

Колесникова Софья Ильинична
Заслуженный преподаватель МФТИ (кафедра высшей математики),
Ведущий специалист ЗФТШ при МФТИ.
Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» (гриф ФИПИ),
«Решение сложных задач ЕГЭ», серии пособий
«МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ».
Лауреат премии Правительства Российской Федерации
в области образования 2020 г.

Учебник, учитель, ГДЗ, репетитор и … ученик

(Читаем учебники: ч. 3. Новое ОДЗ — «хамелеон»?)

Новое ОДЗ — «хамелеон»

Без ОДЗ — как без воды: «и ни туды, и ни сюды».

Продолжим разговор о новом ОДЗ.

Что значит «Задано уравнение $f(x) = g(x)$» и что значит «его решить, или найти его корни»?

С одной стороны, это значит, что надо найти такие значения x, после подстановки которых в выражения, стоящие справа и слева, равенство превращается в *числовое* тождество. Понятно.

С другой стороны, это значит, что речь идёт о функциях $y = f(x)$ и $y = g(x)$, имеющих *свои* области определения $D(f)$ и $D(g)$, и требуется найти значения аргументов, при которых эти функции равны.

Вопрос — «На каком множестве можно одновременно рассматривать две функции?»

По-моему, ясно, что на $D(f) \cap D(g)$.



Но, как выяснилось, равенство $f(x)=g(x)$ на $D(f)\cap D(g)$ не всегда имеет смысл.

Например,

$$x^2=\sin x-3\Rightarrow D\left(x^2\right)\cap D(\sin x-3)=R,$$

но очевидно, что равенство не имеет смысла. Поэтому я считаю, что $ОДЗ:\varnothing$.

Так появилось «новое» ОДЗ.

Множество М, на котором

а) *определены* заданные функции $F(x), f(x), g(x)$**, и**

б) *равенства* $F(x)=0$ **или** $f(x)=g(x)$ **(неравенства** $F(x)\vee 0$ **или** $f(x)\vee g(x)$**)**

***имеют смысл*,**

назовём *ОДЗ* уравнения $F(x)=0$ **или** $f(x)=g(x)$ **(неравенств** $F(x)\vee 0$ **или** $f(x)\vee g(x)$**).**

Что оно нам даёт?

1) Оно даёт то, что при этом сразу *исчезают* уравнения и неравенства, заведомо не имеющие решений. Исчезают посторонние корни, которые являются решениями «бессмысленных» уравнений (неравенств), входящих в так называемые «следствия».

Например, $2^x=-\sin^2 x\Rightarrow$ $\Rightarrow D\left(2^x\right)\cap D\left(\sin^2 x\right)=R$, а равенство не имеет смысла, т. е. ОДЗ: $\varnothing$.

2) Теперь легко сформулировать утверждение: «Множество М не является ОДЗ, например, уравнения $f(x)=g(x)$».

«Множество М не является ОДЗ, например, уравнения $f(x)=g(x)$, если

а) или $f(x)\notin D(f)\cap D(g)$, или $g(x)\notin D(f)\cap D(g)$;

б) или равенство $f(x)=g(x)$ не имеет смысла».

Любопытно?

Примеры:

(1) Задано уравнение

$$2^{\lg\left(x^2+1\right)}=\cos x-1.$$

Запишем новое ОДЗ:

1) Левая часть и правая определены для любого $x\in R$

2) Однако равенство не имеет смысла, т. к. показательная функция принимает только положительные значения, а $\cos x-1\le 0$ при любом $x\in R$.

(2) Задано уравнение

$$\sqrt{f(x)}=-x^2-1.$$

Ясно, что при любом $f(x)$ равенство не имеет смысла, а поэтому ОДЗ: $\varnothing$.

Как оформлять решения при новом ОДЗ?

Очень просто — как всегда, любым из двух способов:

а) либо записать ОДЗ, но неравенства раньше времени не решать, а перейти к решению уравнения в ОДЗ;

При новом ОДЗ теперь школьнику легче объяснять, что делать с $g(x)$ при решении, например, уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

Можно записать ОДЗ:

$$\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Тогда в ОДЗ обе части уравнения неотрицательны, и возведение обеих частей уравнения в квадрат «законно» и приводит к равносильному уравнению $f(x)=g^2(x)$.

б) либо сразу записать ОДЗ в равносильную систему. Это бывает

выгоднее, потому что иногда в равносильной системе в результате преобразований количество вычислений может сократиться.

Как правило, уравнение или неравенство равносильно системе, в которую входит ОДЗ и основное равносильное уравнение или неравенство. Так и в этом случае:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Rightarrow ОДЗ:\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\end{cases}\text{ но…,}$$

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$$

— условие $f(x)\ge 0$ проверять не надо — оно в системе выполняется автоматически.

Можно рассмотреть ещё пример.

$$2^{\log_2 f(x)}=g(x)\Rightarrow\ ОДЗ:\ \begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\end{cases}\text{ но}$$

$$2^{\log_2 f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ \left[\begin{array}{l}f(x)>0,\\ g(x)>0\end{array}\right.\end{cases}$$

— и для «проверки» условий $\left[\begin{array}{l}f(x)>0,\\ g(x)>0\end{array}\right.$ можно выбрать более простое неравенство.

Приведём интересный пример применения нового ОДЗ.

Пример 1. ([1], 215, 283 (издание 2022, стр. 235 и 275)

Решите уравнение

$$3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)}=2x-5\,.$$

► *Первый способ*

Как начнёт решать это уравнение любой школьник?

Во-первых, вспомнит основное логарифмическое тождество и условия его применения:

$$3^{\log_3 b}=b,\ \ b>0.$$

Затем запишет уравнение

$$x^2-4x+3=2x-5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=4,\\ x_2=2.\end{array}\right.$$

Проверит корни и получит **Ответ**. 4.

Второй способ (наше решение)

Запишем новое ОДЗ:

$$\begin{cases}x^2-4x+3>0,\\ 2x-5>0\end{cases}$$

сразу в равносильной системе:

$$3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)}=2x-5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+3=2x-5,\\ \left[\begin{array}{l}x^2-4x+3>0,\\ 2x-5>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\pm 1,\\ 2x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=4.$$

Видим, что «сработало» условие, при котором заданное равенство имеет смысл — показательная функция $y(x)=3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)}$ всегда положительна! Оно для вычислений проще, чем условие существования основного логарифмического тождества.

Ответ. 4.

Примечание. В этом примере авторами учебника использовалась

«формула» $3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)} = x^2-4x+3$, не обращая внимания на знак квадратного трёхчлена.◄

Пример 1* ([1], 283, (275)). Решите уравнение

$$3^{\log_3(2x-5)} = x^2-4x+1.$$

►Авторы в качестве М выписывают только $2x-5>0$, хотя на самом деле

$$M=\begin{cases}2x-5>0\\ x^2-4x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow x>2+\sqrt{3}.$$

Однако для решения с помощью равносильной системы выписывать М вовсе не обязательно, т. к. там работает совокупность:

$$3^{\log_3(2x-5)} = x^2-4x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-5 = x^2-4x+1,\\ \left[\begin{array}{l}2x-5>0\\ x^2-4x+1>0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-6x+6=0,\\ 2x-5>0\end{cases} \Leftrightarrow x=3+\sqrt{3}.$$

Здесь сработало условие существования основного логарифмического тождества — оно проще условия существования смысла равенства.

Пример 2. Решите уравнение

$$3^{\log_3(2x-5)} = 4-x^2.$$

►Запишем новое ОДЗ:

$$\begin{cases}2x-5>0 \Leftrightarrow x>2{,}5,\\ 4-x^2>0 \Leftrightarrow x\in[-2;2]\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Значит, и $3^{\log_3(2x-5)} = 4-x^2 \Leftrightarrow \varnothing$.

Ответ. $\varnothing$.◄

В первой части статьи (Потенциал №2, 2025) был приведён пример самого «главного виновника» для введения нового определения ОДЗ — это уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$. Просто невозможно стало читать фразу «возведём уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ в квадрат и получим следствие $f(x)=g^2(x)$».

По новому определению ОДЗ имеем:

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x)=g^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$$

или

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \overset{x\notin ОДЗ}{\Leftrightarrow} \varnothing, \text{ или}$$

$$\begin{cases}\sqrt{f(x)}=g(x),\\ \left[\begin{array}{l}f(x)<0,\\ g(x)<0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Без использования ОДЗ «возводить уравнение в квадрат» не имеет смысла.

Во второй части статьи мы обратили внимание на то, что в литературе ([1], [2]), помимо известного понятия равносильности, появилось *новое* понятие: «равносильность уравнений (а затем и неравенств) на некотором множестве», которое обозначили буквой М.

Будем листать параграф с таким названием. Честно говоря, читая рассуждения в первом же примере ([1] стр. 220 (266)) о неравносильности $\sqrt{x}=1$ и $x^2=1$, я почувствовала недоумение: как можно сравнивать такие уравнения на равносильность, не учитывая ОДЗ?

Ясно, это потому, что общепринятое определение равносильности относится к уравнениям (неравенствам), определённым на R (видимо, кто-то «первым» потерял слова «на множестве», а остальные так и стали писать).

Ясно, что общее ОДЗ: $x \geq 0$.

В [1], стр.206 (226)) написано, что возведение в 4-ую степень обеих частей уравнения $\sqrt{x} = 1$ приводит к уравнению — следствию $x^2 = 1$. Но где написано, что это возможно? Известно, что в ОДЗ (обе части неотрицательны в ОДЗ) уравнения $\sqrt{x} = 1$ это возможно.

Тогда

$$\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}\right)^4 = 1, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,$$

а, значит, и

$$\sqrt{x} = 1 \overset{x \geq 0}{\Rightarrow} x = 1$$

как *всякое равносильное* соотношение является одновременно и следствием.

Следующий пример «ещё лучше». Сравниваются два уравнения:

$$2\lg x = 1 \left(ОДЗ_1 : x > 0\right) \text{ и } \lg x^2 = 1 \left(ОДЗ_2 : x \neq 0\right).$$

Как их можно сравнивать на R, если ни одно из них на R даже не определено? В учебнике объясняется, что эти уравнения неравносильны, т к. одно имеет один корень, а другое — два — ни слова о том, почему так получилось. А ведь всё просто — у уравнений разные ОДЗ. Общим является множество $ОДЗ_1 \cap ОДЗ_2 = x > 0$, а на нём уравнения, исходя из свойств логарифмов, равносильны, — и нечего «изобретать» новое множество М. Уравнения — следствия будем обсуждать позже.

Так может ОДЗ изменяться? Может. Как?

Этого не может быть,
потому что не может быть никогда.
(А. П. Чехов)

Может, но... не так, как написано во всех учебниках. В учебниках написано, что ОДЗ ***заданного*** уравнения может расшириться, могут появиться «посторонние» корни — например, при «возведении» уравнения в чётную степень, при переходе к уравнению — следствию, при потенцировании, при сокращении одинаковых слагаемых и т. д.

Заметим, однако, что и уравнение — следствие, и уравнение, полученное при потенцировании, при возведении в степень и т.д. — это, как правило, ***не заданные*** уравнения, и у них, *естественно*, могут быть ***свои*** ОДЗ. Но это *не значит, что изменилось ОДЗ* ***заданного*** уравнения.

Как это ни смешно, но *мысль об изменении ОДЗ уравнения* пришла при чтении решения **Примера 3.**

Пример 3. ([2]). Решите уравнение

$$x^2 + \sqrt{2x-1} = 2.$$

Первый способ (от авторов учебника)

►В [2] этот пример приводится в качестве *образца* использования монотонности функции для решения уравнений.

Утверждается, что

$$x^2+\sqrt{2x-1}=2 \Rightarrow ОДЗ: x \ge \frac{1}{2},$$

функция $y(x)=x^2+\sqrt{2x-1}$ при $x \ge \frac{1}{2}$ монотонно возрастает, каждое значение принимает в единственной точке. Можно угадать, что это $x=1$.

Ответ. 1.

Всё верно.

Но мне показалось, что можно решить проще.

Второй способ (наше решение)

Перепишем уравнение по-другому

$$x^2+\sqrt{2x-1}=2 \left(ОДЗ: 2x-1 \ge 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=2-x^2 \ —$$

и тут я совершенно случайно увидела новое

$$ОДЗ^*: \begin{cases} x \ge \frac{1}{2}, \\ 2-x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le \sqrt{2},$$

отличное от ОДЗ исходного уравнения.

Во-первых, здесь более *простые* функции:

при $x \ge \frac{1}{2}$ функция $g_1=\sqrt{2x-1}$ монотонно возрастает, а функция $g_2=2-x^2$ монотонно убывает (рис. 1).

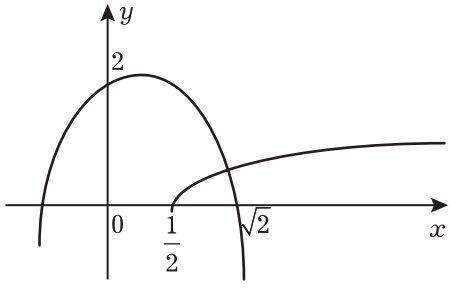

Рис. 1

Во-вторых, границы изменения x заметно сузились, и решение «угадать» легче.

Очевидно, что кривые пересекаются в одной точке $x=1$.

Ответ. 1.

Третий способ

Можно решить и аналитически:

$$\sqrt{2x-1}=2-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2 \ge 0, \\ 2x-1=\left(2-x^2\right)^2, \end{cases}$$

но вычисления будут довольно громоздкие.

Ответ. 1.◀

Итак, что произошло?

Эта операция, как известно, приводит к равносильному уравнению — вернее, уравнение остаётся тем же, но записанным по-другому.

Теперь **рассмотрим другие примеры**

Сначала рассмотрим простейшие уравнения:

1) $x^2+1=0 \Rightarrow ОДЗ: x \in R$.

Теперь перепишем его по-другому:

1*) $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \Rightarrow ОДЗ^*: \varnothing$,

т. к. равенство не имеет смысла.

2) $x^2-x=0 \left(ОДЗ: x \in R\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=x \left(ОДЗ^*: x \in R_+ \cup \{0\}\right)$.

Что происходит? Уравнение одно и то же, а **ОДЗ *разные***?

Рассмотрим ещё одно, очень знаменитое уравнение

3) $\sqrt{f(x)}-g(x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $f(x) \ge 0$.

При решении придётся рассматривать два случая: $g(x)<0,\ g(x)\geq 0$.

Перепишем его по-другому:

$$3^{*})\ \sqrt{f(x)}=g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ОДЗ}^{*}:\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ g(x)\geq 0.\end{cases}$$

Итак, мы получили:

$$\sqrt{f(x)}-g(x)=0\left(ОДЗ: f(x)\geq 0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=g(x)\left(ОДЗ:\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ g(x)\geq 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

Интересно? У *одного и того же уравнения разные* ОДЗ! Неожиданно?

Пример 4. ([1], 2022, стр. 316) Решите уравнение

$$\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3-2}=1.$$

►Перепишем уравнение по-разному:

$$\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3-2}=1\left(ОДЗ: x^3-2\geq 0\right)\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^3+2}=1-\sqrt{x^3-2}\times$$

$$\times\left(ОДЗ^{*}:\begin{cases}x^3\geq 2,\\ 1-\sqrt{x^3-2}\geq 0\Leftrightarrow x^3\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow\right.$$

$$\left.\Leftrightarrow 2\leq x^3\leq 3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3-2}=1-\sqrt{x^3+2}\times$$

$$\times\left(ОДЗ^{**}:\begin{cases}x^3\geq 2,\\ 1-\sqrt{x^3+2}\geq 0\Leftrightarrow x^3\leq -1\end{cases}\right)\Leftrightarrow\varnothing$$

Ответ. $\varnothing$.◄

Пример 5 ([4], 54)**.** Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1.$$

► В оригинале уравнение решается двумя искусственными способами, путая равносильный переход со следствием.

*Первый способ (*наше решение)

Редкий случай, когда и при переписывании, и при двух последовательных возведениях в квадрат обеих частей получающихся уравнений *сохранилось ОДЗ заданного уравнения, и его даже не пришлось находить*.

$$\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$$

$$\left(ОДЗ: 2x^2+5x-9\geq 0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-2}=1+\sqrt{2x^2+5x-9}$$

$$\left(ОДЗ: 2x^2+5x-9\geq 0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x-2=$$

$$=2x^2+5x-8+2\sqrt{2x^2+5x-9}$$

$$\left(ОДЗ: 2x^2+5x-9\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-9}=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x-9=9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{9}{2};2\right\}$$

Ответ. $\left\{-\frac{9}{2};2\right\}$.

Второй способ (наше решение)

$$\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$$

$$2x^2+5x-9=t,\ t\ge 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2+5x-2=t+7\Rightarrow$$
$$\sqrt{t+7}-\sqrt{t}=1\left(ОДЗ: t\ge 0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{t+7}=1+\sqrt{t}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t+7=1+t+2\sqrt{t}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{t}=3\Rightarrow 2x^2+5x-9=9\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4{,}5,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{-\frac{9}{2};2\right\}$.◄ $f(x)=g(x)$

Чем же отличается новое ОДЗ от старого?

Старое ОДЗ, например, для уравнения $f(x)-g(x)=0$ — это $D\left(f(x)\right)\cap D\left(g(x)\right)$. Это условие существования функций $f(x)$, $g(x)$ — они сохраняются и в другой записи этого уравнения $f(x)=g(x)$, т. к. область определения у функции одна. А в новом ОДЗ, например, при переносе слагаемого из одной части равенства в другую появляется равенство функций, а потому может «измениться» и ОДЗ.

Ясно, что $D\left(f(x)\right)\cap D\left(g(x)\right)$ в результате любых преобразований не изменяется, а ОДЗ, как выяснилось, — «живой организм», настоящий «хамелеон». Именно поэтому, видимо, про ОДЗ ничего не сказал А.Н. Колмогоров, поручив это А.И. Маркушевичу.

Рассмотрим, например, *общее* уравнение

$$f(x)+g(x)=0,$$

где $f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$.

Чтобы показать, что при этих условиях

$$f(x)+g(x)=0 \overset{f(x)\ge 0,g(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)=$$

придётся порассуждать. Но можно показать это и аналитически.

Перепишем уравнение по-другому:

$$0\le f(x)=-g(x)\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0,\\ g(x)=0.\end{cases}$$

Пример 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из котором уравнение

$$\left|\lg\left(x^2-2x+1-a^2\right)\right|+\sqrt{x^2-1}=0$$

имеет решение. Найдите эти решения.

►По старому определению, ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x^2-2x+1-a^2>0,\\ x^2-1\ge 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение по-другому:

$$\left|\lg\left(x^2-2x+1-a^2\right)\right|=-\sqrt{x^2-1}\,.$$

Посмотрим внимательнее на обе части уравнения и заметим, что правые и левые части *имеют смысл* при определённых условиях. Учтём их.

Поэтому, по новому определению, ОДЗ:

$$\begin{cases} 0\le\left|\lg\left(x^2-2x+1-a^2\right)\right|\le 0,\\ 0\le-\sqrt{x^2-1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\lg\left(x^2-2x+1-a^2\right)\right|=0,\\ x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1\\ \lg\left((x-1)^2-a^2\right)=0.\end{cases}$$

Отсюда следует

$$\left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow \lg\left(-a^2\right)=0\Leftrightarrow \varnothing, \\ x=-1\Rightarrow \lg\left(4-a^2\right)=0\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4-a^2=1\Leftrightarrow a^2=3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=-1, a=\pm\sqrt{3}.$$

Ответ. При $a=\pm\sqrt{3}$ решение $x = -1$. При остальных a решений нет. ◄

Пример 7. Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{3}\cos x+\sin x-2}+\sqrt{\operatorname{ctg}3x+\sin^2 x-\frac{1}{4}}=$$
$$=\sin 3x-1.$$

► «Старое» ОДЗ уравнения очень сложное (авторы пособия, откуда взят пример, как раз и начали решение с исследования старого ОДЗ).

Но заметим, что равенство *имеет смысл* лишь при условии, что $\sin 3x-1\geq 0\Leftrightarrow \sin 3x-1=0$.

Тогда уравнение перепишем в другом виде:

$$0\leq \sqrt{\sqrt{3}\cos x+\sin x-2}=$$
$$=-\sqrt{\operatorname{ctg}3x+\sin^2 x-\frac{1}{4}}\leq 0 \quad —$$

ОДЗ изменилось: старое ОДЗ сохранилось, но изменился смысл равенства.

Поэтому

$$\sqrt{\sqrt{3}\cos x+\sin x-2}+\sqrt{\operatorname{ctg}3x+\sin^2 x-\frac{1}{4}}=$$
$$=\sin 3x-1\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 3x=1\Rightarrow \operatorname{ctg}3x=0, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=1\Leftrightarrow \\ \sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right)\equiv\dfrac{1}{4}\Rightarrow \sin 3\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right)\equiv 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. ◄

Так *ОДЗ* уравнения, переписываемого в зависимости от свойств входящих в него функций, превратило *уравнение в тождество.*

Рассмотрим ещё один

Пример 8. ([3], стр. 228). Решите уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5.$$

Задача решается, по крайней мере, тремя способами. И в разных способах «работают» разные ОДЗ.

Запишем ОДЗ заданного уравнения: $x\geq\dfrac{6}{5}$.

Первый способ (от авторов учебника).

►Автор, не упоминая ОДЗ, применил «способ уединения» радикалов — видимо, для того чтобы не получалось произведения корней, и переписал уравнение в другом виде:

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5\Leftrightarrow \sqrt{5x-6}=$$
$$=5-\sqrt{2x+5}\left(ОДЗ^*:\left\{\begin{array}{l} 5x-6\geq 0, \\ 5-\sqrt{2x+5}\geq 0 \end{array}\right.\right).$$

Заметили, что **ОДЗ *изменилось?*** (автор не заметил)

Добавилось условие

$$5-\sqrt{2x+5}\geq 0\Leftrightarrow 25\geq 2x+5\Leftrightarrow x\leq 10.$$

Автор это не отметил и продолжал возводить в квадрат — получилось

$$10\sqrt{2x+5}=36-3x;\ \ldots;$$
$$9x^2-415x+796=0;$$
$$x_1=2, x_2=44\frac{2}{9}.$$

Затем проверка (не позавидуешь!).

Ответ. 2.

В учебнике есть примечание: можно, вместо подстановки в уравнение, проверить условие $36-3x\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\le 12$. Но авторы не заметили предыдущее ограничение: условие

$$5-\sqrt{2x+5}\ge 0 \Leftrightarrow x\le 10!$$

Второй способ (*наше* решение)

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5\left(ОДЗ: x\ge\frac{6}{5}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-6}=5-\sqrt{2x+5}\times$$

$$\times\left(ОДЗ^*:\begin{cases}x\ge\frac{6}{5},\\ 5-\sqrt{2x+5}\ge 0\Leftrightarrow x\le 10\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 10,\\ 5x-6=\left(5-\sqrt{2x+5}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\le 10,\\ 10\sqrt{2x+5}=-3x+36\ge 0, \text{ т.к. } x\le 10,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\le 10,\\ 9x^2-418x+796=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=44\frac{2}{9}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=2.$$

Ответ. 2.

Третий способ (наше решение)

Заметим, что можно решить с той же сложностью и другим способом:

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5\left(ОДЗ: x\ge\frac{6}{5}\right)\Leftrightarrow$$

$$7x-1+2\sqrt{2x+5}\sqrt{5x-6}-25=$$

$$=0\left(ОДЗ: x\ge\frac{6}{5}\right)\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2x+5}\sqrt{5x-6}=$$

$$=26-7x\left(ОДЗ^*: x\in\left[\frac{6}{5};\frac{7}{26}\right]\right)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in\left[\frac{6}{5};\frac{26}{7}\right],\\ 9x^2-416x+796=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=44\frac{2}{9},\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

Ответ. 2.

Как видите, при *переписывании* уравнения ***может измениться*** **ОДЗ!**

Четвёртый способ (наше решение)

А на самом деле уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5$$

решается устно!

Так как слева в уравнении стоит монотонно возрастающая функция — значит, если решение есть, то оно единственное. Первое же натуральное число, большее $\frac{6}{5}$, является решением: $x=2$.

Ответ. 2.◄

Рассмотрим 3 любопытных простейших примера. У всех примеров левая часть одна и та же — значит, и «старое» ОДЗ одно и то же, но ... «работает» оно только в первом уравнении. Почему? Потому что условие $x+1\ge 0$, при котором уравнение $\sqrt{3x+1}=x+1$ имеет смысл, выполнено в старом ОДЗ: $1+3x\ge 0$.

Пример 9 ([4], стр.51)**.** Решите уравнение $\sqrt{3x+1}=x+1$.

► *Первый способ* (наше решение)

$$\sqrt{3x+1}=$$
$$=x+1\left(ОДЗ:\begin{cases}1+3x\ge 0,\\ x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1+3x\ge 0\right)$$

(заметим, что старое ОДЗ *совпадает* с новым)

$$\Leftrightarrow 3x+1=(x+1)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x\in\{0;1\}.$$

Уравнение $3x+1=(x+1)^2$ названо авторами *следствием* (как написано во всех учебниках), и корни проверяются.

Уравнение $3x+1=(x+1)^2$ действительно *следствие, но как любое равносильное* заданному.

Ответ. $\{0;1\}$.

Второй способ (наше решение)

Перепишем уравнение по-другому:

$$\sqrt{3x+1}=x+1\times$$
$$\times\left(ОДЗ:\begin{cases}1+3x\ge 0,\\ x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1+3x\ge 0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-x=1\times$$
$$\times\left(ОДЗ^*:\begin{cases}1+3x\ge 0,\\ \sqrt{3x+1}-x\ge 0\end{cases}\right)$$

Очевидно, что усложнилось новое ОДЗ — лучше оставить первый способ. ◄

Пример 10. Решите уравнение $\sqrt{1+3x}=1-x$.

► *Первый способ* (наше решение)

$$\sqrt{1+3x}=1-x\times$$
$$\times\left(ОДЗ:\begin{cases}1+3x\ge 0,\\ x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{3};1\right]\right)$$

(заметим, что новое ОДЗ $\subset$ старое ОДЗ, т. к. равенство имеет смысл лишь при условии $x\le 1$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1,\\ 1+3x=(1-x)^2\Leftrightarrow x^2-5x=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x\in\{0;5\}\end{cases}$$

Ответ. 0.

Второй способ (наше решение, устное)

Так как левая часть уравнения монотонно возрастает в ОДЗ, а правая убывает, то если решение существует, то оно одно, и оно угадывается.

$$\sqrt{1+3x}=1-x\left(ОДЗ:x\in\left[-\frac{1}{3};1\right]\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=0,$$

Ответ. 0.◄

Пример 11. Решите уравнение $\sqrt{1+3x}=x-1$.

► Наше решение

$$\sqrt{1+3x}=x-1\times$$
$$\times\left(ОДЗ:\begin{cases}1+3x\ge 0,\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1\right)$$

(заметим, что новое ОДЗ $\subset$ старое ОДЗ, т. к. равенство имеет смысл лишь при условии $x\ge 1$)

$$\begin{cases}x\ge 1,\\ 1+3x=(x-1)^2\Leftrightarrow x^2-5x=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x\in\{0;5\}.\end{cases}$$

Ответ. 5.◄

Авторы, в отличие от наших решений, возводили в квадрат обе части уравнений — получили при этом, как у них написано, «следствия». Нашли по два корня, произвели проверку.

Оказалось, что во всех 3-х уравнениях *оба* корня «следствий» принадлежат старому ОДЗ: $1+3x\ge 0$, но в двух уравнениях второй корень — посторонний, а в 1-ом уравнении *оба* корня «следствия» являются решениями.

В чём дело? Дело в том, что некоторые корни двух уравнений — «следствий» не принадлежат «новому» ОДЗ, а при подстановке их в заданные уравнения правые части становятся отрицательными — равенства теряют смысл. Что касается 1-ого уравнения, то там другая ситуация — «новое» ОДЗ просто совпало со «старым».

Уравнения и неравенства, содержащие модуль

1. Рассмотрим уравнение $|f(x)|=g(x)\Rightarrow ОДЗ: g(x)\ge 0$.

Тогда

$$|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x)\ge 0,\\ f(x)=-g(x)\le 0.\end{array}\right.$$

Что мы видим? Равносильная система совпадает с системой, которая записывается для другого способа решения уравнения — метода раскрытия модуля:

$$|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ f(x)=g(x)\Rightarrow g(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ f(x)=-g(x)\Rightarrow g(x)\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} g(x)=f(x)\ge 0,\\ -g(x)=f(x)\le 0\end{array}\right.$$

Отсюда следует, что решающий сам выбирает способ решения, в зависимости от того, какое неравенство ему удобнее решать: $f(x)\ge 0$ или $g(x)\ge 0$.

2. Рассмотрим теперь два неравенства с модулем:

1) Рассмотрим неравенство

$$|f(x)|\le g(x)\Rightarrow ОДЗ: g(x)\ge 0$$

Известно, что тогда (рис. 2)

$$\boxed{\begin{array}{c}|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x)\end{array}}\quad (М1)$$

Где ОДЗ?

В этом двойном неравенстве $ОДЗ: g(x)\ge 0$ *«замаскировалось»*:

$$-g(x)\le f(x)\le g(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -g(x)\le g(x)\Leftrightarrow 2g(x)\ge 0!$$

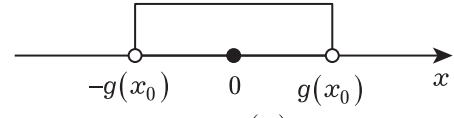

Рис. 2. $g(x)>0$

Однако, судя по всему, авторы и в [1], и в [2], *не верят*, что двойное неравенство выполняется при любой $g(x)$, независимо от знака этой функции, и пишут так:

«Если $g(x)\ge 0$, то

$$|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow$$
$$-g(x)\le f(x)\le g(x)\text{».}$$

При такой формулировке условие $g(x)\ge 0$ придётся предварительно проверять, хотя, как мы видим, оно выполняется автоматиче-

ски, т. к. двойное неравенство, как показано, выполняется только для $g(x)\ge 0$.

А что происходит, если $g(x)<0$? Заданное неравенство, как видно, не имеет смысла.

Если $g(x_0)<0$, то из $-g(x)\le f(x)\le g(x)$ следует, что $f(x_0)$ принадлежит двум не пересекающимся промежуткам (рис. 3), т. е. двойное неравенство при $g(x)<0$ не имеет решения, как и заданное неравенство.

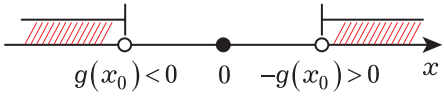

Рис. 3. $g(x)<0$

2) Теперь рассмотрим неравенство

$$|f(x)|\ge g(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ОДЗ: } D(f(x))\cap D(g(x))$$

Известно, что (рис. 4, рис. 5)

$$|f(x)|\ge g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x),\\ f(x)\le -g(x)\end{array}\right. \quad (\text{M2})$$

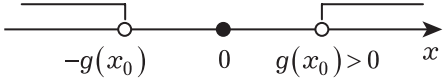

Рис. 4. $g(x)>0$

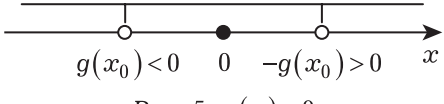

Рис. 5. $g(x)<0$

Где ОДЗ?

Заметим при этом, что если $g(x)<0$, то получается (рис):

$$\left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x)<0,\\ f(x)\le -g(x)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{ОДЗ: } D(f(x))\cap D(g(x)),$$

т. е. из совокупности следует, что при $g(x)<0$ совокупность неравенств выполняется автоматически.

Но авторы и в [1], и в [3], видимо, этому не верят, и пишут, что

«Если $g(x)\ge 0$, то

$$|f(x)|\ge g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x),\\ f(x)\le -g(x)\end{array}\right.\text{».}$$

Пример 11([3], стр. 257). Решите неравенство

$$\left|x^2-3x+2\right|<2x-x^2$$

Первый способ (наше решение)

►Воспользуемся (М1):

$$\left|x^2-3x+2\right|<2x-x^2\Leftrightarrow$$
$$-\left(2x-x^2\right)<x^2-3x+2<$$
$$<2x-x^2\left(\Rightarrow -\left(2x-x^2\right)<2x-x^2\Rightarrow\right.$$
$$\left.2x-x^2>0\right)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x\in\left(\frac{1}{2};2\right)\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2};2\right)$$

Ответ. $\left(\frac{1}{2};2\right)$.◄

ОДЗ — «хамелеон» спрятался в неравенстве

$$-\left(2x-x^2\right)<x^2-3x+2<2x-x^2.$$

Второй способ (решение в учебнике, например, ([3], 256).

$$\left|x^2-3x+2\right|<2x-x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2>0, \\ x^2-3x+2<2x-x^2, \text{и т. д.} \\ x^2-3x+2>x^2-2x \end{cases}$$

Пример 12 ([2], стр.247)**.** Решите неравенство

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}>1.$$

►Проследим, как меняется ОДЗ, если перенести слагаемое из одной части неравенства в другую:

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}>$$

$$>1\left(ОДЗ:\begin{cases} x\ge\frac{1}{5}, \\ \sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}\ge 0 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-1}\ge 1+\sqrt{x+2}\left(ОДЗ^*: x\ge\frac{1}{5}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x-1}\right)^2\ge\left(1+\sqrt{x+2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$5x-1\ge x+3+2\sqrt{x+2}\left(ОДЗ: x+2\ge 0\right)\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x+2}\le 2(x-1)\left(ОДЗ^*: x\ge 1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x+2\le 4x^2-8x+4\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]\cup[2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ge 2.$$

Ответ. $[2;+\infty)$.◄

Проследим за изменением ОДЗ в равносильных переходах при решении примеров в некоторых пособиях мехматских авторов 1987г (там за этим не следят: где-то пишут, что равносильно, где-то следствие, где-то ничего не пишут).

Пример 13 ([4], стр. 51)**.** Решите уравнение

$$3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7.$$

►Уединим радикал:

$$3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=$$

$$=7\left(ОДЗ: x\ge 2\Rightarrow 3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}>0\right)\Leftarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+3}=7+\sqrt{x-2}\left(ОДЗ: x\ge 2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(x+3)=$$

$$=47+14\sqrt{x-2}+x\left(ОДЗ: x\ge 2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{x-2}=4x-10\left(ОДЗ^*:\begin{cases} x\ge 2, \\ x\ge 2{,}5 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2{,}5, \\ 49(x-2)=100-80x+16x^2\Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ x=2\frac{1}{16} \end{cases} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=6.$$

Ответ. 6.◄

Пример 14 ([4], 51)**.** Решите уравнение

$$\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0.$$

►Авторы приводят уравнение

$$\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$$

к равносильному виду

$$\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2},$$

а затем, *ни на что не обращая внимания*, дважды последовательно возводят в квадрат обе части получающихся уравнений, заменяя «по дороге» произведение корней $\sqrt{f}\sqrt{g}$ одним корнем $\sqrt{fg}$.

На самом деле, всё гораздо проще.

Запишем ОДЗ заданного уравнения:

$$\begin{cases} 2-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 2, \\ x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2 \Rightarrow x=2, \\ 11x+3\ge 0, \\ 9x+7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Это ОДЗ обращает уравнение в тождество.

Ответ. 2

Пример 15 ([4], 56)**.** Решите уравнение

$$\sqrt{x+16}-x+4=0.$$

► $\sqrt{x+16}-x+4=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+16}=x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ x+16=(x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{0;9\} \Leftrightarrow x=9$$

Ответ. 9.◄

Пример 16 ([4], 57)**.** Решите уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8.$$

► *Первый способ* (наше решение)

Заметим, что слева стоит монотонно возрастающая при $x\ge 1$ функция $y=\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}$. «Угадаем» решение: $x=10$.

Ответ. 10

Второй способ (наше решение)

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8 (ОДЗ: x\ge 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+5+x-1+2\sqrt{2x+5}\sqrt{x-1}=$$

$$=64 (ОДЗ: x\ge 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+5}\sqrt{x-1}=$$

$$=60-3x\left(ОДЗ^*: \begin{cases} x\ge 1, \\ x\le 20 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 20, \\ 4(2x+5)(x-1)=(60-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 20, \\ x^2-372x+3620=0 \Leftrightarrow x\in\{10;362\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=10.$$

Ответ. 10.

Третий способ (наше решение)

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8 \Leftrightarrow (ОДЗ: x\ge 1)$$

$$\sqrt{x-1}=8-\sqrt{2x+5} \times$$

$$\times\left(ОДЗ^*: \begin{cases} x\ge 1, \\ 8-\sqrt{2x+5}\ge 0 \Leftrightarrow x\le \dfrac{59}{2} \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\le \dfrac{59}{2}, \\ x-1=69-16\sqrt{2x+5}+2x \end{cases} \times$$

$$\times\left(ОДЗ: -2{,}5\le x\le \frac{59}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2{,}5\le x\le \dfrac{59}{2}, \\ 16\sqrt{2x+5}=70+x \end{cases} \times$$

$$\times\left(ОДЗ: -2{,}5\le x\le \frac{59}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2{,}5\le x\le \dfrac{59}{2}, \\ 256(2x+5)=4900+140x+x^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10, \\ x=362 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=10.$$

Ответ. 10.

Четвёртый способ (наше решение)

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8 \Leftrightarrow (ОДЗ: x\ge 1) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1}\times$$

$$\times\left(ОДЗ^*:\begin{cases}x\ge 1,\\ 8-\sqrt{x-1}\ge 0\Leftrightarrow x\le 65\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 65,\\ 16\sqrt{x-1}=58-x>0\end{cases}\times$$

$$\times(ОДЗ^*:1\le x\le 58)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 58,\\ 16^2(x-1)=(58-x)^2\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x^2-372x+3620=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10,\\ x=362\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$x=10.$$

Ответ. 10. ◄

Итак, ОДЗ уравнений

$$f(x)+\varphi(x)=g(x)$$

и

$$f(x)=g(x)-\varphi(x)$$

могут оказаться разными: при переносе слагаемого в другую часть уравнения ОДЗ иногда «сужается», иногда «расширяется».

Иногда ОДЗ «маскируется».

Например,

$$|f(x)|\le g(x)\Rightarrow ОДЗ: g(x)\ge 0,$$

а в системе

$$|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le g(x),\\ f(x)\ge -g(x)\end{cases}$$

«не видно» ОДЗ.

То же самое и здесь:

$$|f(x)|\ge g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)\ge g(x),\\ f(x)\le -g(x).\end{array}\right.$$

Поэтому некоторые авторы добавляют в системы условие $g(x)\ge 0$, которое «замаскировано» в системах.

(продолжение следует: ч. 4. Предикаты. Равносильность.)

Литература

1. С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. Алгебра, 11 класс. Москва, «Просвещение», 2006 и 2022.
2. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 11 класс. «Вентана -Граф», Москва. 2019
3. А.Г. Мордкович, П.В.Семёнов. Алгебра и начала математического анализа, 11. часть 1. Углублённый уровень. Москва, «Мнемозина», 2021 .
4. В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. Задачи по математике. Уравнения и неравенства.1987, Москва, «Наука».

ЮМОР

Как-то раз Ньютону гости пожаловались, что калитка в его сад туго открывается, и попросили сделать другую, получше.

— Я не знаю куда лучше, — ответил физик. — И так каждый входящий наливает в бак для дома не меньше галлона воды.

Обычное дело

Однажды дачники наблюдали за паривши над поселком вертолетом.

— Надо же, он висит в воздухе на одном месте уже минут десять! — сказал кто-то.

— Да это обычное дело: конечно, сломался, — объяснили ему.