

Власов Анатолий Иванович
Кандидат физико-математических наук,
учитель физики гимназии №44 г. Пензы.

Метод механического подобия

Для механических систем с постоянной энергией может быть применен метод анализа, называемый «методом механического подобия». Это очень красивый и плодотворный метод. В данной статье мы не будем «серьёзно» описывать этот метод, которому в научной литературе посвящены объёмные монографии. Попробуем лишь перелистать первые страницы этой очень интересной книги.

Для понимания и практического освоения метода механического подобия нужно (даже необходимо) подняться ещё на одну ступеньку по математической лестнице. Нужно знать, что такое «однородная» функция и какие движения (траектории) являются «подобными».

Итак, функция является однородной, если для неё справедливо следующее простое свойство:

$$U(\alpha \cdot x) = \alpha^n \cdot U(x), \qquad (1)$$

где α - любая постоянная, а число n – степень однородности функции. Для таких функций изменение аргумента в α раз, приводит к простому изменению функции в α^n раз.

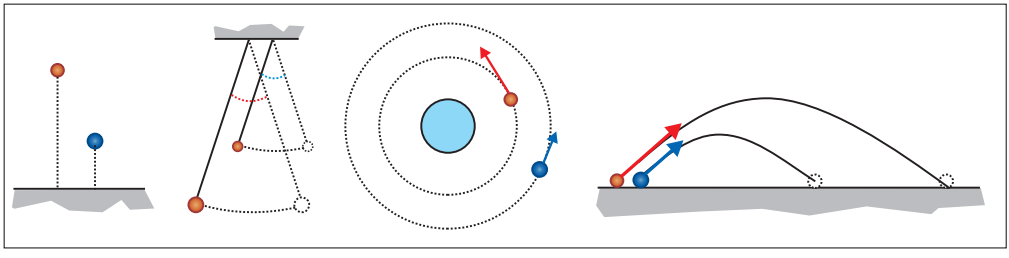
Простой пример:

$$U(x) = k\frac{x^2}{2} \rightarrow U(ax) = a^2 \cdot k\frac{x^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad n = 2.$$

Другие примеры однородных функций появятся в нужном месте повествования.

Теперь разберёмся с понятием «подобные» движения и подобные траектории. Простые примеры «подобных» движений показаны на первом рисунке.



Шарики, прыгающие на упругой плите – «гравитационные кузнечики» (высокий и низкий) совершают подобные движения. Колебания длинного и короткого математических маятников будут иметь «простое» подобие только при равенстве угловых амплитуд. Подобие движений спутников очевидно. Параболические движения тел в поле тяготения Земли будут подобны только при равенстве углов «броска» (здесь можно отметить подобие векторов начальных скоростей).

Итак, во-первых, траектории должны быть физически подобные. Во-вторых, траектории должны быть подобны геометрически. Оставим без должного внимания общее понятие геометрического подобия (обойдёмся без «мудрого» аффинного преобразования), достаточным будет интуитивное школьное определение, и займёмся получением главного – «уравнения подобия».

Пусть имеется механическая система с однородной потенциальной функцией. В простейшем случае это одна частица, движущаяся во внешнем потенциальном поле. Её движение подчиняется уравнению Ньютона[1]:

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}. \qquad (2)$$

Здесь мы использовали известное определение «потенциальной» силы через производную от потенциальной функции

$$F = -\frac{d}{dx}U(x). \qquad (3)$$

Для двух подобных траекторий движения частиц можно записать соотношения подобия для координат и времени:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cdot x^*, \\ t &= \beta \cdot t^*. \end{aligned} \qquad (4)$$

Сделаем это преобразование переменных в уравнении (2), предполагая, что потенциальная функция является однородной функцией степени n. После простого преобразования, получаем

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \cdot m\ddot{x}^* = -\frac{dU(x^*)}{dx^*} \cdot \frac{\alpha^n}{\alpha}.$$

Очевидно, что следует приравнять появившиеся комплексы множителей слева и справа, так как подобная траектория так же обязана подчиняться уравнению Ньютона:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{n}{\alpha}.$$

Из этого соотношения и получаем основное «уравнение механического подобия»

$$\alpha^{1-\frac{n}{2}} = \beta.$$

Запишем его в явном виде, используя (4):

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{1-\frac{n}{2}} = \frac{t_2}{t_1}. \qquad (5)$$

Из этого основного уравнения легко получаются «производные» уравнения подобия

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{v_2}{v_1}, \qquad (6)$$

[1] Здесь для обозначения производной по времени мы используем общепринятый символ верхней «точки». Классический метод вывода уравнения механического подобия основан на использовании функции Лагранжа. Школьник, не знакомый с математикой производной может пропустить часть текста с непонятными значками и поверить в справедливость уравнения, которое будет названо «уравнение подобия».

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^n = \frac{K_2}{K_1}. \qquad (7)$$

Здесь: l_1, l_2 – характерные линейные размеры подобных траекторий; t_1, t_2 – время движения по этим траекториям; v_1, v_2 – скорости движения по подобным траекториям (скорости в точках подобия); K_1, K_2 - кинетические энергии системы, соответствующие подобным траекториям.

В дополнение к формулам (2-4) в методе механического подобия существует красивая теорема о соотношении средних величин потенциальной и кинетической энергий.[1] Эту теорему называют «вириальной теоремой». Возникает очень большой соблазн доказать эту теорему здесь. Но красоту изящного доказательства (с использованием теоремы Эйлера об однородных функциях) оценить сможет опять же лишь школьник, знакомый с великим наследием Ньютона и Лейбница (дифференциальным и интегральным исчислением). Мы ограничимся только результатом – формулировкой этой очень полезной физической теоремы. Если движение системы является «финитным» (ограниченным в пространстве[2] и соответственно периодическим), то средние величины кинетической $\bar{K}$ и потенциальной энергий $\bar{U}$ связаны простым соотношением, в котором главную роль играет степень однородности потенциальной функции (число n):

$$2\bar{K} = n \cdot \bar{U}. \qquad (8)$$

Формулы (2-5, 8) позволяют получить общие характеристики механической системы, без решения динамического уравнения движения. Приведём примеры такого анализа.

Пример 1. «Гравитационный кузнечик». Движения двух шариков с разными амплитудами (высотами) подобны и физически, и геометрически. Гравитационная энергия системы Земля – шарик

$$U(y) = mgy$$

является однородной функцией координаты y со степенью однородности $n = 1$.

Используя формулы (2-5), получаем

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{y_2}{y_1}}; \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{y_2}{y_1}}; \quad \frac{K_2}{K_1} = \frac{y_2}{y_1}; \quad 2\bar{K} = \bar{U}.$$

Этот результат согласуется с простыми формулами школьной физики при свободном падении тел:

$$y = g\frac{t^2}{2}; \quad v = \sqrt{2gy}; \quad K = mgy.$$

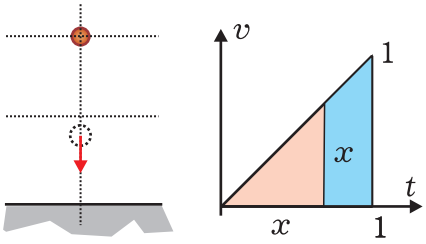
Соотношение между средними величинами показывает, что средняя кинетическая энергия в 2 раза меньше средней потенциальной энергии. Здесь уместна (и интересна) дополнительная задача. Разделим высоту «прыжка» пополам. Очевидно, что большую часть времени шарик «проводит» в верхней половине траектории, так как средняя потенциальная энергия больше кинетической. Нижнюю часть шарик пролетает с большей средней скоростью и, соответственно, за меньшее время. Легко получить точное соотношение времён пребывания в двух

[1] Средние величины во времени.

[2] В простом варианте ограничение обусловлено потенциальными силами. Система частиц «связана» потенциальными силами.

половинах траектории. На рисунке представлен временной график скорости шарика. Скорость и время движения условно выбраны по 1. Приравнивая площади треугольника и трапеции, получаем

$$x^2 = 1 - x^2 \to x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7.$$



В верхней половине траектории шарик проводит 70% времени, соответственно в нижней половине 30% от периода движения.

Пример 2. Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам[1]. Движения и траектории спутников подобны. Энергия взаимодействия для системы Земля – спутник определяется функцией (особое внимание к знаку «минус»)

$$U(r) = -G\frac{m \cdot M}{r},$$

степень однородности, которой $n = -1$. Используя уравнение подобия (2), получаем

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1-\frac{-1}{2}} = \frac{T_2}{T_1} \to \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

знаменитый закон Кеплера. Для двух спутников куб отношения радиусов орбит равен квадрату отношения периодов движения по этим орбитам. Уравнение (5) определяет соотношение между средними величинами энергий:

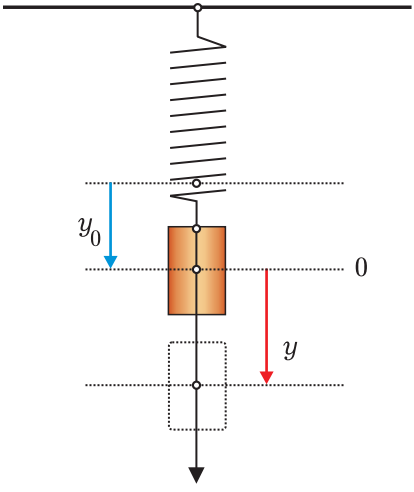
$$2\bar{K} = n \cdot \bar{U} \to 2\bar{K} = -\bar{U} \to \bar{K} = -\frac{1}{2}\bar{U},$$

$$2\bar{K} = -\left(E - \bar{K}\right) \to E = -\bar{K}.$$

Общая энергия системы E отрицательная. Модуль кинетической энергии в два раза меньше модуля потенциальной энергии гравитации.

Пример 3. Рассмотрим вертикальный пружинный маятник. Колебания маятника с различной амплитудой будут подобны. В положении равновесия

$$ky_0 = mg.$$



Здесь y_0 – величина деформации пружины в положении равновесия. При смещении от точки равновесия потенциальная энергия системы изменяется и описывается функцией из двух слагаемых

$$U(y) = -mgy + k\frac{(y_0 + y)^2}{2}$$

и на первый взгляд не является однородной функцией. Перепишем функцию в следующем виде (раскроем скобку второго слагаемого):

[1] Реально спутники движутся по эллиптическим орбитам.

$$U(y)=(ky_0-mg)y+k\frac{y_0^2}{2}+k\frac{y^2}{2}.$$

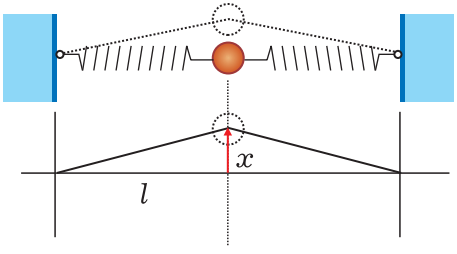
Первое сгруппированное слагаемое равно нулю: в положении равновесия сила упругости уравновешивает силу тяжести. Второе слагаемое определяет энергию пружины в положении равновесия и является константой, которую можно «отбросить» (изменив «нулевой» уровень отсчёта энергии). Таким образом, потенциальная функция становится квадратичной. Ее степень однородности $n=2$. Уравнения подобия дают следующие соотношения:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{1-\frac{2}{2}}=\frac{T_2}{T_1}\quad\rightarrow\quad\frac{T_2}{T_1}=1$$

$$\bar{K}=\bar{U}.$$

Период колебаний пружинного маятника не зависит от амплитуды. При колебаниях средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии. Эти замечательные свойства гармонического движения стоит запомнить.

Пример 4. «Необычный маятник»[1]. Рассмотрим поперечные колебания пружинного маятника, схема которого представлена на рисунке. Масса шарика m, пружины одинаковые и имеют коэффициент жесткости k, в положении равновесия пружины не деформированы и имеют длину l. Исследуем характер поперечных колебаний и определить «формулу периода».



После нескольких примеров анализа мы понимаем, что «физика» системы определена потенциальной функцией. Вычислим потенциальную энергию пружин при поперечном смещении шарика маятника на величину x. Рассчитываем удлинение пружин

$$\Delta l=\sqrt{l^2+x^2}-l=l\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2}-1\right)\approx$$

$$\approx l\cdot\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2-1\right)=\frac{x^2}{2l}.$$

При упрощении мы воспользовались условием $\frac{x}{l}<<1$.

Записываем потенциальную функцию

$$U(x)=2\cdot k\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2l}\right)^2=k\frac{x^4}{4l^2}.$$

Степень однородности полученной потенциальной функции $n=4$. Уравнения подобия приводят к следующим результатам

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\frac{4}{2}}=\frac{T_2}{T_1}\quad\rightarrow\quad\frac{T_2}{T_1}=\frac{x_1}{x_2},$$

$$2\bar{K}=4\bar{U}\quad\rightarrow\quad\bar{K}=2\bar{U}.$$

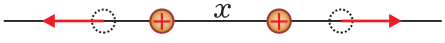
Это очень интересные и необычные результаты. Период колебаний поперечного маятника обратно пропорционален его амплитуде. Для бесконечно малой амплитуды колебаний период колебаний бесконечен. С увеличением амплитуды период колебаний уменьшается. При коле-

[1] Задача появлялась на олимпиадах.

баниях маятника его средняя кинетическая энергия в 2 раза больше средней потенциальной энергии. При этом колебания маятника не являются гармоничными. Эта нестандартность свойств маятника определена потенциальной функцией. Математик скажет: эта функция имеет ноль четвёртого порядка.

В качестве самостоятельного упражнения докажите, что если в положении равновесия пружины «поперечного» маятника будут растянуты (деформированы), то малые колебания маятника станут гармоничными. Определите период таких колебаний.

Пример 5. Две одинаковые заряженные частицы начинают «разбегаться» из состояния покоя. Через время t расстояние между частицами увеличивается в n раз по сравнению с первоначальным расстоянием. Определите, как изменится это время «разбегания», если первоначальное расстояние между частицами увеличить в 4 раза.



Решение

С использованием формулы (5) задача решается элементарно. Потенциальная энергия взаимодействия двух одинаковых зарядов определена функцией

$$U(x)=k\frac{q^2}{x}.$$

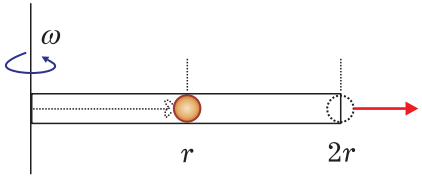
Степень однородности этой функции $n=-1$. Используя уравнение (5), получаем

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\frac{(-1)}{2}}=\frac{t_2}{t_1}\quad\rightarrow\quad\frac{t_2}{t_1}=(4)^{\frac{3}{2}}=2^3=8.$$

Время «подобного разбегания» увеличивается в 8 раз.

Еще один пример на «подобную» тему.

Пример 6. «Направляющая» трубка принудительно вращается с постоянной угловой скоростью в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из её концов (см. рисунок). Внутри трубки, на расстоянии, равном $L/2$ от оси вращения, находится шарик. В некоторый момент, нить удерживающая шарик, обрывается, и шарик начинает движение по трубке. Через время t он вылетает из неё. Как изменится время вылета шарика, если длину трубки L увеличить в 2 раза и шарик опять же поместить в её середину?



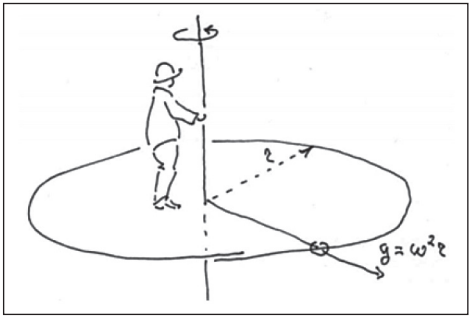
Решение

При движении шарика (после обрыва нити) его энергия изменяется (увеличивается), и поэтому для анализа движения использовать метод механического подобия «напрямую» нельзя. Перейдём в систему отсчёта, связанную с трубкой. В этой системе отсчёта в соответствии с постулатом эквивалентности[1] существует радиальное гравитационное

[1] «...неинерциальная система отсчёта эквивалентна некоторому гравитационному полю». (Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля. – М., Наука, 1988, С. 292). В соответствии с постулатом эквивалентности $\Delta\vec{g}=-\vec{a}$.

поле. Вектор напряженности этого поля равен центростремительному ускорению (по модулю):

$$\vec{E} = \vec{g} = \omega^2 \cdot \vec{r} \qquad (9)$$



Потенциальная энергия шарика массой m в таком поле определится формулой (вывод этой формулы пусть будет вашим домашним заданием)

$$U(r) = -m\omega^2 \frac{r^2}{2}. \qquad (10)$$

В этой формуле важен «минус». Энергия «гравитации вращения» отрицательна. Относительно подвижной системы отсчёта общая энергия скользящего по трубке шарика

$$E = m\frac{v^2}{2} - m\omega^2 \frac{r^2}{2} = -m\omega^2 \frac{r_0^2}{2} \qquad (11)$$

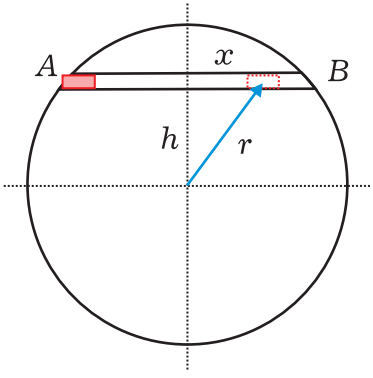
остаётся постоянной, и для анализа движения теперь уже можно использовать метод механического подобия.

Степень однородности потенциальной функции (10) $n = 2$. Используя основное уравнение механического подобия (5), получаем

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1-\frac{n}{2}} = \frac{t_2}{t_1} = 1.$$

В соответствии с этим результатом при «подобном» увеличении размера системы в 2 раза, время «вылета» шарика из трубки не изменяется[1].

Пример 7. Между двумя городами планеты прорыт прямолинейный «гравитационный» тоннель метро (см. рисунок). При отсутствии энергетических потерь поезд метро «скатывается» от станции A до станции B за время t. Как изменится это время движения, если длина тоннеля будет увеличена в два раза (при этом, соответственно, изменится и глубина залегания тоннеля)?



Решение

Можно показать, что потенциальная энергия взаимодействия системы (тело находится внутри планеты на расстоянии r от её центра) определена функцией[2]

$$U(r) = -\frac{3}{2}G\frac{Mm}{R} + G\frac{Mm}{2R^3}\cdot r^2. \qquad (12)$$

[1] Можно показать, что время вылета шарика из трубки (при данной «геометрии» начального положения шарика) равно $t = \frac{1}{2\omega} ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$.

[2] Здесь мы используем готовую формулу. Вывод этой формулы – упражнение по расчёту гравитационного потенциала внутри однородного шара.

Положение поезда в тоннеле определим координатой x – расстоянием до центра тоннеля. Формула (12) преобразуется:

$$U(x)=-\frac{3}{2}G\frac{Mm}{R}+G\frac{Mm}{2R^3}\cdot\left(h^2+x^2\right)=$$

$$=U(0)+G\frac{Mm}{2R^3}\cdot x^2, \qquad (13)$$

где $U(0)$ – потенциальная энергия системы «планета – поезд» в центре тоннеля. Уравнение движения определяется переменной частью потенциальной функции, которая в данном случае является однородной функцией степени 2. Используя основное уравнение (5), получаем

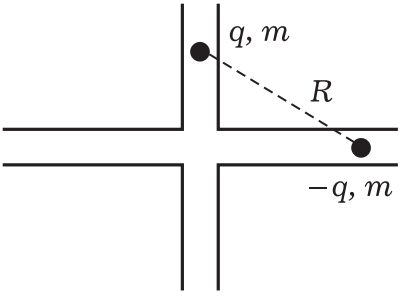
$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1-\frac{n}{2}}=\frac{t_2}{t_1}=1,$$

результат аналогичный результату задачи №6. В данном случае, время движения поезда метро по тоннелю не будет зависеть от глубины его залегания (не зависит от длины тоннеля). Если поезд не «блокировать» на станциях, то он будет совершать гармонические колебания с периодом, равным

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{G\frac{mM}{R^3}}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Пример 8. (Задача 2, 10 класс, Всероссийская олимпиада 2019, автор И. Воробьёв)

Небольшие частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ движутся без трения по пересекающимися под прямым углом узким прямым каналам (см. рисунок). При этом оказалось, что в процессе дальнейшего движения расстояние R между частицами оставалось неизменным. Найдите суммарную кинетическую энергию частиц. Гравитации нет.



Решение

Система зарядов совершает «финитное» (ограниченное в пространстве) движение. В системе сохраняется полная энергия, так как отсутствуют потери. Потенциальная энергия системы зарядов $U(R)=-k\frac{q^2}{R}$ определена функцией, для которой степень однородности равна (- 1). Ответ к вопросу задачи можно записать сразу в соответствии с «вириальной теоремой» (формула (8)):

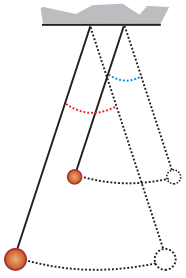
$$2K=(-1)\left(-k\frac{q^2}{R}\right).$$

Отсюда $K=k\frac{q^2}{2R}$. Очень красиво!

Отметим: масса m в условии лишний параметр. Задачу можно было назвать «Мальтийский крест». Не трудно показать, что гипотетическое движение, представленное в задаче, реально осуществляется достаточно простым механизмом.

И последний пример – «старый знакомый» математический маятник (нитяной, гравитационный).

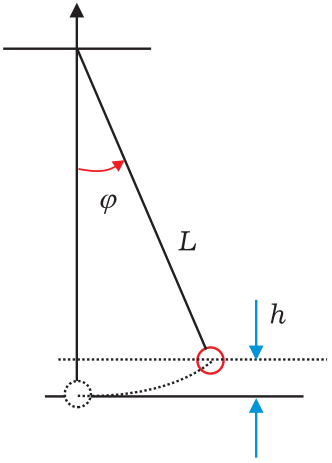
Пример 9. Здесь возможны два варианта подобия. Первое – масштабное подобие. Размеры маятников уменьшаем в n раз. При этом, сохраняем геометрию колебаний – угловую амплитуду. Колебания происходят в однородном гравитационном поле.



Степень однородности потенциальной функции[1] $U(y)=mg\cdot y \quad n=1$. В соответствии с уравнением подобия

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

Отношение квадратов периодов колебаний двух различных по длине маятников равно отношению длин маятников. Это справедливо при любой амплитуде колебаний. Естественно, что этот результат подтверждается и прямым интегрированием уравнения движения. В изящной (тоненькой) книжке Л.Д. Ландау (Механика) можно обнаружить результат этого не очень сложного математического упражнения. Период колебаний определён формулой $T(\varphi_0)=4\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot K\left(\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)$. Здесь $K\left(\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)$ – «полный эллиптический интеграл первого рода». Видно, что если амплитуды колебаний маятников будут одинаковы, то отношение периодов колебаний будет соответствовать формуле, полученной выше.



Второй вариант подобия. При малых амплитудах колебаний потенциальную функцию можно привести к квадратичному виду. Действительно, преобразуем формулу $U(y)=mg\cdot y$ к угловой координате:

$$y=L(1-\cos\varphi)=2L\cdot\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\approx L\frac{\varphi^2}{2},$$

$$U(y)=mg\cdot y \quad \rightarrow U(\varphi)=mgL\frac{\varphi^2}{2}.$$

Потенциальная функция стала однородной по угловой координате отклонения с $n=2$. Поэтому колебания нитяного маятника с различными малыми амплитудами являются подобными движениями. В соответствии с уравнением подобия

$$\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^{1-\frac{2}{2}}=\frac{T_2}{T_1} \quad \rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1}=1$$

$$\bar{K}=\bar{U}.$$

Период малых колебаний математического маятника не зависит от амплитуды. Школьники это знают.

[1] Ось координаты y направлена вверх, ноль совмещён с точкой равновесия.

Подводим итоги. Мы прочитали только первые страницы очень интересной книги – «Метод подобия». Эта книга постоянно дополняется, некоторые главы её переписываются (появился очень сильный помощник – компьютер). На простых примерах мы показали эффективность уравнения «подобия» и уравнения «вириальной теоремы».

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Женская физика

Если раньше вновь открытым химическим элементам иногда давали названия по именам античных богов, то в наше время «хвост» таблицы Менделеева заполняется именами великих учёных. А сейчас этих небожителей всего 15 человек, и среди них Лизе Мейтнер. Элемент её имени значится под номером 109. Всего два элемента названы в честь женщин: Кюрий – в честь Марии Кюри, и Мейтнерий – в честь Лизе Мейтнер.



В 1905 году Лизе Мейтнер защитила диссертацию и получила степень «доктор философии». Вы скажете «а чего здесь особенного?». А особенное состояло в том, что в те времена это был всего третий случай защиты женщиной физико-математической диссертации. За 30 лет до этого степень доктора получила наша соотечественница Софья Ковалевская. А в самом конце XIX века защитилась Мария Склодовская-Кюри.



Правда, в 1748 году Папа римский Бенедикт XIV присвоил Марии Гаэтана звание профессора математики университета Болоньи, и, надо признать, вполне заслуженно. Однако она диссертацию не защищала и никогда не преподавала в университете.

А с диссертацией Лизе Мейтнер произошел весьма забавный курьёз. В газетах тогда публиковались сообщения о предстоящей защите диссертации. Название её диссертации «Проблемы космической физики» какому-то журналисту показалось немыслимым для женщины, и в газете было напечатано: «Проблемы косметической физики».

Дружинин Борис Львович