

Кравченко Игорь Игоревич
Учитель физики школы г. Краснодара,
автор патентов на изобретения в области электроэнергетики

О методе размерностей, или Задача о шаре над жидкостью

Метод размерностей — это «мощный» инструмент, который «берет в руки» физик-исследователь всякий раз, перед тем как он планирует новый эксперимент. Этот метод среди прочего позволяет предсказывать масштабы исследуемых явлений и получать качественные и функциональные зависимости физических величин, определяющих рассматриваемое явление. (На страницах журнала «Потенциал» уже рассказывалось о данном методе в статьях [1, 2].) Например, если в каком-либо проводимом опыте нас интересует, какой порядок имеет та или иная значимая физическая величина (то есть чему она может быть приблизительно равна при данных условиях) или как эта величина зависит от других величин, характеризующих опыт, — мы используем метод размерностей.

Даже если мы не собираемся проводить опыт «вживую», интересным может быть просто анализ поставленной задачи указанным методом.

Мастером составления физических задач, побуждающих ставить эксперимент и, следовательно, активно прибегать к методу размерностей, был академик Петр Леонидович Капица (1894–1984). В июне 2024 года исполнилось 130 лет со дня рождения этого великого физика и инженера, поэтому уместно сказать несколько слов о нем.

Петр Леонидович известен в физике как блестящий экспериментатор. Его работы по физике и технике сверхсильных магнитных полей и низких температур, по сверхтекучести жидкого гелия, по электронике больших мощностей и физике высокотемпературной плазмы стали классикой современного физического эксперимента.

Первая публикация сборника знаменитых задач, задач-проблем, «задач — мини научных исследований» Капицы [3] состоялась в 1966 г. Характер своих задач Капица описывал кратко так: это — задачи для воспитания физика-исследователя. Вот, что говорил Петр Леонидович в предисловии к сборнику задач под его авторством.

«...Я стремился осуществить эту цель, составляя большинство задач таким образом, что они являются постановкой небольших проблем, и студент должен на основании известных физических законов про-

анализировать и количественно описать заданное явление природы. Эти явления природы выбраны мной так, чтобы они имели либо научный, либо практический интерес, и при этом мной учитывалось, что уровень знаний студентов должен быть достаточным, чтобы выполнить задание. Обычно задачи ставятся так, чтобы подходов к их решению было несколько, с тем чтобы и в выборе решения могла проявиться индивидуальность студента.»

Именно на примере «решения» одной из задач П. Л. Капицы мы познакомим читателя подробнее с методом размерностей. Слово «решение» взято в кавычки, потому что мы будем искать не точный ответ, а предполагаемую оценку по порядку величины.

Возьмем такую задачу.

Определите искажение поверхности жидкости, производимой силой тяготения шара. Разобрать возможность экспериментального наблюдения этого эффекта для определения постоянной тяготения.

Условие задачи нам придется уточнить — перечислим допущения, которые сделают решение более-менее определенным. Во-первых, мы не будем стремиться определить форму поверхности, а просто оценим высоту горба жидкости, если шар в виде материальной точки установить над изначально плоской поверхностью жидкости. Во-вторых, будем искать зависимость высоты горба как степенную функцию от других существенных величин в явлении. (Подробное «решение» задачи можно найти в книге [4], в которой авторы исходили из нахождения эквипотенциальных поверхностей, образованных суперпозицией полей шара как материальной точки и однородного поля Земли, полагая, что поверхность жидкости будет располагаться по эквипотенциальной поверхности результирующего поля.)

Прежде всего метод размерностей требует определить физические величины, существенно определяющие наблюдаемое явление. От чего может зависеть высота y упомянутого горба жидкости? Разумеется, прежде всего от массы m шара, который подносят над жидкостью, и высоты h шара над неискаженной поверхностью. Взаимодействие тел системы «шар-жидкость-планета» также должно быть связано с гравитационной постоянной G. А то, как «тяжело подниматься» горбу жидкости, характеризует ускорение свободного падения g.

У читателя может возникнуть интуитивное чувство, что нужно также учесть свойства жидкости — ее плотность, поверхностное натяжение, вязкость... Можно ли ими пренебречь?

Начнем с поверхностного натяжения. Мы знаем, что при малых возмущениях жидкости ее поверхность ведет себя подобно пленке. Так, поверхностное натяжение «округляет» капли воды или не дает им упасть с ветки дерева. Если радиус кривизны на вершине горба жидкости порядка его высоты, то можно, воспользовавшись результатами в статье [5], записать критерий, при котором форму горба не определяют поверхностные (капиллярные) явления:

$$y \gg \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \qquad (1)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, ρ — плотность

жидкости, g — ускорение свободного падения.

Предположим, что критерий (1) выполняется, и поверхностные явления в задаче несущественны. Тогда действия на элементы жидкости со стороны шара и планеты являются гравитационными и пропорциональны массам этих элементов жидкости. В равновесии сумма сил этих действий равна нулю, так что в уравнении сил для каждого элемента жидкости масса элемента жидкости сокращается. Получается, пренебрежение поверхностным натяжением избавляет от необходимости учитывать инертные свойства жидкости — то есть ее плотность.

Вязкость жидкости будет определять только время установления неподвижного горба, подобно тому как сопротивление определяет время, за которое шарик придет в равновесие, скатившись в яму с плавными стенками. Поэтому вязкость во внимание принимать не будем.

Итак, свойства жидкости с учетом указанных оговорок можно не учитывать.

Здесь нужно заметить, что приливы в океанах и твердом теле планеты объясняют в масштабах размеров планеты. Поэтому сложно установить аналогию между приливами и нашей задачей.

Большинство законов физики являются функциями степенного вида, поэтому мы будем исходить из предположения, как было сказано, что искомая зависимость имеет вид:

$$y \sim G^{\alpha} m^{\beta} h^{\gamma} g^{\varphi}. \qquad (2)$$

Знак ~ означает, что данная формула отличается от истинной только некоторым безразмерным коэффициентом, так что эту формулу можно было бы записать так:

$$y = C G^{\alpha} m^{\beta} h^{\gamma} g^{\varphi},$$

где C — безразмерный коэффициент. Величина C в большинстве случаев может считаться порядка единицы, так что формула (2) при численных расчетах дает оценку по порядку величины.

В основе метода размерностей лежит следующее: в любом соотношении левая и правая части измеряются в одних и тех же единицах. То есть после всевозможных упрощений единиц в левой и правой частях данного соотношения должны остаться одни и те же единицы. Выпишем размерности всех величин в формуле (2):

$$[y] = \text{м},$$

$$[G] = \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2},$$

$$[m] = \text{кг},$$

$$[h] = \text{м},$$

$$[g] = \text{м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Согласно (2) размерность y равна произведению размерностей G, m, h, g. Запишем это, как бы подставляя в указанной формуле размерности физических величин вместо их обозначений.

$$\text{м} = \text{кг}^{-\alpha} \cdot \text{м}^{3\alpha} \cdot \text{с}^{-2\alpha} \cdot \text{кг}^{\beta} \cdot \text{м}^{\gamma} \cdot \text{м}^{\varphi} \cdot \text{с}^{-2\varphi} =$$

$$= \text{кг}^{-\alpha+\beta} \cdot \text{м}^{3\alpha+\gamma+\varphi} \cdot \text{с}^{-2\alpha-2\varphi}. \qquad (3)$$

После этого нужно составить уравнения с неизвестными показателями степеней (в данном случае α, β γ, φ), при которых выполняется оговоренное равенство размерностей, то есть равенство (3).

Килограммы в правой части должны сократиться:

$$-\alpha+\beta=0.$$

Секунды тоже:

$$-2\alpha-2\varphi=0.$$

Метры нужны в первой степени:

$$3\alpha+\gamma+\varphi=1.$$

Система из трех предыдущих уравнений не имеет единственное решение. Не выполняется так называемое правило $N - K = 1$ (см. статью [6]).

Это значит, что показатели степени α, β, γ, φ формально могут быть любыми.

В такой ситуации можно зафиксировать один из показателей степени и выразить остальные показатели через него. Оставим неопределенным показатель α, тогда предыдущие три уравнения дают

$$\beta=\alpha,$$

$$\varphi=-\alpha,$$

$$\gamma=1-2\alpha.$$

Эти показатели подставим в формулу (2) и получим:

$$y\sim\left(\frac{Gm}{g}\right)^{\alpha}h^{1-2\alpha}. \qquad (4)$$

Не прибегая к дальнейшим допущениям и аргументам, это все, что мы можем получить методом размерностей в ответе к рассматриваемой задаче «на бумаге». Для нахождения показателя α в формуле (4) нужен результат хотя бы одного опыта: если имеются значения всех физических величин в этой формуле, то α можно найти однозначно.

Интересно отметить, что наиболее просто искомая связь выглядит при $\alpha=1$, тогда

$$y\sim\frac{Gm}{hg}.$$

Это соотношение мы получили уже из так называемого принципа простоты в физике, о котором среди многих других ученых говорил Р.Фейнман [7]: «Ваша догадка, в сущности, состоит в том, что нечто — очень простое. Если вы не видите сразу же, что это неверно, и если так оказывается проще, чем раньше, — значит, это верно... Истина всегда оказывается проще, чем можно было бы предположить».

Литература

1. Б. А. Мукушев. «Метод анализа размерностей». В: Потенциал 11 (2012).
2. Б. А. Мукушев. «Физические задачи на использование метода оценок». В: Потенциал 9 (2023).
3. Петр Леонидович Капица. Физические задачи. Знание, 1966.
4. А. П. Кузнецов и др. Физика: от оценок к исследованию. Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
5. С. Д. Варламов. «Угол смачивания и энергия взаимодействия молекул». В: Квант 5–6 (2015), с. 37–40.
6. Ю. Брук и А. Стасенко. «Метод размерностей помогает решать задачи». В: Квант 6 (1981), с. 11–19.
7. Ричард Фейнман. Характер физических законов. Энас, 2008.