

**Кожинин Сергей Павлович**
*Учитель физики лицея №2 города Тулы.*
*Почётный работник общего образования РФ.*
*Лауреат Всероссийского конкурса учителей физики и математики 2005, 2006 г. в номинации «Наставник будущих учёных» (Фонд Дмитрия Зимина «Династия»).*

# Формула тонкой линзы, разделяющей две среды

Выводится формула тонкой сферической линзы, разделяющей две среды. Приводятся примеры решения задач. Тексты условий и решений задач 4 и 5 предложены автором статьи.

## 1. Вывод формулы тонкой линзы, разделяющей две среды

В основе вывода формулы тонкой линзы, разделяющей две среды,– принцип Ферма. На рис.1 показана линза, разделяющая две среды, показатели преломления которых равны $n_1$ и $n_2$, а $n_л$ – показатель преломления вещества линзы. Для определённости рассмотрим двояковыпуклую линзу.

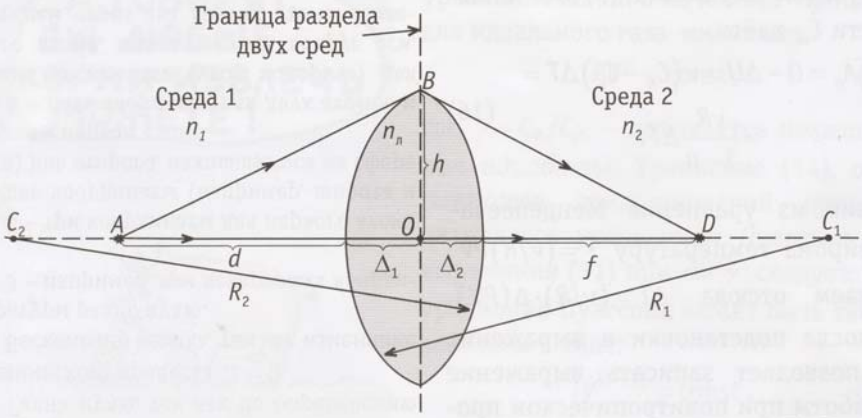



Рис.1. *Искривлённые поверхности линзы имеют радиусы кривизны $R_1$ и $R_2$. Точки $C_1$ и $C_2$ – центры кривизны. Поверхность линзы с радиусом кривизны $R_1$ находится в среде 1 с показателем преломления $n_1$, а поверхность линзы с радиусом кривизны $R_2$ – в среде 2 с показателем преломления $n_2$.*




Пусть точечный источник света находится в точке $A$ на главной оптической оси линзы на расстоянии $d$ от неё, а его изображение – в точке $D$, лежащей на расстоянии $f$ от линзы. Пусть $T_1$ – время распространения света из точки $A$ в точку $D$ по траектории $AOD$, а $T_2$ – время распространения света из точки $A$ в точку $D$ по траектории $ABD$. Очевидно, что должно выполняться условие

$$T_1 = T_2 . \qquad (1)$$

Скорость света (фазовая) в среде с показателем преломления $n$ равна $\upsilon = c/n$, где $c$ – скорость света в вакууме. Время $T$, за которое свет проходит геометрический путь $l$, определяется формулой $T = l/\upsilon = nl/c$. Очевидно, что (см. рис.1)

$$T_1 = \frac{n_1 d}{c} + \frac{n_л(\Delta_1 + \Delta_2)}{c} + \frac{n_2 f}{c}, \qquad (2)$$

$$T_2 = \frac{n_1 \cdot AB}{c} + \frac{n_2 \cdot BD}{c}, \qquad (3)$$

где $$AB = \sqrt{(d+\Delta_1)^2 + h^2} = (d+\Delta_1)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{h}{d+\Delta_1}\right)^2} \qquad (4а)$$

и $$BD = \sqrt{(f+\Delta_2)^2 + h^2} = (f+\Delta_2)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{h}{f+\Delta_2}\right)^2} . \qquad (4б)$$

В приближении *параксиальности* углы между световыми лучами и оптической осью линзы считаются очень малыми и поэтому:

$$h \ll d+\Delta_1 \quad и \quad h \ll f+\Delta_2 . \qquad (5)$$

В этом случае мы можем применить формулу приближённого вычисления

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx, \; x \ll 1 . \qquad (6)$$

В результате формулы (4а)и (4б) приводятся к более простому виду:

$$AB \approx d + \Delta_1 + \frac{h^2}{2(d+\Delta_1)}, \qquad (7а)$$

и $$BD \approx f + \Delta_2 + \frac{h^2}{2(f+\Delta_2)} . \qquad (7б)$$

Далее из (1) с учётом (2), (3), (7а) и (7б) после несложных преобразований получаем уравнение

$$(n_л - n_1)\Delta_1 + (n_л - n_2)\Delta_2 = \frac{h^2}{2}\left(\frac{n_1}{d+\Delta_1} + \frac{n_2}{f+\Delta_2}\right). \qquad (8)$$

С учётом того, что $\Delta_1 \ll d$ и $\Delta_2 \ll f$, получаем

$$(n_л - n_1)\Delta_1 + (n_л - n_2)\Delta_2 = \frac{h^2}{2}\left(\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f}\right). \qquad (9)$$

Выразим $\Delta_1$ через $h$ и $R_1$ (рис.1):

$$\Delta_1 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - h^2} = R_1 - R_1\sqrt{1-\left(\frac{h}{R_1}\right)^2} \approx$$

$$\approx R_1 - R_1\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{R_1}\right)^2\right] = \frac{h^2}{2R_1}.$$

Аналогично $\Delta_2 = \frac{h^2}{2R_2}$.

Таким образом, уравнение (9) окончательно приводится к виду

$$\boxed{\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f} = \frac{n_л - n_1}{R_1} + \frac{n_л - n_2}{R_2}.} \quad (10)$$

Это и есть формула тонкой линзы, разделяющей две среды. Формула (10) выведена для частного случая, изображённого на рис.1. Однако эта формула справедлива и в общем случае, то есть для любых тонких сферических линз.

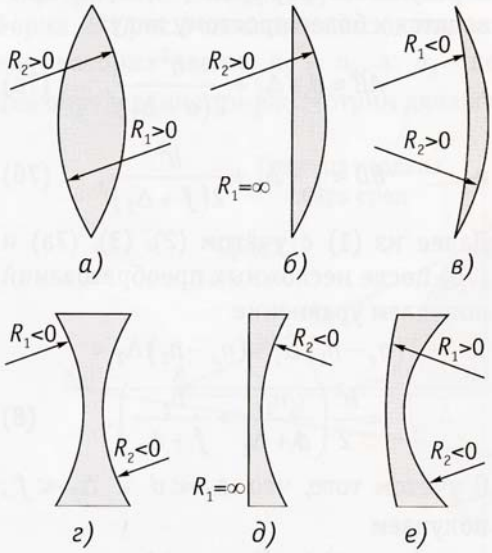



Рис.2. *Линзы и знаки радиусов кривизны их поверхностей: а) двояковыпуклая, б) плоско-выпуклая, в) выпукло-вогнутая, г) двояковогнутая, д) плоско-вогнутая, е) вогнуто-выпуклая. Радиус выпуклой поверхности положителен по знаку, а вогнутой – отрицателен.*

Напомним, что в формуле (10) $d$ – расстояние от источника света (предмета) до линзы, а $f$ – расстояние от линзы до его изображения. Для действительных предметов $d>0$, для мнимых предметов $d<0$. Для действительных изображений $f>0$, для мнимых изображений $f<0$. Напомним правило знаков для радиусов кривизны поверхностей линзы (рис.2): радиус выпуклой (по отношению к веществу линзы) поверхности линзы положителен, а вогнутой (по отношению к веществу линзы) отрицателен.

В частном случае, когда линза находится в однородной среде с показателем преломления $n_{ср} = n_1 = n_2$, формула (10) принимает «обычный» вид:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad (11)$$

где

$$\left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{F} = D \quad (12)$$

есть оптическая сила тонкой линзы с фокусным расстоянием $F$. В этом случае, как известно, линза имеет два симметричных фокуса. Однако в общем случае (10) линза имеет два несимметричных (!) фокуса.

Напомним, что фокусное расстояние $F$ линзы можно найти из её формулы, рассматривая, например, световые лучи, падающие на поверхность линзы параллельно её главной оптической оси (см., например, рис.3). В этом случае источник света находится очень далеко от линзы ($d=\infty$), а преломлённые световые лучи (или их продолжения) пересекутся в фокусе линзы, то есть изображение бесконечно удалённого источника находится в

фокусе линзы. Таким образом, при $d=\infty$ имеем $f=F$. Именно из этих соображений из (11) следует (12), где величина $1/F$ получила название *оптической силы* линзы.

В качестве примера рассмотрим двояковыпуклую линзу с $R_1=R_2=R$. Если линза находится в однородной среде, то её фокусное расстояние определяется из (11): при $d=\infty$ имеем $F=f$ и

$$F=\frac{n_{ср}R}{2(n_л-n_{ср})}. \qquad (13а)$$

Из этой формулы получаем следующую информацию. 1) Если $n_л>n_{ср}$ (оптическая плотность вещества линзы больше оптической плотности окружающей среды), то $F>0$, то есть фокус линзы является «действительным», а линза – собирающей. 2) Если $n_л<n_{ср}$, то $F<0$, то есть фокус линзы является «мнимым», а линза – рассеивающей. 3) Линза, находящаяся в однородной среде, имеет два симметричных фокуса.

Если линза с $R_1=R_2=R$ разделяет две среды с разными оптическими плотностями, то её фокусное расстояние находится из (10): при $d=\infty$ имеем $F=f$ и

$$F=\frac{n_2R}{2n_л-(n_1+n_2)}. \qquad (13б)$$

Из этой формулы следует: 1) линза является собирающей ($F>0$), если $2n_л>n_1+n_2$; 2) линза является рассеивающей ($F<0$), если $2n_л<n_1+n_2$; 3) линза имеет два несимметричных фокуса! Например, пусть линза с $n_л=1{,}6$ и $R=10$ см разделяет воздух и воду. Если параллельные лучи падают на линзу из воздуха, то $n_1=1$ и $n_2=1{,}33$ (аналогичная ситуация рассматривается на рис.3, но для плосковыпуклой линзы). В этом случае из (13б) получаем $F=15{,}3$ см. Однако, если параллельные лучи падают на линзу из воды, то $n_1=1{,}33$, $n_2=1$, а из (13б) следует, что $F=11{,}5$ см.

## 2. Примеры решения задач

**Задача 1.** Тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием $F=20$ см выпуклой стороной с радиусом кривизны $R=15$ см притоплена в воду (рис. 3). Показатель преломления воды $n=1{,}33$. На каком расстоянии от линзы и где будет находиться изображение Солнца, находящегося в зените? (МФТИ, 2003 г., билет 6).

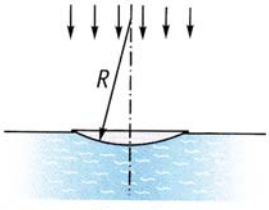



Рис.3

**Решение.** Так как в данной системе $R_1=\infty$, $R_2=R$, $d=\infty$, $n_2=n$, то формула (10) принимает вид

$$\frac{n}{f}=\frac{n_л-n}{R}.$$

Получаем, что изображение Солнца находится на расстоянии

$$f=\frac{nR}{n_л-n}$$

от линзы. Найдём показатель преломления вещества линзы $n_л$. Для нашей линзы, находящейся в воздухе, имеем (на основании (12)):

$$D=\frac{1}{F}=\frac{n_л-1}{R}.$$

Отсюда $n_л=1+R/F$, и

$$f=\frac{nRF}{R-F(n-1)}=47{,}5\text{ см}.$$

Так как $f>0$, то изображение Солнца действительное и находится в воде.

**Задача 2.** Тонкая плоско-вогнутая линза с фокусным расстоянием $|F|=15$ см вогнутой стороной с радиусом кривизны $|R|=10$ см притоплена в воду (рис.4). Показатель преломления воды $n$ =1,33. На каком расстоянии от линзы и где будет находиться изображение Солнца, находящегося в зените? (МФТИ, 2003 г., билет 5)

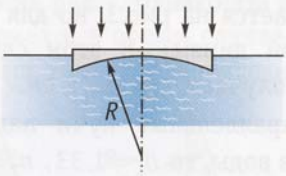



Рис. 4

**Решение.** Так как в данной системе $R_1=\infty$, $R_2=-|R|$, $d=\infty$, $n_2=n$, то формула (10) принимает вид

$$\frac{n}{f}=-\frac{n_л-n}{|R|}. \qquad (14)$$

Здесь $n_л$ – показатель преломления вещества линзы. Для этой линзы, находящейся в воздухе,

$$\frac{1}{-|F|}=(n_л-1)\frac{1}{-|R|}$$

Исключая $n_л$ из записанных уравнений, находим

$$f=-\frac{n|R||F|}{|R|-(n-1)|F|}=-39{,}5\text{ см}.$$

Так как $f<0$, то изображение Солнца мнимое и находится над линзой на расстоянии $|f|=39{,}5$ см от неё.




**Задача 3.** В сосуде на поверхности воды плавает тонкая плоско-выпуклая линза выпуклой стороной вверх (рис.5). Фокусное расстояние линзы в воздухе $F$. Показатель преломления воды равен $n$. Высота уровня жидкости в сосуде $h$. На каком расстоянии $L$ над линзой на её главной оптической оси нужно расположить точечный источник света $S$, чтобы его изображение находилось на дне сосуда? (ЕГЭ, 2005 г., варианты: 78, 85, 86)

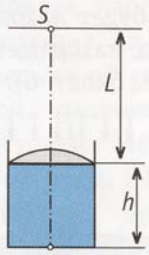



Рис.5

**Решение.** В данной системе и в обозначениях, принятых в условии задачи, имеем: $n_1 = 1$, $n_2 = n$, $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $d = L$, $f = h$. Формула (10) принимает вид

$$\frac{1}{L} + \frac{n}{h} = \frac{n_л - 1}{R}.$$

Для оптической силы данной линзы, находящейся в воздухе, согласно (12)

$$\frac{1}{F} = \frac{n_л - 1}{R}.$$

Исключаем показатель преломления вещества линзы $n_л$ из записанных уравнений:

$$L = \frac{Fh}{h - nF}, \quad h > nF.$$

**Задача 4.** Посередине цилиндрического сосуда закреплена двояковыпуклая линза (рис.6). Поверхности линзы имеют равные радиусы кривизны ($R_1 = R_2 = R$), её оптическая сила в воздухе $D = 8$ дптр. Левая часть цилиндра заполнена водой, а правая – глицерином. Точечный источник света $S$ расположен на главной оптической оси линзы вблизи левого торца цилиндра. Какой должна быть длина $L$ цилиндра, чтобы изображение $S'$ источника света $S$ находилось в глицерине вблизи правого торца цилиндра? Показатель преломления воды $n_1 = 1{,}33$, глицерина $n_2 = 1{,}47$, вещества линзы $n_л = 1{,}6$.

**Решение.** По условию задачи $f = d = L/2$ и $R_1 = R_2 = R$. В этом случае уравнение (10) приводится к виду

$$\frac{2(n_1 + n_2)}{L} = \frac{2n_л - (n_1 + n_2)}{R}.$$

Радиус кривизны поверхности линзы находим из (12) при $n_{ср} = 1$:

$$R = \frac{2(n_л - 1)}{D}.$$

Из написанных уравнений находим длину цилиндра:

$$L = \frac{4(n_л - 1)(n_1 + n_2)}{D\left[2n_л - (n_1 + n_2)\right]} = 210 \text{ см}.$$

**Задача 5.** Два плоско-вогнутых стеклянных цилиндра равной длины вплотную прилегают друг к другу вогнутыми торцами таким образом, что между ними образовалась воздушная «пробка» (рис.7). Точечный источник света $S$ расположен на оси симметрии данной системы вблизи торца левого цилиндра. На каком расстоянии $f$ от «пробки» будет находиться изображение точечного источника $S$ после выхода лучей из «пробки» ? Длина цилиндрической системы $L = 100$ см. Радиусы кривизны вогнутых поверхностей цилиндров одинаковы и равны $R = 20$ см. Показатели преломления стёкол $n_1 = 1{,}6$ и $n_2 = 1{,}8$.

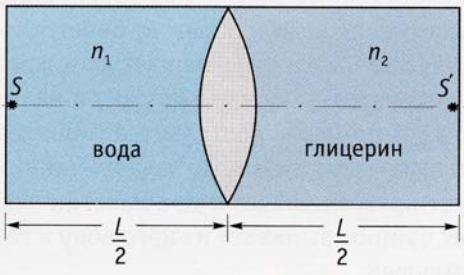



Рис. 6

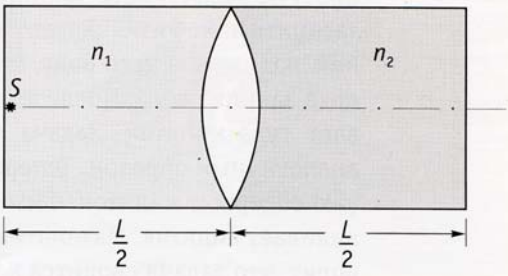



Рис. 7

**Решение.** Очевидно, что воздушная «пробка» между цилиндрами представляет собой двояковыпуклую воздушную линзу с радиусами кривизны $R_1 = R_2 = R$ и показателем преломления $n_л = 1$. Формула (10) для такой линзы принимает вид

$$\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f} = \frac{1-n_1}{R} + \frac{1-n_2}{R}.$$

Отсюда $$f = \frac{n_2 R d}{d\left[2-(n_1+n_2)\right]-n_1 R}.$$

При $d = L/2 = 50$ см получаем $f = -18$ см. Так как $f < 0$, то изображение источника является мнимым и находится в левом цилиндре на расстоянии 18 см от «пробки».

Заметим, что окончательное изображение в системе после преломления лучей на правом торце правого цилиндра получается в другом месте.

## юмор юмор юмор юмор юмор юмо

- Два студента перед сессией:
  – Что читаешь?
  – Квантовую механику.
  – А чего книга вверх ногами?
  – А какая разница...

- Полупроводник (ж/д) – один проводник на два вагона.

- – Билетик предъявите!
  – Да вы что! Я же проводник!
  – Да хоть конденсатор, закон есть закон.

- Кажен москаль выбирает паскаль, хохлы же уси пишут на си.

- Чем физик отличается от математика? Проведем эксперимент. Возьмем простую задачу: есть чайник, плита, кружка и пакетик чая, необходимо заварить чай. Физик решает эту задачу следующим образом: берет чайник, наливает в него воду, ставит чайник на плиту, включает ее и ждет пока закипит вода. После этого он кладет пакетик чая в кружку и наливает туда кипяток. Задача решена. Математик поступает абсолютно аналогичным образом. Теперь немножко упростим нашу задачу: чайник уже содержит кипяток. Физик берет кружку, кладет в нее пакетик чая, наливает кипяток. Математик берет чайник, выливает из него воду и говорит, что задача сводится к предыдущей.