

Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент,
организатор и руководитель музея истории вычислительной техники
школы № 1530 «Школа Ломоносова» Москвы



Валерий Владимирович Шилов
Кандидат технических наук, профессор НИУ «Высшая школа экономики»,
автор книг и статей по истории вычислительной техники

Как определяли площадь в XIX веке. Использование планиметров

В нашей статье [1] были описаны различные методы и приборы, с помощью которых в XIX веке определяли площадь участков земли на так называемых «планах» — копиях фрагментов карт. Несмотря на изобретательность предложенных методов и средств, построения, измерения и вычисления по-прежнему необходимо было проводить, хотя и в значительно меньшем объёме. Желательно было применять приборы, которые показывали бы значение искомой площади. И такие приборы, так называемые «планиметры», были созданы.

Обводные планиметры

Наибольшее распространение получили планиметры, которые будем называть «обводными», поскольку при их использовании проводится обвод контура измеряемой фигуры[1].

Они состоят из двух шарнирно соединённых рычагов — внутреннего и внешнего. На конце внешнего рычага закреплен вертикальный стержень-«курсор», которым обводится контур фигуры, площадь которой измеряется.

В зависимости от особенностей движения внешнего рычага (на рис. 1, 2 — EM) различают:

1) линейные обводные планиметры (для краткости в дальнейшем будем использовать термин «линейные планиметры»);

2) полярные обводные планиметры («полярные планиметры»).

[1] Были разработаны также планиметры, основанные на измерении площади путём разбиения измеряемой фигуры на трапеции одинаковой высоты (см. о методе арфы в [1]).

В первых конец E рычага движется по прямой. В полярных планиметрах (см. рис. 2) рычаг EM соединен с внутренним рычагом OE, другой конец которого O находится в некотором фиксированном положении (полюсе).

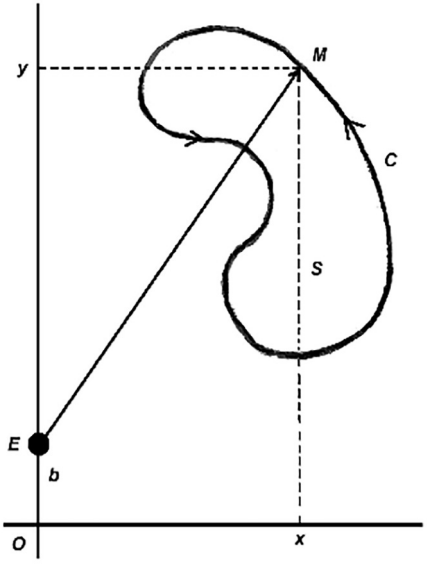


Рис. 1. Общая схема линейного планиметра

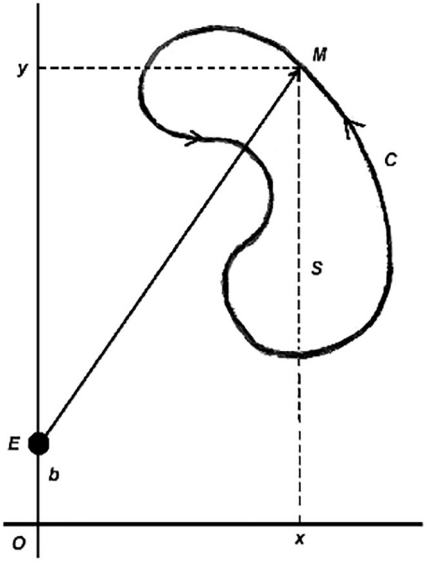


Рис. 2. Общая схема полярного планиметра

Рассмотрим простой пример — использование линейного планиметра для определения площади прямоугольника $ABCD$ (рис. 3).

При перемещении «курсора» от точки A к точке B рычаг EM перемещается по жёлтому параллелограмму. Нетрудно увидеть, что его площадь равна площади прямоугольника $A"ABB"$ (запомним это). С другой стороны, площадь жёлтого параллелограмма равна $EM \times PQ$, где PQ — высота этого параллелограмма. Если на рычаге EM установить колесо, ось которого параллельна EM, то при указанном перемещении расстояние, пройденное колесом (в направлении, перпендикулярном EM), и будет равно PQ. Это значит, что площадь прямоугольника $A"ABB"$ определяется двумя значениями — длиной рычага EM и расстоянием, пройденным колесом.

Движение рычага EM можно разложить на движение, перпендикулярное EM, заставляющее колесо вращаться, и движение, параллельное EM, вызывающее скольжение колеса, не влияющее на его показания.

При перемещении «курсора» от точки C к точке D рычаг EM движется по зелёному параллелограмму (см. рис. 4), площадь которого, с одной стороны, равна площади прямоугольника $D"DCC"$, а с другой — произведению длины рычага EM на расстояние, пройденное колесом в этом случае. При этом обратим внимание на то, что в данном случае колесо будет вращаться в направлении, про-

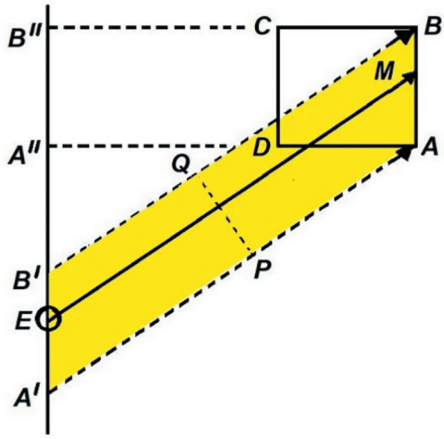


Рис. 3. Схема движения рычага EM при обводе линии AB

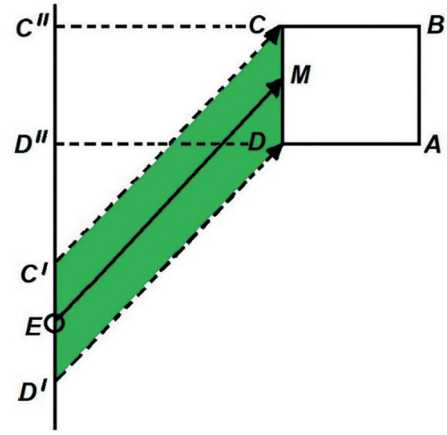


Рис. 4. Схема движения рычага EM при обводе линии CD

тивоположном первому перемещению.

Так как разность площадей прямоугольников $A"ABB"$ и $D"DCC"$ равна площади измеряемой фигуры, то можем сказать, что искомая площадь прямоугольника $ABCD$ равна разности площадей двух цветных параллелограммов. Если колесо связать с некоторым измерительным механизмом со счётчиком, фиксирующим пройденное расстояние, то тогда искомую площадь прямоугольника $ABCD$ можно определить как произведение этого расстояния на длину рычага EM.

«Как же так, — спросите вы, — ведь при обводке контура $ABCD$ есть ещё перемещения от B к C и от D к A, которые не были учтены!». Дело в том, что движения по BC и по DA одинаковы, но противоположны, поэтому они компенсируют друг друга, не влияя на показания счётчика.

Итак, важный вывод — в данном случае искомая площадь определяется показанием счётчика пройденного расстояния и размером рычага EM.

Приведённые выше рассуждения можно распространить и на измерение площади фигур, в контуре которых есть и кривые линии. В таких случаях, кроме поступательных перемещений рычага EM, будут происходить и его повороты относительно точки E. Однако и это перемещение будет фиксироваться счётчиком.

Можно подобрать такие размеры колеса, рычага EM и деталей, связывающих колесо со счётчиком, при которых счётчик планиметра будет показывать не пройденное расстояние, а площадь измеряемой фигуры на плане (карте) или реальную площадь участка земли. Указанные обстоятельства и лежат в основе конструкции и работы обводных линейных планиметров.

Подробные комментарии к теории использования полярных планиметров приведены в [3].

Линейные планиметры

Идея обводного линейного планиметра была впервые предложена баварским землемером Иоганном Мартином Германом (1785?-1841) в 1814 году[2]. Герман изготовил один экземпляр планиметра и пользовался им в своей работе. Но описание устройства Герман не опубликовал, и об этой работе стало известно только через много лет.

Планиметр Германа не сохранился, до наших дней дошел только один чертёж, выполненный самим изобретателем (рис. 5).

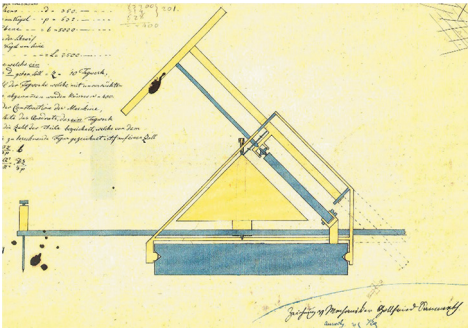


Рис. 5. Чертеж линейного планиметра Иоганна Германа

В 1824 г. независимо от Германа конструкцию линейного планиметра разработал известный итальянский математик, физик и изобретатель[3] Тито Гонелла (1794-1867). Его описание дважды, в 1825 и 1841 гг., было издано во Флоренции (рис. 6). В 1851 г. планиметр Гонеллы был удостоен высшей награды на Всемирной выставке в Лондоне, но практического применения не получил — возможно, из-за сложности его изготовления с достаточной точностью. Планиметр, подаренный изобретателем Великому герцогу Тосканскому, к сожалению, не сохранился.

Оригинальную конструкцию линейного планиметра создал швейцарский инженер Иоганн Оппикофер (1782-1864) в 1826 г. (рис. 7). Его соотечественник геодезист Каспар Ветли (1822-1889), разработал в 1849 г. свой планиметр (рис. 8), — как и планиметр Гонеллы, он был удостоен наградами Всемирной выставки 1851 г. В 1855 г. известный немецкий астроном Петер Ганзен (1795-1874) усовершенствовал его конструкцию, и этот планиметр получил известность как планиметр Ганзена-Ветли (рис. 9).

К концу столетия множество крупных и мелких фирм в больших количествах изготавливали планиметры самых разных конструкций. Наиболее известными производителями планиметров были компании Якоба Амслера, ведущая свою историю с 1867 г. американская компания *Keuffel and Esser (K&E)* (один из выпускавшихся ею линейных планиметров показан на рис. 10), основанная в 1880 г. в Цюрихе фирма Готлиба Коради (1847-1927) и другие.

Но со временем линейные планиметры вышли из употребления и были заменены более точными и более простыми конструктивно полярными планиметрами.

---

[2] Эффектная анимация, демонстрирующая устройство и использование планиметра Германа, представлена по адресу: *https://www.youtube.com/watch?v=XQXO6edF6sA&ab_channel=calculatryx*

[3] Среди его изобретений — одно из первых механических устройств для сложения — клавишных сумматоров (1859 г.).

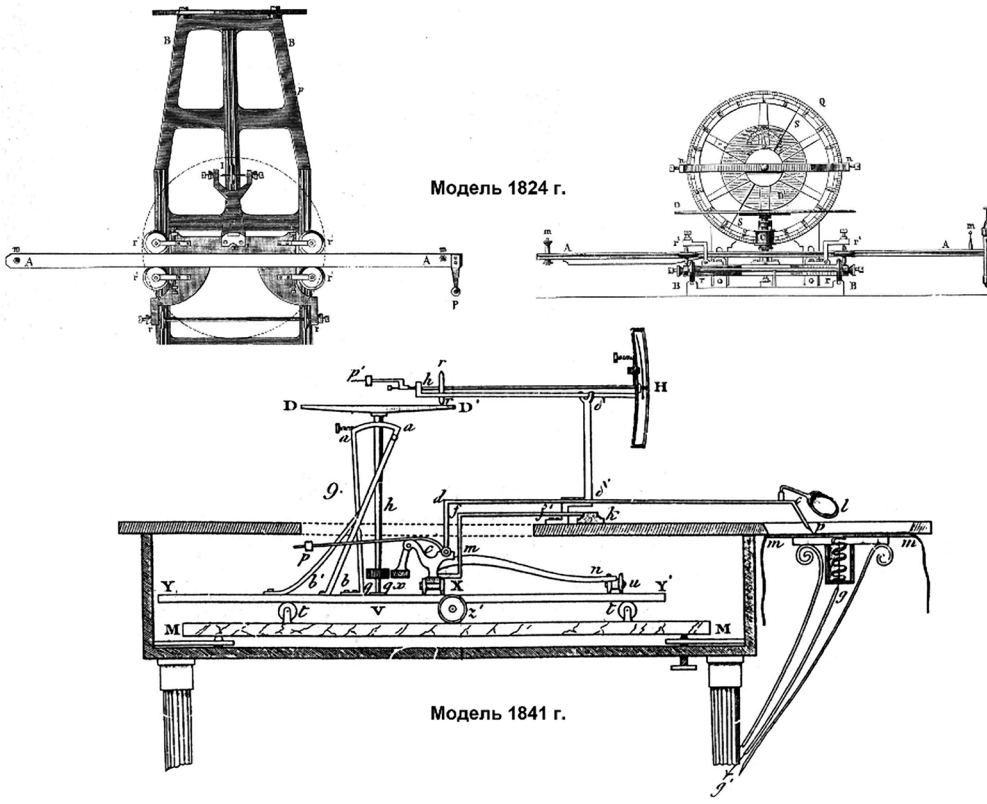


Рис. 6. Чертежи линейного планиметра Тито Гонеллы

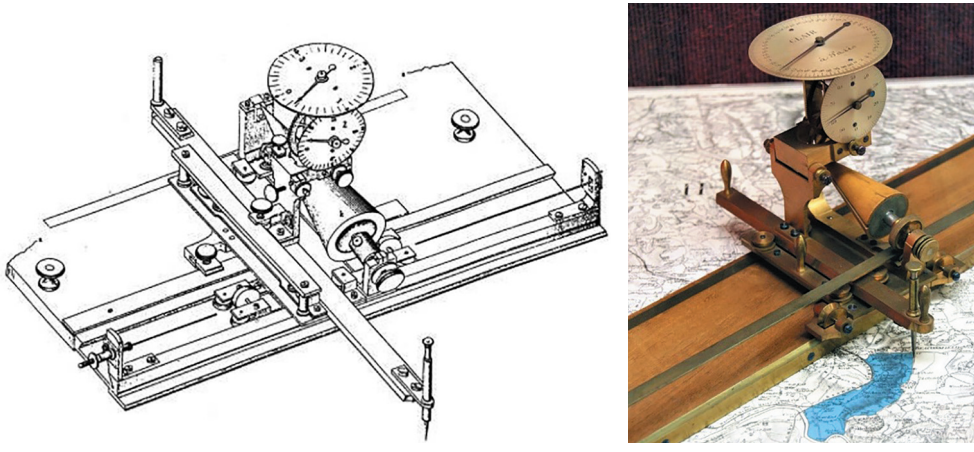


Рис. 7. Линейный планиметр Иоганна Оппикофера

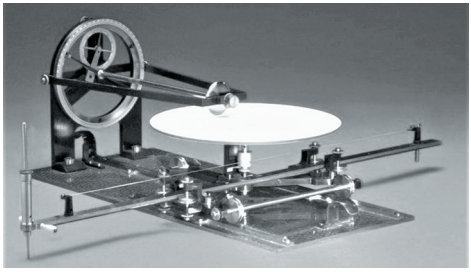


Рис. 8. Линейный планиметр Каспара Ветли

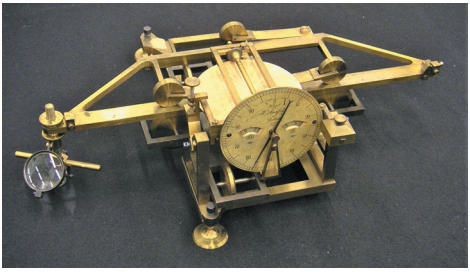


Рис. 9. Линейный планиметр Ганзена-Ветли

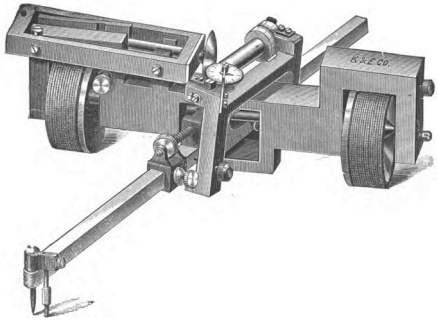


Рис. 10. Линейный планиметр фирмы K&E

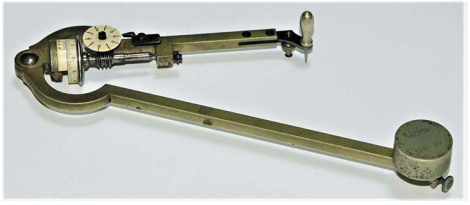


Рис. 11. Полярный планиметр Якоба Амслера



Рис. 12. Полярный планиметр П.А. Зарубина

Полярные планиметры

Конструкцию полярного планиметра предложили почти одновременно независимо друг от друга в середине 50-х годов XIX века швейцарский математик Якоб Амслер (1823-1912), см. рис. 11, и упоминавшийся в статье [1] выдающийся российский изобретатель-самоучка Павел Алексеевич Зарубин (1816-1886), см. рис. 12.

В течение следующего столетия было разработано и выпускалось множество полярных планиметров разных конструкций. На рис. 13 показан один из планиметров середины XX века. Обратим внимание, что полюс внутреннего стержня выполнен массивным для обеспечения непод-

вижности полюса во время измерений (поскольку на карте иголку использовать нежелательно).

В конце прошлого века на смену механическим пришли современные электронные (цифровые) планиметры. Они тоже являются полярными (рис. 14).



Рис. 13. Полярный планиметр середины XX века

Планиметр-топорик

Ещё одной разновидностью обводных планиметров является так называемый «планиметр-топорик» [4]. Его вид показан на рис. 15.

Такой прибор был предложен около 1875 года офицером Генерального штаба датской армии капитаном Хольгером Притцем (1848-1930). Заметим, что Притц назвал своё изобретение *Stangplanimetret* (по-датски — *планиметр-стержень*), ведь, как мы видим, прибор представлял из себя изогнутый в виде буквы П металлический прут. Однако спустя несколько лет один из авторов, писавших о новом приборе, назвал его «планиметром-топориком» (*The Hatchet-planimeter*). Это название прижилось, и даже изобретатель принял его. Действительно, если один из концов прибора *F* был заострён, то другой, *A* — был сплющен и походил на лезвие топора.



Рис. 14. Современный цифровой планиметр

Планиметр использовался следующим образом (см. рис. 16). Его остриё устанавливалось приблизительно в центре тяжести *o* фигуры, площадь которой необходимо было определить, и нажимом лезвия на карте делалась отметка *K*. Затем остриё переносили по прямой линии в какую-то точку *a* на контуре фигуры и обводили им контур, после чего по линии *ao* вновь возвращали в центр фигуры. При этом основание лезвия пройдет замысловатым «маршрутом» и окажется в новом положении, где также делали отметку *K*'. Искомая площадь определялась как произведение расстояния между двумя отметками *K* и *K*' на расстояние между острием и центром лезвия (базу планиметра).

Конечно, возникает вопрос: «Почему?». Попробуем разобраться.

Прежде всего, обратим внимание на особенность конструкции планиметра — его остриё находится в плоскости лезвия. Эта особенность определяет «маршрут», по которому пройдёт лезвие топорика.

В зависимости от формы обводимого контура линия, описанная лезвием топорика, будет меняться, но в целом при выборе начальной точки обвода внутри контура фигуры она

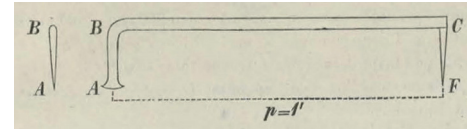


Рис. 15

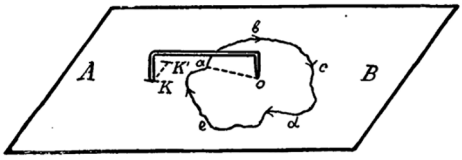


Рис. 16

будет иметь характерный вид, представленный в нижней части рис. 17[4]. Вид кривой для случая обвода круга показан на рис. 18[5]. Именно применительно к нему мы всё обсудим[6].

Чтобы определить теперь площадь обведённой фигуры, надо измерить в радианах угол φ (T_0OT_1) между начальным и конечным положением планиметра и умножить его на l^2. Если угол φ невелик, то вместо него достаточно измерить хорду T_0T_1 и получить произведение $l \times T_0T_1$. Это правило можно получить из общей теории планиметра, которую здесь мы приводить не будем[7]. Это означает, что планиметр-топорик не нуждается даже в измерительном колёсике.

Чтобы показать, что искомую площадь можно рассчитать как φl^2, предположим, что планиметр-топорик всё же снабжен измерительным колёсиком, насаженным на его конце (рядом с лезвием). Тогда при обводе границы фигуры колёсико будет только скользить, и потому поворот его окажется нулевым.

Если, однако, колёсико насадить в середине топорика, то пово-

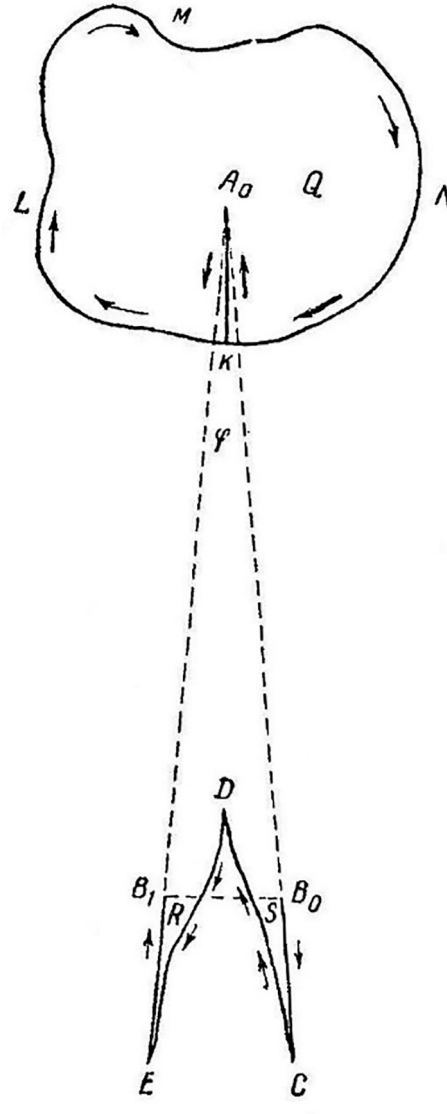


Рис. 17

---

[4] Использован рисунок из книги [2].

[5] Приведён рисунок из статьи [3]. Там же отмечается, что по такой кривой — так называемой «кривой погони» должен бежать охотник за зайцем, если он, «поймав зайца на мушку», захочет в течение всей погони держать его под прицелом и при этом не менять направление ружья относительно корпуса.

[6] При описании использованы материалы из статьи [3].

[7] Элементарную геометрическую теорию топорика-планиметра привёл академик А.Н. Крылов в [5].

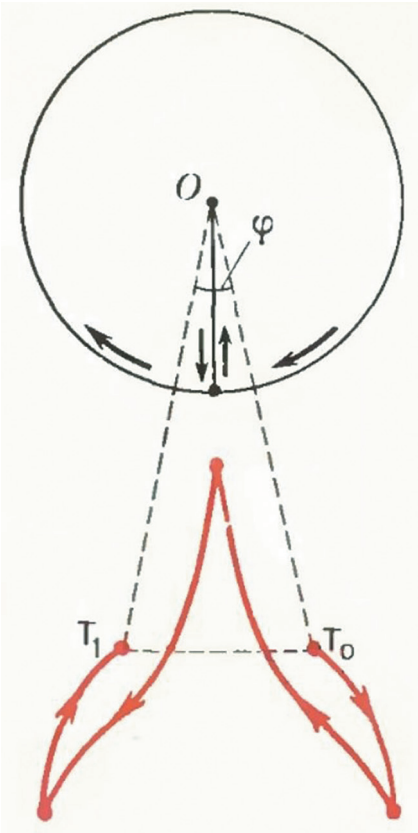


Рис. 18

рот его составит $1/2\varphi$ (почему?). На такую же дугу $1/2\varphi$ повернется колёсико при повороте стержня из положения OT_0 в OT_1, а всего — на $l\varphi$. Поэтому алгебраическая сумма площадей, «обработанных» планиметром, окажется равной $l^2\varphi$. Остается только заметить, что эта величина равна алгебраической сумме искомой площади S и площади s, ограниченной кривой погони (она замыкается поворотом планиметра на угол φ). Можно доказать, что если начальная точка O обвода расположена близко к центру тяжести измеряемой фигуры, то s близко к нулю, поэтому $S = \varphi l^2$ [3].

В заключение заметим (читателям, знакомым с понятием «интеграл»), что все обводные планиметры, по сути являются приборами для вычисления определённого интеграла (как известно, определённый интеграл функции может быть рассмотрен как площадь под графиком этой функции в заданном интервале).

Литература

1. Златопольский Д.М., Шилов В.В. Как определяли площадь в XIX веке // Потенциал. Математика, физика, информатика. 2024. № 11.
2. Знаменский М.А. Измерительные работы на местности: Пособие для студентов физ.-матем. фак. пед. ин-тов. 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1960.
3. Садовский Л.Е., Садовский А.Л. Как измеряют площадь // Квант. 1973. № 10.
4. Шилов В.В., Златопольский Д.М. Просто, но эффективно, или Из топора — не только каша 😊 // Потенциал. Математика, физика, информатика. 2024. № 3.
5. [Крылов А.Н.]. О планиметре-топорике, перевёл с англ. Г. // Морской сборник. 1904. № 6.

МУДРЫЕ МЫСЛИ

«Математика, излагаемая в стиле Евклида, представляется нам систематической, дедуктивной наукой. Но математика в процессе создания является экспериментальной, индуктивной наукой».

Д. Пойа