

Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент,
лаборатория по работе с одаренными детьми МФТИ

О частном решении Лагранжа задачи трех тел в классической механике

Приведено частное решение многотрудной задачи классической механики – задачи трех тел. Предполагается, что читатель знаком с понятием центра масс (центра инерции) системы тел, а также с основными его свойствами. Знание высшей математики (умения дифференцировать и интегрировать) не предполагается. Кратко рассказывается история вопроса, то есть о том, в чем сложность проблемы.

Введение

Задача трёх (и более) взаимодействующих друг с другом тел относится к числу нерешенных до сих пор задач механики Ньютона. По этой причине её часто называют проблемой (а не задачей) трех тел. Имеется в виду получение общего и точного её решение для произвольных начальных условий (при заданном законе взаимодействия, например, гравитационного или по закону Кулона). Разумеется, давно получены приближенные решения этой проблемы, когда какое-то из взаимодействий можно считать в некотором смысле слабым. Впрочем, такое выделение «слабого звена» не всегда бывает очевидным.

Например, мы часто говорим, что Луна – спутник Земли. Но если подсчитать силы, действующие на Луну со стороны Земли и Солнца, то окажется, что сила со стороны Солнца примерно в 2 раза больше. Получается, что Луна – скорее спутник Солнца, а Земля и Луна представляют собой двойную планету Солнца. (Вероятно, в каких-то книгах так и пишут. Мы не будем настаивать на изменении терминологии.)

Другой пример задачи трёх тел – задача о перелете космического аппарата (КА), например, с околоземной орбиты к Луне или на орбиту Марса [6] или – любой другой планеты Солнечной системы. Во всех таких случаях нужно учитывать действие на КА гравитационного поля не одной планеты, а сразу двух. На самом деле – и Солнца тоже! К

счастью, движение самих планет (например, Земли и Марса) можно в самом грубом приближении брать «невозмущенным», – таким, какое получается под влиянием только Солнца, а не их друг на друга или под влиянием других планет (силами со стороны КА на планеты, разумеется, можно пренебречь). Итак, существует много реальных задач, в которых нужно одновременно учитывать взаимодействие двух и более тел. Это именно реальные задачи.

Даже в задаче о вычислении третьей космической скорости (минимальной скорости, которую необходимо сообщить КА на поверхности Земли, чтобы он покинул пределы Солнечной системы) необходимо учитывать гравитационное взаимодействие трех тел: Солнца, Земли и космического аппарата. Именно по этой причине такая задача считается сложной не только для школьников, но и для студентов вузов, и рассказывается о ней лишь будущим физикам [6,7].

После того, как И. Ньютон (1643–1727) объяснил законы Кеплера (1571–1630), описывающие движение планет вокруг Солнца, решив точно задачу двух тел (Солнце – планета), естественно встал следующий вопрос – о движении планет, когда нужно учитывать взаимодействие трех и более тел (например, в системе Солнце – Земля – Луна). Исторически эта проблема решалась «последовательными приближениями». Первым было самое грубое приближение, когда третье (малое) тело движется в поле двух массивных и ***неподвижных*** тел. Но уже в данном случае понадобился гений Л. Эйлера (1707–1783), чтобы поставить задачу и решить ее в квадратурах.

Так поставленная Эйлером задача была чисто модельной. Задача двух неподвижных центров не нашла конкретного применения в небесной механике [3]. Решая, например, задачу о движении КА в гравитационном поле одновременно Земли и Луны, мы можем считать их неподвижными, но только в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг их общего центра масс. При этом необходимо учитывать силы инерции (центробежную и силу Кориолиса) на третье тело, а эти силы оказываются отнюдь не малыми по сравнению с силой гравитации. Разумеется, располагая компьютером, задачу можно решить численно, но во времена Эйлера (и потом еще три столетия) компьютеров не было, поэтому небесная механика развивалась доступными ей в то время путями: строились приближенные схемы решения задач. (Во времена Эйлера по понятным причинам никто не интересовался движением космических аппаратов).

Следующим за приближением Эйлера была так называемая «ограниченная задача трех тел», в которой рассматривается движение трех тел – двух массивных и одного легкого. При этом массивные тела уже не считаются покоящимися: они гравитационно воздействуют друг на друга, и их движение рассчитывается по схеме Ньютона (как в задаче двух тел). Третье же тело

движется в заданном (но зависящем от времени) гравитационном поле двух первых тел.

В следующем приближении нужно было учесть влияние третьего тела на два первых. К сожалению, уже «ограниченная задача трех тел» оказывается чрезвычайно сложной [5] и, безусловно, не может считаться школьной.

Попутно с поиском точных (и приближенных, но все же общих) методов решения проблемы трех тел, физики (чаще – математики) искали (угадывали) хотя бы какие частные решения, которые могли бы реализоваться по крайней мере в каких-то особых случаях. Это могло бы подсказать свойства общего решения проблемы. Даже таких частных успехов было немного. Два частных решения были найдены Ж. Лагранжем (1736–1813).

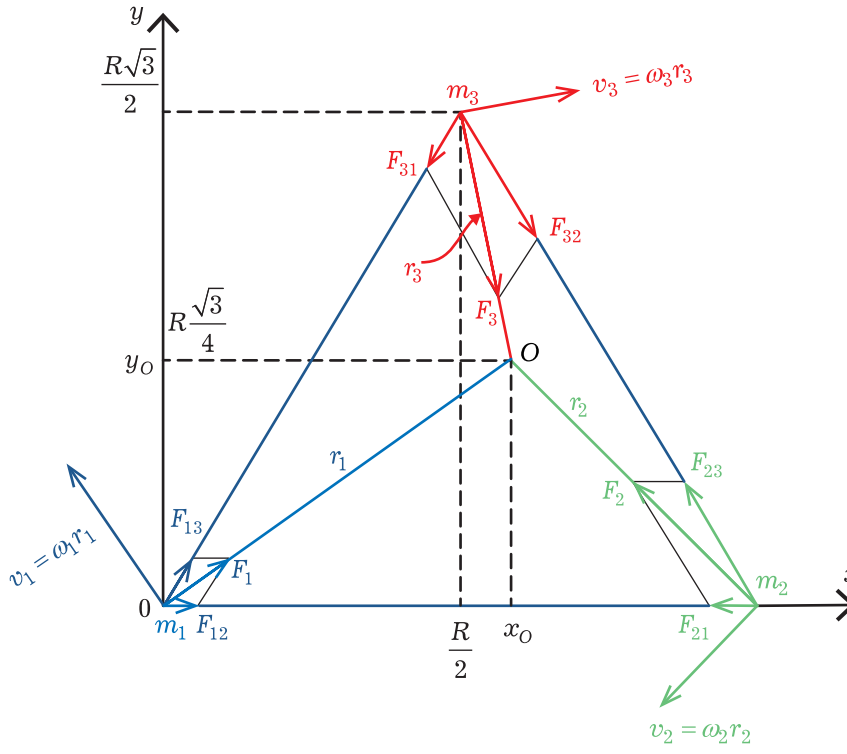
Об одном из них (1772) – настоящая статья. Автор узнал об этом решении (в виде ответа) из задачника Д.И. Сахарова [1] и из сборника научных трудов его сына, академика А.Д. Сахарова [2], участвовавшего в подготовке очередного издания задачника своего отца. Решение Лагранжа было, несомненно, включено в задачник «с подачи» А.Д.

В последствие автор статьи нашел это решения и в других книгах, – например, у А. Зоммерфельда [4, стр.233–...] и в университетских учебнике и задачнике [5, 6]. Рассмотрение Зоммерфельда для школьников, пожалуй, слишком подробное (9 страниц), а рассмотрение задачи в книгах [5, 6] слишком «пунктирное».

Предлагаемое далее решение, думается, вполне доступно школьной аудитории, основных читателей журнала «Потенциал». Нужно помнить, что частные решения не исчерпывают всего многообразия возможных решений. Кроме того, у них есть один существенный недостаток – они не всегда устойчивы, а потому не всегда легко реализуемы. Например, в случае гравитационного взаимодействия двух точечных масс они могут двигаться по эллиптическим траекториям вокруг их общего центра масс, и при небольшом изменении начальных условий (например, начальных скоростей) одни эллипсы переходят в другие, близкие к первым. Но это перестает быть справедливым для сил, не подчиняющихся закону обратных квадратов. Все же исследование частных случаев часто полезно и может сделать подсказку при поиске общих решений.

Задача [1, 2]. *Покажите, что задача о движении трех притягивающихся по закону Ньютона тел, массы m_1, m_2, m_3 которых сравнимы по значениям и могут быть различными, имеет частное решение, при котором тела вращаются вокруг общего центра масс, образуя равносторонний треугольник (решение Лагранжа). Определите частоту вращения тел.*

Решение. Введем обозначения, как на рисунке. Тела представляем себе материальными точками. Начало системы координат совместим, например, с телом массой m_1.



Тогда координаты центра масс системы определятся формулами

$$x_O = \frac{m_2 R + m_3 R/2}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= \frac{m_2 R + m_3 R/2}{M}, \qquad (1)$$

$$y_O = \frac{m_3 R\sqrt{3}/2}{M}, \qquad (2)$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3, \qquad (3)$$

R – сторона треугольника.

Найдем расстояния от тел до их общего центра масс (т. O):

$$r_1 = \sqrt{x_O^2 + y_O^2} =$$

$$= \frac{R}{M}\sqrt{\left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}m_3^2} =$$

$$= \frac{R}{M}\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}, \qquad (4.1)$$

$$r_2 = \frac{R}{M}\sqrt{m_3^2 + m_1^2 + m_3 m_1}, \qquad (4.2)$$

$$r_3 = \frac{R}{M}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}. \qquad (4.3)$$

Две последние формулы можно получить из соображений «симметрии», если первая формула уже получена: никакая из масс не должна быть выделена, поэтому если расстояние r_1 выражается через m_2, m_3 и сумму $M = m_1 + m_2 + m_3$, то

расстояние r_2 выразится такой же комбинацией масс m_1, m_3 и M, а расстояние r_3 – через массы m_1, m_2 и M.

Если треугольник вращается как единое целое, то расстояния r_1, r_2, r_3 остаются неизменными, а скорости тел перпендикулярны своим отрезкам прямых r_1, r_2, и r_3.

Выражения для сил между телами даются формулами закона всемирного тяготения

$$F_{12} = F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{R^2} = \alpha \cdot m_1 m_2,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{G}{R^2} \qquad (5.1)$$

$$F_{13} = F_{31} = G\frac{m_1 m_3}{R^2} = \alpha \cdot m_1 m_3, \qquad (5.2)$$

$$F_{23} = F_{32} = G\frac{m_2 m_3}{R^2} = \alpha \cdot m_2 m_3, \qquad (5.3)$$

Результирующие сил, действующих на каждое тело, найдутся тогда по формулам

$$F_1 = \sqrt{F_{12}^2 + F_{13}^2 + 2F_{12}F_{13}\cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{12}F_{13}} =$$

$$= \alpha \cdot m_1 \sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}, \qquad (6.1)$$

$$F_2 = \sqrt{F_{21}^2 + F_{23}^2 + 2F_{21}F_{23}\cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{F_{21}^2 + F_{23}^2 + F_{21}F_{23}} =$$

$$= \alpha \cdot m_2 \sqrt{m_3^2 + m_1^2 + m_3 m_1}, \qquad (6.2)$$

$$F_3 = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2 + 2F_{31}F_{32}\cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2 + F_{31}F_{32}} =$$

$$= \alpha \cdot m_3 \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}. \qquad (6.3)$$

Запишем уравнение движения, например, 1-го тела

$$m_1\omega^2 r_1 = F_1; \qquad (7)$$

подстановки сюда выражений (4.1) и (6.1) дает

$$m_1\omega^2 \frac{R}{M}\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3} =$$

$$= \frac{G}{R^2} \cdot m_1 \sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}. \qquad (7')$$

и после сокращений получаем $\omega^2 \frac{R}{M} = \frac{G}{R^2}$, откуда находим квадрат искомой частоты

$$\omega^2 = \frac{G \cdot M}{R^3} = \frac{G \cdot (m_1 + m_2 + m_3)}{R^3}. \qquad (8)$$

Эту же частоту можно получить иначе, записав уравнение движения не для 1-го, а для 2-го или 3-го тела. При этом удобно совместить начало координат с тем телом, уравнение движения для которого мы собираемся писать.

В книгах [1,2] не было приведено решения задачи, но был лишь записан ответ (формула (8)). До нее можно было ***догадаться*** из соображений размерности, дополнительно учтя, что в случае, когда одна из трех масс (любая) много меньше двух остальных, мы имеем дело фактически с задачей не трех тел, а двух. Тогда, например, при $m_1 = 0$ квадрат частоты давался бы формулой

$$\omega^2 = \frac{G \cdot (m_2 + m_3)}{R^3}, \qquad (9.1)$$

которая немедленно получается, если записать уравнение динамики вращательного движения любого из двух тел вокруг их центра масс; например,

$$m_2\omega^2 r_2 = m_2\omega^2 \frac{m_3 R}{m_2 + m_3} =$$

$$= G\frac{m_2 m_3}{R^2}. \qquad (10)$$

При $m_2 = 0$ мы имели бы

$$\omega^2 = \frac{G\cdot(m_1 + m_3)}{R^3}, \qquad (9.2)$$

а в случае $m_3 = 0$ квадрат частоты

$$\omega^2 = \frac{G\cdot(m_1 + m_2)}{R^3}. \qquad (9.3)$$

Именно из формулы (8) – с суммой масс в числителе – предельные переходы $m_1 \to 0$ (а также $m_2 \to 0$ или $m_3 \to 0$) к формулам (9,1–3) получаются естественным образом. Конечно, такие соображения не есть доказательство «суммы» в (8), но как способ догадаться, что должна быть именно сумма, а не какая-нибудь другая сложная комбинация масс, это годится. С такими не вполне строгими ходами, которые, однако, задают «направление движения» в процессе решения задачи, подрастающим физикам полезно быть знакомыми.

Литература

1. Сахаров Д.И. Сборник задач по физике для вузов. – 13-е изд. – М.: ОНИКС 21 век, Мир и Образование, 2003. – 400 с. (№ 5-20)
2. Сахаров А.Д. Научные труды. – М.: АОЗТ «Издательство ЦентрКом», 1995. – 528 с. (стр. 514)
3. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 432 с. (стр. 64)
4. Зоммерфельд А. Механика. – Москва-Ижевск: НИЦ «РиХД», 2001. – 368 с. (стр. 233–241)
5. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 392 с. (стр. 66)
6. Павленко Ю.Г. Задачи по теоретической механике. – М.: Физматлит, 2003. – 536 с. (стр.149)
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.I, Механика. – М.: Наука, 1974. – 520 с. (стр. 327)

ИЗ ЖИЗНИ УЧЕНЫХ

Когда Нильс Бор выступал в физическом институте Академии Наук СССР, то на вопрос о том, как удалось ему создать первоклассную школу физиков, он ответил: «По-видимому, потому, что я никогда не стеснялся признаваться своим ученикам, что я дурак... ».

Переводивший речь Нильса Бора Е.М. Лифшиц донес эту фразу до аудитории в таком виде: «По-видимому потому, что я никогда не стеснялся заявить своим ученикам, что они дураки...».

Эта фраза вызвала оживление в аудитории, тогда Е.М. Лифшиц, переспросив Бора, поправился и извинился за случайную оговорку. Однако сидевший в зале П.Л. Капица глубокомысленно заметил, что это не случайная оговорка. Она фактически выражает принципиальное различие между школами Бора и Ландау, к которой принадлежит и Е.М. Лифшиц.