

Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент,
Лаборатория по работе с одаренными детьми МФТИ

Геометрическая оптика за пределами параксиального приближения

Часть 1

Рассказано о серии экспериментов с набором толстых линз для непараксиальных лучей. Проведен теоретический анализ этих экспериментов для плосковыпуклой, выпукло-плоской и двояковыпуклой линз, позволивший определить показатель преломления материала, из которого изготовлены линзы.

Введение

Недавно автору достался любопытный набор линз производства, … разумеется, Китая. На самом деле, в него входили еще и лазеры (что-то вроде лазерных указок), зеркала и плоскопараллельная пластина. Набор оказался чрезвычайно



Рис. 1

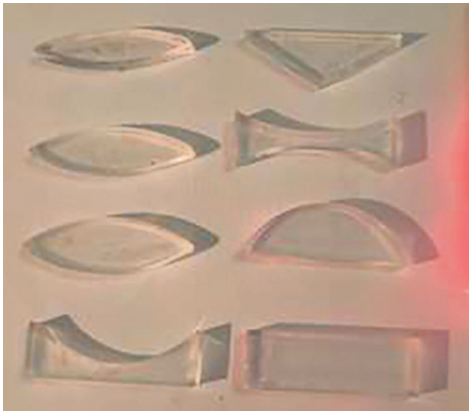


Рис. 2

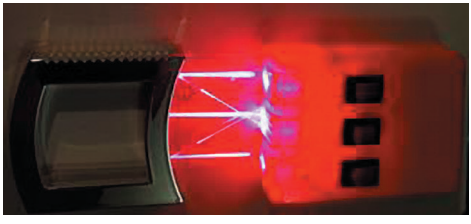


Рис. 3

удобным для экспериментирования. Сразу стало ясно, что работая с ним (почти играя) школьнику ничего не стоит на опыте изучить все законы геометрической оптики школьной программы. Впрочем, оказалось, что не только школьной. Было ли это предусмотрено создателями замечательного набора, автору статьи не известно. Плохо это или хорошо, — судить читателю и пользователю чудо-набором.

Автор намерен рассказать не обо всём наборе. Всем им он еще сам не наигрался. Но что-то сразу заинтересовало. Со временем, автор намерен продолжить рассказ о чудо-наборе. Но всё же со временем.

Первое, что бросилось в глаза — это был набор ПЛОСКИХ линз. Мы привыкли к тому, что рисуя ход лучей, например, в линзе, мы всегда интересуемся одной какой-то плоскостью, например, плоскостью, образованной двумя прямыми — лучом и оптической осью линзы. (Рисовать проще всего, разумеется, именно нечто плоское.) В чудо-наборе это явно предусмотрено.

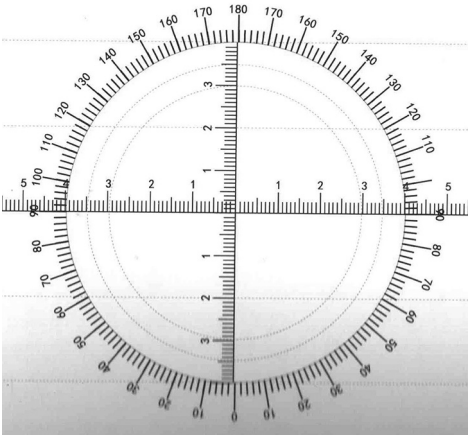


Рис. 4

В набор входит и простенький оптический стол. Для решения школьных задач его хватает. Линейка и транспортир, нарисованные на оптическом столе, позволяют очень легко, но вполне точно нужным образом расположить линзы, зеркала или плоскопараллельную пластину. Причём, всё поддается измерению. Есть возможность не просто показать ход лучей, но всё, что надо, измерить. Этим и занялся автор статьи. И предлагает читателям присоединиться к нему.

Работая с чудо-набором линз, обращают на себя, внимание два обстоятельства: 1) линзы заведомо не тонкие и 2) ход лучей в них далек от того, что называют приосевыми лучами (интересуясь лишь такими лучами, говорят, что это параксиальное приближение).

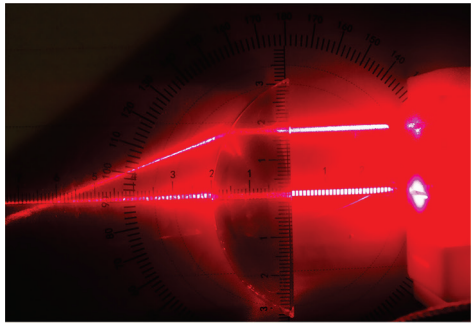


Рис. 5

Про толстые линзы в школьном курсе оптике еще рассказывается (Павленко Ю.Г. [1], Дельцовы В.П. и В.В. [2]), но то, что мы находимся, в области параксиального приближения, об этом часто говорится лишь скороговоркой даже в продвинутых курсах вузовской геометрической оптики (см. книги Алешкевича В.А. (МГУ) [3], Бутикова Е.И. (СПб ун-т) [4], Ландсберга Г.С. (МГУ, МФТИ) [5], Матвеева А.Н. (МГУ) [6], Савельева И.В. (МИФИ) [7], Сивухина Д.В. (МФТИ) [8]).

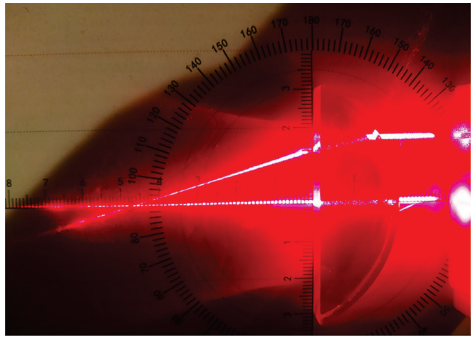


Рис. 6

Реальные линзы из нашего набора, явно, не таковы. Поэтому автор статьи с самого начала решил все вычисления вести в максимально общем виде. Это сделало алгебру не такой простой, как в обычной средней школе. Всё же алгебра оказалась не чересчур сложной. В некоторых случаях автор обошёлся настольным калькулятором (хотя и Scientific Calculator: в оптике нужны синусы, арксинусы,...). Удобней все же оказалось написать коротенькие программки в MATHEMATICA фирмы Wolfram Research, которые приводятся ниже.

Во всех случаях автор статьи старался сравнивать свои результаты с тем, что получается для тонких линз в параксиальном приближении. Далее оценивается погрешность приближенных формул по сравнению с более точными данной статьи.

1. Изучение плосковыпуклой линзы

Плосковыпуклой (ПВЛ) назовём линзу, свет на которую падает на ее плоскую поверхность, а выходит из выпуклой (Рис. 5). Если на эту же линзу свет падает со стороны выпуклой поверхности, а выходит из линзы через плоскую поверхность, то такую линзу будем называть выпукло-плоской (ВПЛ). Расчеты в случае ПВЛ наиболее просты, так как преломление на плоской границе при перпендикулярном падении на неё света совсем простое: преломленный луч будет просто продолжением падающего. Более или менее сложные вычисления возникают лишь при выходе луча из линзы через выпуклую поверхность.

В случае ВПЛ расчетов требует и преломление при входе луча в линзу (на выпуклой поверхности) и на выходе из линзы (на плоской поверхности), так как на и на вторую поверхность свет будет падать не перпендикулярно (Рис. 6). Здесь расчеты чуть более сложные, чем

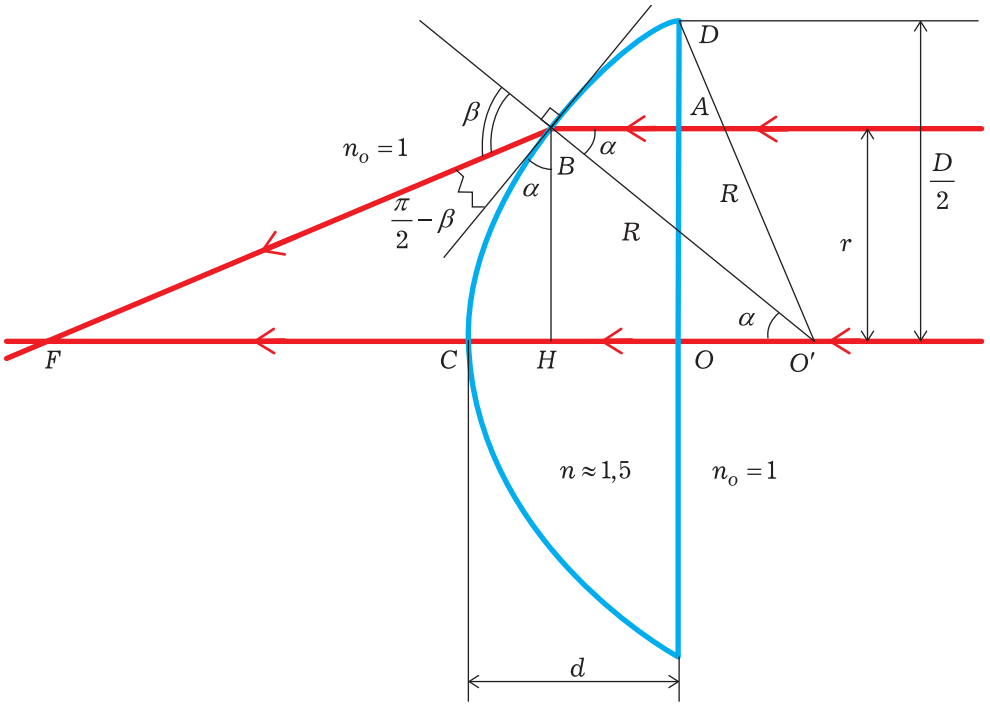


Рис. 7

в случае ПВЛ (см. следующий параграф).

Начнем наше рассмотрение с плосковыпуклой линзы (Рис. 5 и 7). Целью автора было определение показателя преломления материала линзы. Не станем выводить формулы для n через находимые в эксперименте значения d, D, r и FO. Проще решить прямую задачу: сделав некоторое предположение о значении n (например, что $n = 1{,}5$), вычислить FO и сравнить его с полученным из опыта значением. Если расхождение будет значительным, можно подкорректировать значение n, добившись в конце концов разумного согласия между вычисленными и измеренными значениями FO. Обратная задача, явно, сложнее. В случае выпукло-плоской линзы обратная задача еще более громоздка, а в случае двояковыпуклой линзы она была бы чрезвычайно громоздкой.

Измерения дают:

$d = 19{,}6$ мм,

$D = 59{,}6$ мм,

$r \approx 18$ мм;

$FO \approx 60$ мм.

Диаметр D и толщину линзы d находим с помощью штангенциркуля, поэтому сохраняем первую цифру после запятой. Расстояние от луча до главной оси линзы r и расстояние FO определены, явно, с меньшей точностью (рис. 5-6); в их значениях вряд ли стоит удерживать три значащих цифры.

Из $\Delta ODO'$ по теореме Пифагора $R^2 = (D/2)^2 + (R-d)^2$ находим радиус кривизны линзы:

$$R = \frac{d^2 + (D/2)^2}{2d} \approx 32{,}3 \text{ мм}.$$

Далее вычисляем

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{18}{32{,}3} \approx 0{,}557 \Rightarrow \alpha \approx 33{,}8^\circ$$

(временно сохраняем три значащие цифры). Для показателя преломления $n = 1{,}5$ (до измерений это было лишь гипотезой) имеем $\sin\beta = n\sin\alpha \approx 0{,}835 \Rightarrow \beta \approx 56{,}6^\circ$. Отсюда $\beta - \alpha \approx 22{,}8^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \approx \approx 0{,}420$.

$FO = FC + d = FH - CH + d$, и с учетом $FH = r\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha\right) = r\ \operatorname{ctg}(\beta - \alpha) \approx$ $\approx 42{,}9$ мм, а также $CH = CO' - HO' = = R(1 - \cos\alpha) \approx 5{,}5$ мм окончательно получаем $FO = r\ \operatorname{ctg}(\beta - \alpha) - R \times \times(1 - \cos\alpha) + d \approx 57$ мм, что находится в хорошем согласии с полученным в эксперименте значением ≈ 60 мм.

Еще лучше это согласие для показателя преломления $n = 1{,}48$: при этом $FO \approx 59{,}6$ мм. С учетом погрешности в измерении r и FO, можно сказать, что уточнение (1,48 по сравнению с 1,5) было бы все же превышением точности.

Плоскость, проходящую через точку пересечения падающего на толстую линзу луча и вышедшего из нее и перпендикулярную оси линзы, называют задней главной плоскостью линзы. Для разных, но приосевых лучей (параксиальное приближение) это одна и та же плоскость. Если расстояния от падающих лучей до оси не малы, это могут быть разные плоскости. За пределами параксиального приближения разные лучи не сойдутся и в одной точке F.

В нашем случае расстояние FH от фокуса до главной плоскости линзы $FH \approx 43$ мм (см. рис. 7, а также рисунки 8–10 для выпукло-плоской (ВПЛ) и двояковыпуклой линзы (ДВЛ)). Фокусным расстоянием в толстой линзе называют именно это расстояние [9–11].

Полезно сравнить найденные величины с фокусным расстоянием, полученным по формулам для тонкой линзы в параксиальном приближении: $f_0 \approx FO \approx FH \approx \frac{R}{n-1} \approx \approx 65$ мм. Для тонкой линзы мы не делали бы различия между FO и FH. В нашем случае (явно не тонкой линзы) это заведомо не так.

2. Изучение выпукло-плоской линзы

Измерение дает значение расстояния: $FO \approx 47$ мм (см. рис. 8 ниже).

Другие расстояния — толщина линзы d, её диаметр D и радиус кривизны R, а также расстояние r от луча до оси — те же, что и в случае ПВЛ.

Как и в предыдущем случае $\sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{18}{32{,}3} \approx 0{,}557 \Rightarrow \alpha \approx 33{,}8^\circ$.

На первой преломляющей поверхности линзы (выпуклой) для показателя преломления $n = 1{,}5$ (снова это пока гипотеза) имеем $\sin\beta = \sin\alpha / n \approx 0{,}380 \Rightarrow \beta \approx 21{,}8^\circ$. Отсюда $\alpha - \beta \approx 12{,}0^\circ = \gamma \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \approx \approx 0{,}213$.

На второй преломляющей поверхности линзы (плоской) имеем: $\sin\gamma = 0{,}209$, $\sin\delta = n\sin\gamma = 0{,}312 \Rightarrow \delta = 18{,}2^\circ$, $\operatorname{tg}\delta = 0{,}330$.

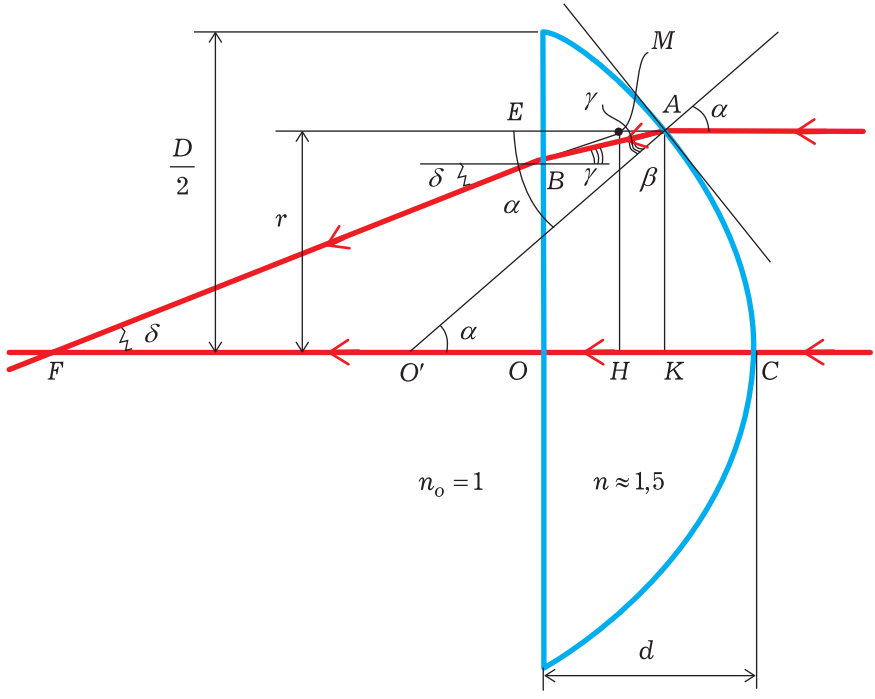


Рис. 8

$$AE = OK = O'K - O'O =$$
$$= \sqrt{R^2 - r^2} - (R - d) = 14{,}3 \text{ мм}.$$

$$BE = AE \ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \approx 3{,}1 \text{ мм}.$$

$$FO = \frac{OB}{tg\delta} = \frac{r - BE}{tg\delta} \approx 45 \text{ мм}.$$

Это весьма близко к найденному в эксперименте значению 47 мм, что оправдывает гипотезу о том, что показатель преломления материала, из которого сделана линза, равен $n = 1{,}5$.

Расстояние FH от фокуса до главной плоскости линзы

$$FH = \frac{r}{\operatorname{tg}\delta} \approx \ 55 \text{ мм}.$$

Напомним, что для тонкой линзы в параксиальном приближении: $f_0 \approx FO \approx FH \approx \dfrac{R}{n-1} \approx$ 65 мм. (Для тонкой линзы мы не делали бы различия между FO и FH). Для выпукло-плоской линзы отличия 45 мм и 55 мм от 65 мм весьма заметные (более 40% и чуть менее 20%).

Как и в случае ПВЛ, формулы для ВПЛ допускают варьирование показателя преломления n (с целью сделать наилучшим согласие теории и эксперимента). При n = 1,48 расстояние $FO = \dfrac{OB}{tg\delta} = \dfrac{r - BE}{tg\delta} \approx 47{,}6$ мм очень близко, к тому, что наблюдается в опыте (47 мм). Однако с учетом погрешностей в измерениях (и величину FO, и расстояние r от луча до оси линзы мы знаем не с тремя значащими цифрами) уточнение 1,48 вместо 1,5 можно считать мнимым.

В обоих случаях — и плосковыпуклой и выпукло-плоской линзы — формулы, конечно, допускали

несложные вычисления с помощью калькулятора. Все же они в несколько шагов, — значительно проще написать коротенькие компьютерные программки, автоматизирующие вычисления. Особенно важно это будет в случае двояковыпуклой линзы.

3. Изучение двояковыпуклой линзы

Двояковыпуклая линза получается сложением двух плосковыпуклых линз

Измерения дают при (см. п. 1):

$d = 19{,}6$ мм,

$D = 59{,}6$ мм,

$r \approx 18$ мм;

значения расстояния $FO \approx 35$ мм (см. рис. 10).

Задачу удобно решать координатным методом. Для этого введем декартову систему координат и следующие обозначения:

$C(-d;0)$ — крайняя левая точка линзы,

$C'(d;0)$ — крайняя правая точка линзы,

$O'(d-R;0)$ — центр окружности правой выпуклой части линзы,

$O''(R-d;0)$ — центр окружности левой выпуклой части линзы,

$A(x_1;r)$ — точка вхождения лазерного луча в линзу,

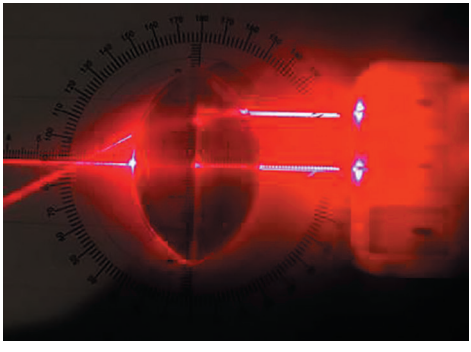


Рис. 9

$B(x_2;y_2)$ — точка выхода луча из линзы,

$M(x_H;r)$ — точка пересечения падающего на линзу луча и вышедшего из нее,

$H(x_H;0)$ — координата задней главной плоскости линзы,

$F(x_F;0)$ — предполагаемый задний фокус линзы.

Для нахождения x-координаты точки A имеем уравнение

$$O'A = R = \sqrt{(O'O + x_1)^2 + r^2} = \\ = \sqrt{(|d-R| + x_1)^2 + r^2}. \qquad (1)$$

Разумеется, оно без труда решается относительно x_1. Мы не станем выписывать решение. Это не окончательная цель задачи, но лишь промежуточный этап: x_1 нам понадобится для нахождения координат точки B, а затем координат точек F и H. Удобно написать компьютерную программку, которая будет все величины вычислять численно. Найденное в конце расчетов расстояние FO потом можно сравнить с найденным в эксперименте (≈ 35 мм) и далее корректировать значение показателя преломления n, подбирая его так, чтобы получить наилучшее согласие между экспериментом и компьютерным счетом. Подходящее n можно считать измеренным показателем преломления материала, из которого сделана линза. Эта программа и реализована далее.

Найдем координаты точки B, из которой луч выходит из линзы. Для этого заметим, что уравнение прямой $y = k(x - x_1) + r$ с $k = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ при $x = x_2$ дает значение y_2: $y_2 = k(x_2 - x_1) + r$. Последнее соотношение станет замкнутым

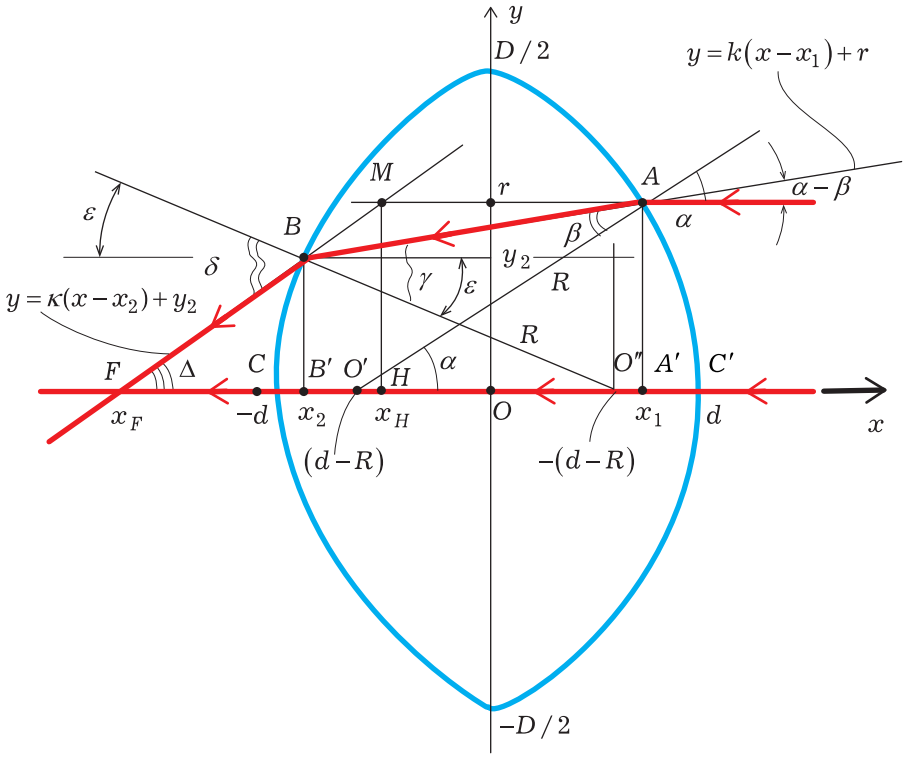


Рис. 10

уравнением относительно x_2, если выразить y_2 через x_2, воспользовавшись теоремой Пифагора для $\Delta BB'O''$:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\,(x_2-x_1)+r = \sqrt{R^2-(R-d-x_2)^2}. \qquad (2)$$

Решение последнего уравнения наиболее громоздко (хотя в принципе возможно). Проще решить его численно. Численное значение x_2 затем понадобится для численного же нахождения координат точек F и H. В уравнение входят пока не известные величины α и β. На самом деле их мы уже находили в п. 2 про выпукло-плоскую линзу. Напомним:

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{18}{32{,}3} \approx 0{,}557 \Rightarrow \alpha \approx 33{,}8^\circ$$

и для показателя преломления $n = 1{,}5$ (снова это пока гипотеза) имеем

$$\sin\beta = \sin\alpha / n \approx 0{,}371 \Rightarrow \beta \approx 21{,}8^\circ.$$

Отсюда $\alpha - \beta \approx 12{,}0^\circ = \gamma$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) \approx 0{,}213$.

После нахождения x_2 легко находим y-координату точки B — по любой из формул

$$y_2 = \operatorname{tg}(\alpha-\beta)\,(x_2-x_1)+r$$

либо $y_2 = \sqrt{R^2-(R-d-x_2)^2}$.

Нам понадобятся еще некоторые углы из рис. 10:

$$\gamma = \alpha - \beta + \varepsilon = \alpha - \beta + \arcsin\frac{y_2}{R}$$

и $\delta = \arcsin(n\sin\gamma)$. Их также удобно найти численно с помощью компьютерной программы.

Запишем еще уравнение прямой, описывающей выходящий из линзы луч:

$$y = \kappa(x - x_2) + y_2,$$

где $\kappa = \mathrm{tg}\Delta = \mathrm{tg}(\delta - \varepsilon)$.

Теперь легко найти x-координату точки F из уравнения $\kappa(x_F - x_2) + y_2 = 0$ и x-координату точки H из уравнения $\kappa(x_H - x_2) + y_2 = r$.

Фокусное расстояние найдётся, тогда как разность $f = x_H - x_F$.

Компьютерная программка в MATHEMATICA очень проста:

```
(* Толстая двояковыпуклая линза;
   не параксиальное приближение *)
dl = 19.8;
Dl = 59.6;
Rl = (dl^2 + Dl^2/4)/(2 dl);
r = 18.;
α = ArcSin[r/Rl];
360/(2π) α;
nl = 1.5;
Sin[α];
β = ArcSin[Sin[α]/nl];
360/(2π) β;
k = Tan[α - β];
Solve[(Abs[dl - Rl] + x1)^2 + r^2 == Rl^2, x1]
{{x1→-39.3752},{x1→14.3247}}
x1 = 14.32;
Solve[k (x2 - x1) + r == √(Rl^2 - (x2 - (Rl - dl))^2), x2]
{{x2→-17.8193},{x2→35.6783}}
x2=-17.82
y2=k (x2-x1)+r
-17.82
11.1413
γ = α - β + ArcTan[y2/(Rl - dl - x2)];
γ = α - β + ArcSin[y2/Rl]
0.562126
360/(2π) γ
32.2075
δ = ArcSin[nl Sin[γ]];
360/(2π) δ
53.0804
ψ = ArcSin[y2/Rl];
360/(2π) ψ
20.1612
κ=Tan[δ-ψ]
0.647406
Solve[κ (xF-x2)+y2==0,xF]
{{xF→-35.0292}}
Solve[κ (xH-x2)+y2==r,xH]
{{xH→-7.22588}}
xF=-35.03;
xH=-7.226;
f=xH-xF
27.804
```

Результаты численного счета:

$x_1 = 14{,}3$ мм, $|x_2| = 17{,}8$ мм, $y_2 = 11{,}1$ мм,

$|x_F| = 35{,}0$ мм (см. данные эксперимента!),

$|x_H| = 7{,}2$ мм, $f = |x_H - x_F| = 27{,}8$ мм.

Для тонкой линзы в параксиальном приближении для $n = 1{,}5$ мы имели бы фокусное расстояние

$$f_0 \approx FO \approx FH \approx \frac{R}{2(n-1)} = R \approx 32{,}3\text{мм}.$$

(Для тонкой линзы мы не делали бы различия между FO и FH)

$$\frac{35{,}0 - 32{,}3}{35{,}0} \approx 0{,}77(\approx 8\%),$$

$$\frac{32{,}3 - 27{,}8}{27{,}8} \approx 0{,}16(16\%).$$

4. Сюрпризы непараксиального приближения

Скажем еще кое-что ВАЖНОЕ о линзах для непараксиальных лучей. Набор линз, о котором рассказывается в настоящей статье, без труда позволяет осуществить сдвиг лучей так, чтобы они прошли на разном расстоянии от оси (рис. 11 для плосковыпуклой линзы), — и они пересекутся, не в одной, а в разных точках (!).

Нарушается гомоцентричность оптической системы.

Это можно проверить и аналитически, по формулам п. 1. Для плосковыпуклой линзы при разных расстояниях r от луча до оси линзы имеем:

r, мм	FO, мм	r, мм	FO, мм
0,1	84,45	10,0	77,17
0,2	84,45	15	66,87
0,3	84,44	16	64,02
0,5	84,43	17	60,80
1,0	84,38	18	57,13
2,0	84,17	19	52,85
5,0	82,69	20	47,63
		21	40,42

Проще всего эту таблицу получить, написав коротенькую программу в MATHEMATICA, каким образом она и была получена.

Несовпадение «фокусов» для разных лучей легко оценить:

$$\frac{85{,}45-82{,}69}{85{,}45}\approx 0{,}02\ (2\%),$$

$$\frac{85{,}45-77{,}17}{85{,}45}\approx 0{,}086\ (\approx 9\%),$$

$$\frac{85{,}45-40{,}42}{85{,}45}\approx 0{,}52\ (52\%).$$

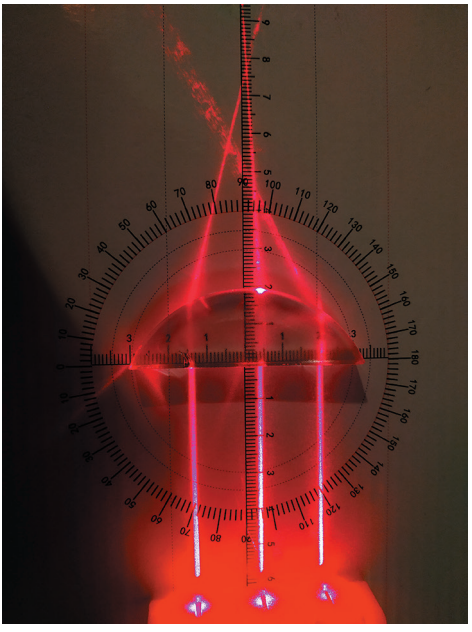


Рис. 11

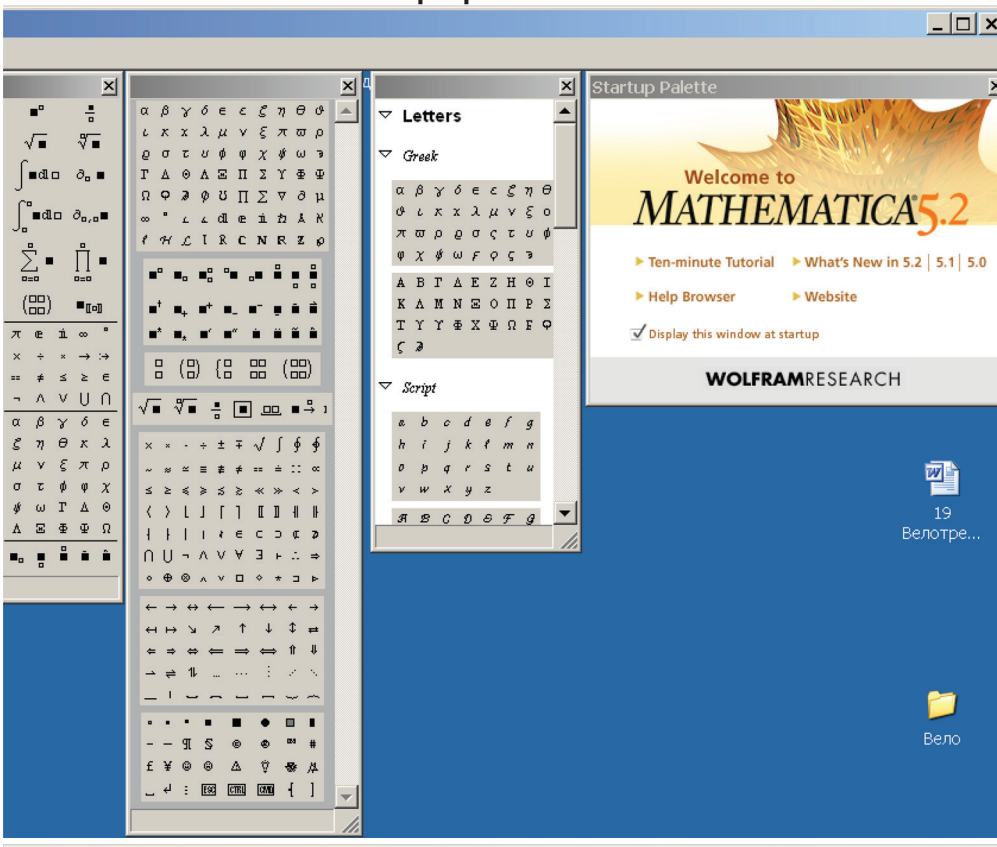
Аналогичные измерения и вычисления можно провести и для других типов линз набора — выпукло-плоских и двояковыпуклых.

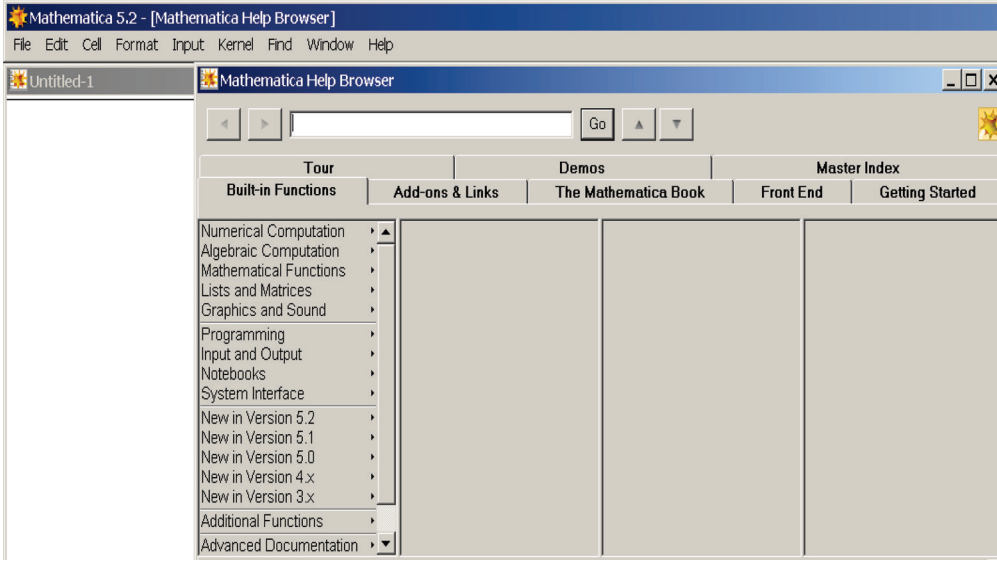
ВЫВОД. Чудо-набор линз хотя и позволяет легко провести серию оптических экспериментов, но при расчетах (например, при попытке определить показатель преломления материала линз) необходимо быть аккуратным, и расчеты вести не по школьным формулам для тонких линз в параксиальном приближении, а по формулам, например, данной статьи.

Несомненную пользу принесет использование компьютера, например пакета MATHEMATICA. Автор пользовался далеко не последней версией этого пакета, а именно MATHEMATICA 5.2. Для школьных нужд его совершенно достаточно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О пакете программ MATHEMATICA





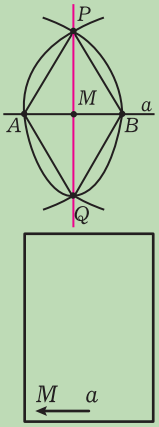
приближение параксиальное		НЕ параксиальное приближение	
r, мм	FO, мм	r, мм	FO, мм
0.1	84.4498	10	77.1671
0.2	84.4477	15	66.8676
0.3	84.4442	16	64.0182
0.5	84.4331	17	60.8036
1	84.3809	18	57.1338
2	84.1716	19	52.8525
5	82.6917	20	47.6323
		21	40.4185
		21.55	30.9972
		21.56	30.8278 +1.17186 ™

Литература

1. Павленко Ю.Г. Начала Физики. Учебник. — 2-е изд. — М.: «Экзамен», 2005. — 864 с.
2. Дельцовы В.П. и В.В. Физика: дойти до самой сути. Волны. Оптика.. — М.: ЛЕНАНД, 2023. — 240 с.
3. Алешкевич В.А. Оптика. — М.: ФИЗМИТЛИТ, 2010. — 320 с.
4. Бутиков Е.И. Оптика. — СПб.: Невский диалект, 2003. — 480 с.
5. Ландсберг Г.С. Оптика. — 5-е изд. — М.: Наука, 1976. — 928 с.
6. Матвеев А.Н. Оптика. — М.: Высшая школа, 1985. — 352 с.
7. Савельев И.В. Курс общей физики, т.III, Оптика, атомная физика, физика атомного ядра и элементарных частиц. — 4-е изд. — М.: Наука, 1970. — 528 с.
8. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.IV, Оптика. — М.: Наука, 1980. — 752 с.
9. Шредер Г., Трайбер Х. Техническая оптика. — М.: Техносфера, 2006. — 424 с.
10. Янг М. Оптика и лазеры, включая волоконную оптику и оптические волноводы. — М.: Мир, 2005. — 541 с.
11. Апенко М.И., Запрягаева Л.А., Свешникова И.С. Задачник по прикладной оптике. — М.: Высшая школа, 2003. — 591 с.

КАЛЕЙДОСКОП

Построение перпендикуляра. Трудный случай



О том, как с помощью циркуля и линейки построить прямую, проходящую через данную точку M на прямой a и перпендикулярную этой прямой, рассказывается, например, в учебнике [1]. Напомним методику такого построения.

На лучах прямой a, исходящих из точки M, откладываются равные отрезки MA и MB. Затем строятся две окружности радиуса AB с центрами A и B, которые пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через эти точки, – перпендикуляр к a.

А если точка M находится близко к левому нижнему углу листа бумаги? Как построить перпендикуляр в таком случае?

Литература

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 7-9 класс. 2023.

Ответ на стр. 47