Лукьянова Антонина Владимировна
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры физики и информационных технологий
Ярославского государственного педагогического университета
им. К.Д. Ушинского



Физический маятник. Два подхода к исследованию

В физике часто возникают задачи на поиск экстремального значения той или иной физической величины: минимального времени, кратчайшего пути, максимальной высоты подъёма и так далее. Стандартно такие задачи решаются построением функциональной зависимости изучаемых величин и затем применением методов математического анализа для поиска экстремума: найти производную, затем её нули, исследовать знак производной на получившихся интервалах постоянного знака и определить точки минимума/максимума, а также минимальное/максимальное значение функции. Школьники 11 класса часто выбирают такой подход.

Этот метод прекрасен, но задачи на поиск экстремумов появляются на уроках физики раньше, чем в 11 классе. И здесь выручает наличие других методов, кроме методов математического анализа. Например, автор [1] использует алгебраический и геометрический методы для решения баллистических задач на оптимизацию движения (максимальная дальность, минимальная скорость и т.п. при заданных условиях полёта): вместо анализа производной используются анализ квадратного уравнения, получающегося из уравнения траектории, (алгебраический способ) и свойства треугольников (строятся треугольники скоростей и перемещений), векторов и описанных окружностей (геометрический способ). А это материал, известный школьникам с 8–9 класса.

Попробуем применить алгебраический способ, описанный в [1], к решению некоторых задач о параметрах движения физического маятника.

Рассмотрим типичную задачу, её можно найти в том числе в сборнике [2, с. 117].

Задача 1. Физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $L = 120$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удалённую на некоторое расстояние x от центра масс стержня. При каком значении x период колебаний T имеет наименьшее значение?

Известно, что период малых колебаний физического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \qquad (1)$$

где J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; l — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника, m — масса маятника, g — ускорение свободного падения.

В школе понятия «центр масс», «момент инерции» и движение абсолютно твёрдого тела рассматриваются в углублённом курсе физики, например, [3, с. 376; с. 395], но нам понадобится и немного «нешкольной» физики: теорема Штейнера. Она гласит, что момент инерции тела относительно некоторой оси, проходящей через его центр масс (J_C), и момент инерции относительно любой другой параллельной ей оси (J) связаны простым соотношением: $J = J_C + mx^2$, где m — масса тела, x — расстояние между осями. Теорема легко доказывается для системы материальных точек и несложно обобщается на сплошное тело.

Моменты инерции J_C некоторых геометрически простых тел легко вычислить и школьникам (например, кольца или тонкостенной трубы), но неплохо и приучать детей пользоваться справочниками, т.к. эти моменты инерции давно подсчитаны. Для нашей задачи понадобится величина момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно самому стержню:

$$J_C = \frac{1}{12}mL^2.$$

Для «классического» решения задачи 1 найдём по теореме Штейнера момент инерции стержня относительно оси, удалённой на x от центра масс:

$$J = \frac{1}{12}mL^2 + mx^2, \qquad (2)$$

запишем период (удобнее квадрат периода), подставив в него (2):

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\cdot\frac{\frac{1}{12}L^2 + x^2}{x}, \qquad (3)$$

1-й способ нахождения минимального периода

Для поиска экстремумов продифференцируем выражение (3) по x, приравняем производную к нулю:

$$\left(T^2\right)' = \frac{4\pi^2}{g}\cdot\frac{x^2 - \frac{1}{12}L^2}{x^2} = 0 \qquad (4)$$

и получим значение, выбирая положительный корень:

$$x_{\min} = \frac{L}{2\sqrt{3}} = \frac{120(\text{см})}{2\sqrt{3}} \approx 34{,}6(\text{см}). \qquad (5)$$

Это точка минимума, т.к. в точке $x_{\min}$ производная меняет знак с отрицательного на положительный.

2-й способ нахождения минимального периода

Задача несложная для студентов первого курса и доступная старшеклассникам, овладевшими началами математического анализа. Попробуем обойтись без взятия производной, сделав решение посильным школьнику 9 класса, готовящегося к участию в олимпиадах по физике.

Для этого преобразуем выражение (3) так, чтобы получилось квадратное уравнение относительно x, при этом период T будет параметром:

$$x^2 - \left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2 x + \frac{1}{12}L^2 = 0. \qquad (6)$$

Количество корней этого уравнения определяется знаком дискриминанта:

$$D = \left(\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2\right)^2 - \frac{1}{3}L^2. \qquad (7)$$

Для человека, экспериментирующего с маятником, есть очевидный факт: $x(T)$ существует, маятник «работает». Существование не надо доказывать, хотя для математической строгости это надо было бы исследовать.

Значение расстояния от центра масс x при $D \geq 0$:

$$x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2 \pm \sqrt{\left(\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2\right)^2 - \frac{1}{3}L^2}\right). \qquad (8)$$

Согласно (8), то или иное значение периода можно получить двумя способами, при двух разных расстояниях точки подвеса от центра масс. Существует значение T, при котором уравнение имеет ровно один корень ($D = 0$):

$$\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2 = \frac{L}{\sqrt{3}}. \qquad (9)$$

Этот период, обнуляющий дискриминант, можно получить при единственном значении x, что соответствует его экстремальности:

$$x_{\min} = \frac{L}{2\sqrt{3}}. \qquad (10)$$

Значения $x_{\min}$, полученные с помощью математического анализа (5) и алгебраическим способом (10), естественно, совпали. Как обосновать, что это именно значение x, при котором период минимален без использования производной? Для этого снова обратимся к выражению (2). В числителе мы видим квадратичную функцию, а в знаменателе — линейную. При малых x $\left(x^2 << \frac{1}{12}L^2\right)$ T^2 убывает обратно пропорционально x; с ростом x квадрат x в числителе «побеждает» и T^2 начинает расти. Из этих несложных рассуждений следует, что должно быть некоторое минимальное значение периода колебаний.

Давайте рассмотрим более сложную задачу и решим её двумя способами, применяя метод математического анализа и алгебраический способ.

Задача 2. Маятник состоит из тонкого однородного стержня массы m_1 и длиной L, подвешенного за верхний конец (точка O), и небольшой шайбы массой m_2, которую можно закрепить на стержне в произвольной точке (см. рис. 1). Система может колебаться около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку O. Исследуйте зависимость периода малых колебаний этого маятника от положения шайбы на стержне.

Будем анализировать период колебаний (1).

Общая масса стержня и шайбы: $m = m_1 + m_2$; общий момент инерции: $J = J_1 + J_2$.

Центр масс однородного стержня находится в его геометрическом центре, поэтому расстояние центра масс системы «однородный стержень и шайба» от точки O:

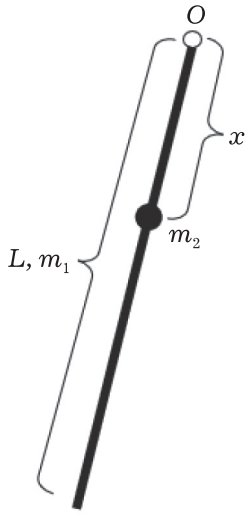

Рис. 1. Маятник из стержня и шайбы

$$l = \frac{\frac{1}{2}m_1 L + m_2 x}{m}. \qquad (11)$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно стержню, найдём по теореме Штейнера:

$$J_1 = \frac{1}{12}m_1 L^2 + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_1 L^2.$$

Момент инерции системы «однородный стержень и шайба» относительно интересующей нас оси:

$$J = \frac{1}{3}m_1 L^2 + m_2 x^2. \qquad (12)$$

Таким образом, мы получаем выражение для квадрата периода колебаний рассматриваемой системы:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\cdot\frac{\frac{1}{3}m_1 L^2 + m_2 x^2}{\frac{1}{2}m_1 L + m_2 x}. \qquad (13)$$

И общий момент инерции (числитель), и расстояние до центра масс (знаменатель) увеличиваются с ростом x; поэтому положение шайбы неоднозначно влияет на период. Но числитель квадратично зависит от x, а знаменатель линейно. Поэтому ожидаем, что сначала (при малых x) период уменьшается с ростом x («побеждает» знаменатель), а потом возрастает («побеждает» числитель).

1-й способ

Продифференцируем по x, чтобы выяснить, наличие минимального значения периода (в дальнейшем мы сравним его со значением, полученным без дифференцирования):

$$\left(T^2\right)' = \frac{4\pi^2}{g}\times$$
$$\times\frac{2m_2 x\left(\frac{1}{2}m_1 L + m_2 x\right) - m_2\left(\frac{1}{3}m_1 L^2 + m_2 x^2\right)}{\left(\frac{1}{2}m_1 L + m_2 x\right)^2}.$$

(Для простоты записи можно предварительно упростить коэффициенты. Здесь это делать не будем).

Раскрываем скобки в числителе и решаем получившееся квадратное уравнение на поиск нулей производной:

$$m_2^2 x^2 + m_1 m_2 L x - \frac{1}{3}m_1 m_2 L^2 = 0$$

$$D = m_1^2 m_2^2 L^2 - 4m_2^2\cdot\left(-\frac{1}{3}m_1 m_2 L^2\right) =$$

$$= m_1^2 m_2^2 L^2\left(1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{m_2}{m_1}\right).$$

Корни:

$$x_{1,2}=\frac{-m_1m_2L\pm m_1m_2L\sqrt{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{m_2}{m_1}}}{2m_2^2}.$$

Выбираем корень со знаком «+», т.к. положение шайбы по условию положительно; это точка минимума, т.к. производная (квадратный трёхчлен) меняет знак с отрицательного на положительный, а функция, соответственно, меняет убывание на возрастание:

$$x_{\min}=\frac{1}{2}L\cdot\frac{m_1}{m_2}\cdot\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{m_2}{m_1}}\right) \quad (14)$$

это значение соответствует минимуму T^2. Выше об исследовании экстремума кратко сказано. Подробно исследование экстремума функции рассматривается в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 11 класса.

2-й способ

Теперь применим алгебраический способ аналогично задаче 1. Преобразуем (13) в квадратное уравнение относительно x:

$$x^2-\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2x+\frac{m_1}{m_2}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{3}L^2-\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2\cdot\frac{1}{2}L\right)=0. \quad (15)$$

Это уравнение имеет единственный корень при некотором значении квадрата периода, при котором дискриминант уравнения (15) обращается в ноль:

$$D=\left(\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2\right)^2-4\frac{m_1}{m_2}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{3}L^2-\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2\cdot\frac{1}{2}L\right)=0$$

Получаем квадратное уравнение относительно T^2, поэтому при решении выбираем положительный корень:

$$T^2=\frac{4\pi^2}{g}\cdot\frac{m_1}{m_2}\cdot L\times$$
$$\times\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{m_2}{m_1}}\right). \quad (16)$$

При значении периода (16) дискриминант уравнения (15) обращается в ноль, и уравнение (15) имеет корнем значение x, точно такое же, как полученное выше — (14). Выкладки несколько громоздки, зато не требуют знания производных и умения находить с их помощью экстремумы функций.

Осталось проверить, не выходит ли найденное значение (14) за пределы стержня:

$$x_{\min}=\frac{1}{2}L\cdot\frac{m_1}{m_2}\cdot\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{m_2}{m_1}}\right)\le L?$$

Обозначим: $z=\frac{m_2}{m_1}$; нужно проверить, что:

$$-1+\sqrt{1+\frac{4}{3}\cdot z}\le 2z.$$

Переносим -1 вправо, возводим в квадрат:

$$1+\frac{4}{3}\cdot z\le(2z+1)^2,\quad 0\le 4z^2+\frac{8}{3}z,$$

что верно при любых $z>0$.

Интересно проанализировать значение (14) при разных соотношениях масс стержня и шайбы. Если шайба очень тяжёлая $(m_2 >> m_1)$, то $x_{\min} \to \frac{1}{\sqrt{3}} L \cdot \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \to 0$, т.е. шайбу надо расположить в точке подвеса. Тогда период колебаний будет определяться только параметрами стержня, и это ожидаемо. А вот если шайба очень лёгкая $(m_2 << m_1)$, то в первом приближении по отношению масс $\frac{m_2}{m_1}$ $x_{\min} = \frac{1}{3} L$ не зависит от соотношения масс!

Это значение можно сравнить с приведённой длиной стержня. Приведённая длина физического маятника — это длина нити математического маятника, имеющего такой же период, что и маятник физический. Сравнивая (1) и выражение для периода математического маятника $T_{\text{М}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{М}}}{g}}$, получим, что $l_{\text{М}} = \frac{J}{ml}$. Для нашего стержня:

$$l_{\text{М}} = \frac{\frac{1}{3} mL^2}{\frac{1}{2} mL} = \frac{2}{3} L. \qquad (17)$$

Таким образом, для случая очень лёгкой шайбы $x_{\min}$ соответствует половине приведённой длины стержня.

В заключение хотелось бы напомнить, что математика даёт физикам огромное количество инструментов и не всегда следует выбирать привычный. Особенно это полезно при работе с одарёнными детьми, показывая им разные способы решения одной и той же задачи.

Литература

1. Мартемьянова Т.Ю. Как не быть мазилой // Квант, 2018. № 7. С. 37–41.
2. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. Москва: Издательство Физико-математической литературы, 2001. 640 с.
3. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика : Механика. 10 класс : учебник : углублённый уровень. Москва : Просвещение, 2022. 510 с.

ЮМОР

Шерлок Холмс и доктор Ватсон летят на воздушном шаре. Кругом густой туман. Спускаются к земле. По дороге идет одинокий путник. Ватсон кричит:

— Сэр, не подскажите, где мы находимся?

После недолгого молчания путник крикнул в ответ:

— Вы находитесь на воздушном шаре!

Холмс:

— Как нам не везет, Ватсон. Единственный человек на дороге, и тот оказался математиком.

— Откуда вы узнали, что он математик?

— Это же элементарно, Ватсон. Во-первых, очень долго думал, во-вторых, дал абсолютно точный, и, в-третьих, совершенно бесполезный ответ.