянного значения скорости $T / \tau = 0{,}37$. Это означает, что приближение несжимаемой жидкости $T < \tau$ хотя и выполняется, но на пределе.

Малость времени τ переходного процесса делает наше рассмотрение задачи, разумеется, чисто модельным, ибо считалось, что внешняя сила в момент времени $t = 0$ скачком изменяется от нулевого значения до значения F. Реализовать экспериментально такую зависимость силы от времени, безусловно, не просто.

2. Задача об истечении идеальной несжимаемой жидкости из вертикального цилиндрического сосуда через малое отверстие

Аналогично задаче о поршне может быть рассмотрена вторая задача

Задача. *В вертикально стоящий сосуд налита жидкость до уровня H (относительно дна сосуда). Площадь дна сосуда равна S. В дне сосуда*

образовалось малое отверстие площадью $s \ll S$. Определить время, за которое вся жидкость выльется из сосуда. Вязкостью пренебречь.

2.1. Стандартное решение задачи

Стандартное решение основано, как и в предыдущей задаче, на уравнении Бернулли для линий тока, идущих от поверхности жидкости в сосуде к отверстию, и уравнении неразрывности

$$\begin{cases} p_0 + \dfrac{\rho u^2}{2} + \rho g h = p_0 + \dfrac{\rho V^2}{2}, \\ u S = V s. \end{cases} \quad (2.1\text{-}2)$$

Решение системы уравнений (2.1-2) хорошо известно

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 - s^2/S^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 - 1/k^2}}, \quad (2.3)$$

$$u = \frac{s}{S}\sqrt{\frac{2gh}{1 - s^2/S^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{k^2 - 1}}, \quad (2.4)$$

где $k = S/s$. В наиболее интересном случае $k \gg 1$ при этом получаем формулу Торричелли

$$V \approx \sqrt{2gh} \quad (2.3')$$

и

$$u \approx \frac{s}{S}\sqrt{2gh}. \quad (2.4')$$

Пусть $h(t)$ – уровень жидкости в сосуде в момент времени t. Тогда для скорости опускания уровня имеем уравнение

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2gh}{k^2 - 1}} \quad (2.5)$$

с начальным условием

$$h(t = 0) = H. \quad (2.6)$$

Решение его (зависимость уровня жидкости в сосуде от времени) дается известной формулой

$$h(t) = H\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}\frac{t}{\sqrt{2H/g}}\right)^2. \quad (2.7)$$

Чтобы найти отсюда время t_0, за которое вся жидкость выльется из сосуда, положим $h(t = t_0) = 0$. Тогда получаем

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}(k^2 - 1)}, \quad (2.8)$$

или в наиболее интересном случае $k = S/s \gg 1$

$$t_0 \approx \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (2.8')$$

Запишем еще выражение для удельной кинетической энергии жидкости в цилиндре, которое в приближении уравнения Бернулли имеет вид

$$\frac{u^2}{2} = \frac{\dot{h}^2}{2} = \frac{gh}{k^2 - 1} = \\ = \frac{g(H - x)}{k^2 - 1} \equiv w_B(x), \quad (2.9)$$

где $x(t) = H - h(t)$ – расстояние, на которое опустится уровень за время t, так что $u = \dot{x} = -\dot{h}$.

Основные возражения против стандартного решения аналогичны тем, которые были сформулированы в случае задачи о поршне: **формула Торричелли (2.3–3') выведена из уравнения Бернулли, справедливого для стационарного течения. Между тем, изучается полное опорожнение сосуда: процесс, явно, нестационарный,** (жидкость была – и ее нет; ее не

подливали). Есть немного книг, в которых отмечается нестационарность поставленной задачи [4,5]: «*В рассматриваемой задаче движение идеальной … жидкости не является стационарным, смещается и свободная поверхность жидкости. Будем считать, что площадь отверстия много меньше площади свободной поверхности жидкости. Тогда изменение параметров движения жидкости происходит медленно (квазистационарно) и можно пользоваться уравнением Бернулли.*» ([4], стр. 262), «*Движение не стационарно – скорость истечения … меняется, так как верхняя граница жидкости опускается … Уравнением Бернулли, полученным для стационарного течения, можно пользоваться, если изменения происходят медленно (квазистатически), как в данном случае, когда* $s \ll S$ ». ([5], стр. 352) Автору настоящей статьи не кажется, однако, что слова **медленный** и **стационарный** процессы – слова-синонимы.

2.2. Учет нестационарности процесса истечения жидкости

Автор предлагает читателям самостоятельно в духе того, что делась в задаче о поршне, решить эту задачу. Если возникнут затруднения, можно обратиться к статье [1]. Здесь лишь скажем о результатах. Пусть уровень жидкости в сосуде уже опустился с высоты H на расстояние x ниже начального уровня. При малых

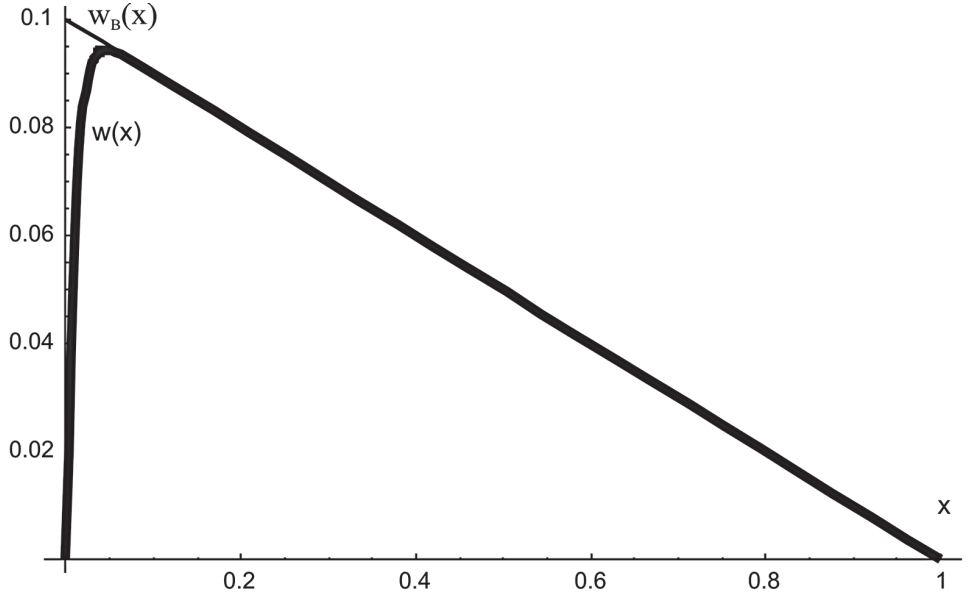


Рис. 6. Зависимость (отнесенной к единице массы) кинетической энергии жидкости в ци-линдре (в единицах $м^2/с^2$*) как функция расстояния, на которое опустился уровень воды в сосуде (при начальной высоте* $H = 1$ *м)*

значениях x удельная кинетическая энергия жидкости быстро растет; но по мере опускания уровня жидкости в сосуде ее рост замедляется, функция $w(x)$ достигает максимума и далее начинает спадать по закону, близкому к линейному $\frac{g(H-x)}{k^2-2}$; при $k \gg 1$ мало отличающемуся от закона $\frac{g(H-x)}{k^2-1} = w_B(x)$ убывания бернуллиевской функции (2.9) (см. рис. 6, построенный для $H = 1$ м и $k = 10$).

Как и в задаче о поршне, несмотря на выдвинутые ранее претензии к стандартному решению, это решение при $k = S/s \gg 11$ оказывается с хорошей точностью справедливым почти всюду, кроме самого начального очень короткого этапа истечения жидкости. Как следствие, снова отпадает необходимость нахождения явной правильной зависимости от времени $x(t)$ на всем интервале времен. Для оценки времени полного истечения жидкости из сосуда при этом с хорошей точностью оказывается верна формула (2.8).

Так стоило ли «городить огород», если стандартные решения с хорошей точностью «работают»? – Думается, что стоило, так как о полученных здесь выводах нигде не написано, заранее же они не были очевидны. Зато теперь можно не сомневаться, что поправки к стандартным решениям не очень важны. Кстати, вопрос «Почему мы применяем **стационарное** уравнение Бернулли к процессам, заведомо **не стационарным**?» возник и в одной из групп студентов МФТИ, у которых автор вел занятия по общей физике. К счастью, преподаватель уже знал правильный ответ.

Литература

1. Лукьянов А.А., Иванов А.А. О квазистационарном приближении в задачах гидродинамики идеальной жидкости в курсе общей физики // Физическое образование в вузах, Т.13, №3 2007 г., с. 57-69
2. Сахаров Д.И. Сборник задач по физике для вузов. – 13-е изд. – М.: ОНИКС 21 век, Мир и Образование, 2003. – 400 с. (№ 9-6)
3. Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. – М.: Постмаркет, 2001. – 560 с.
4. Абрамов А.А., Гайдуков Г.И., Горбатый И.Н., Овчинников А.С., Плис В.И. Задачи физических олимпиад МИЭТ (1974 – 2006 гг.) – М.: МИЭТ, 2008. – 304 с.
5. Корявов В.П. Методы решения задач в общей курсе физики. Механика. – М.: ВШ, 2007. – 375 с.

МУДРЫЕ МЫСЛИ

Физик стремится сделать сложные вещи простыми, а поэт — простые вещи — сложными.

Лев Давидович Ландау

Жизнь — как езда на велосипеде. Чтобы сохранять равновесие, ты должен двигаться.

Альберт Эйнштейн