

Мукушев Базарбек Агзашулы
профессор Казахского агротехнического университета
им. С. Сейфуллина, доктор педагогических наук,
г. Астана, Республика Казахстан

Физические задачи на использование метода оценок

Метод физических оценок является одним из главных научных инструментов ученых-физиков в исследованиях. Физические оценки – начальный и обязательный этап постановки эксперимента, конструирования оборудования и теоретической разработки исследуемого явления.

В статье изложены некоторые преимущества оценивающего подхода к физическим процессам и объектам на примере задач.

Введение

В условии задачи на использование метода оценок отсутствуют численные значения физических величин, хотя в содержании задачи этого типа представлены конкретные физические явления или объекты. Во многих случаях оценки подсказывают путь точного решения задачи, дают возможность установить границы области применимости точного решения и понять, какие изменения потребуются при постановке и решении задачи вне пределов этой области.

Для решения такой задачи необходимо создать простую физическую модель рассматриваемого явления и выбрать разумные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. При построении этой модели делается грубая прикидка по порядку физических величин. Что именно следует правильно понимать под словами «оценка по порядку величин». Два численных значения какой-либо физической величины считаются отличающимися на порядок, если их отношение примерно равно 10, на два порядка, если оно равно 10^2, и т.д. Если два значения отличаются, например, в 1,4 раза или 5 раз, их нужно считать величинами одного порядка.

На этом этапе решения задачи нужно правильно отобрать физические параметры, наиболее существенные для задачи, определяющие ее физику. При этом нужно пренебрегать параметрами, слабо влияющими на интересующие нас явления.

Владение методом оценок является одним из важных качеств иссле-

дователя при разработке или анализе новых идей, весьма существенным в его научно-поисковой работе.

Рассмотрим пример из механики: Оценить среднее усилие, развиваемое ногами человека при приземлении после прыжка из окна второго этажа.

Анализ: При приземлении человека его кинетическая энергия изменяется за счет работы сил упругости мышц ног. Человек гасит свою скорость, приседая на расстояние l, равное примерно половине его роста.

Выбираем численные значения физических параметров, которые получены при проведении прикидки по порядку следующих физических величин: $m \approx 70$ кг, $g \approx 10$ м/с^2, $h \approx 5$ м, $l \approx 1$ м.

Напишем формулу среднего усилия ног человека и находим оценочное значение этой силы:

$$F \sim mgh/l \approx 3{,}5 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

1. Задачи на оценивание по порядку физических величин

Задача 1. Какое давление на пол производит мальчик, когда он стоит?

Решение. Считаем, что длина подошвы мальчика равна 20 см, значит площадь обоих подошв приблизительно равна $S \approx l^2 \approx 400$ см^2 $\approx$ $\approx 4 \cdot 10^{-2}$м^2, $m \approx 40$ кг, $g \approx 10$ м/с^2. Оценочное значение давления мальчика на пол равно $P_1 \sim mg/S \approx 10^4$ Н/м^2.

Задача 2. Оцените выталкивающую силу, действующую на человека со стороны воздуха.

Решение. Эта сила выражается по формуле $F_A = \rho_B Vg$, $\rho_B \approx 1$ кг/м^3, $g \approx 10$ м/с^2. Здесь нам нужно оценить объем человека. Известно, что когда человек находится без движения в бассейне, он начинает медленно тонуть. Этот факт доказывает, что плотность человека приблизительно равна плотности воды, то есть $\rho \sim 10^3$ кг/м^3. Масса человека $m \approx 100$ кг. Объем человека $V \sim \dfrac{m}{\rho} \approx \dfrac{1}{10}$ м^3.

Таким образом,

$$F_A \sim \rho_B Vg \approx 1 \cdot 0{,}1 \cdot 10 = 1\text{Н}.$$

Задача 3. Оцените отношение мощности, развиваемой кузнечиком при прыжке, к его массе.

Решение. За время t кузнечик, распрямляя ногу длины l, набирает скорость v. Средняя мощность кузнечика

$$P \sim \frac{W_k}{t} \sim \frac{mv^2}{2t}, \qquad \frac{vt}{2} \sim l, \qquad v \sim \sqrt{2gH},$$

H – высота полета кузнечика. Отсюда

$$\frac{P}{m} \sim \frac{v^3}{4l} \sim \frac{(2gH)^{3/2}}{4l}.$$

Подставим в формулу следующие физические величины по порядку $l \approx 3 \cdot 10^{-2}$м, Н $\approx$ 1м, g $\approx$ 10 м/с^2.

Получим $\dfrac{P}{m} \sim \dfrac{(2gH)^{3/2}}{4l} \approx$ 0,8 кВт/кг.

Задача 4. Какая часть атмосферного кислорода Земли израсходуется при сжигании двух миллиардов тонн угля? (Эта цифра близка к данным о мировой добыче угля за год).

Решение. Известно, что в атмосфере Земли на долю кислорода приходится одна пятая часть объема. Поскольку, атмосфера Земли

состоит в основном из кислорода и азота, массовая доля кислорода в атмосфере тоже близка к 1/5. Массы молекулы кислорода и азота можно считать равными. Для оценки доли кислорода в атмосфере взято близкое к массовой доле число 1/5. Значит, масса кислорода в атмосфере равна $M = \frac{1}{5} \cdot \frac{4\pi R_3^2 P_{ат}}{g}$. Число взаимодействующих молей углерода и кислорода одинаково, так как при сгорании угля идет химическая реакция $C + O_2 = CO_2$:

$$\frac{m_C}{\mu_C} = \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}, \text{ то есть } m_{O_2} = \frac{m_C \mu_{O_2}}{\mu_C},$$

$$\frac{m_{O_2}}{M} \sim 5 m_C \mu_{O_2} \frac{g}{4\pi R_3^2 P_{ат} \mu_C} \approx$$

$\approx 5 \cdot 10^{-6}$, так как $R_З \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м, $P_{ат} \approx 10^5$ Па, $\mu_C =$ 12 г/моль, $\mu_{O_2} =$ $= 32$ г/моль.

Задача 5. Считая, что Земля является однородным жидким шаром, оцените давление в центре Земли.

Решение.

В этом случае мы можем использовать гидростатическую модель распределения давления внутри Земли. Нам нужно найти формулу, описывающую изменение значения ускорения свободного падения (или ускорение силы тяжести) внутри однородной по плотности планеты. Эту формулу можно получить, используя теорему Гаусса.

Для этого нужно написать формулу потока напряженности через сферическую поверхность с радиусом r. Поток напряженности через эту поверхность равен $\Phi(r) = -4\pi G M r^3 / R^3$ при условии $r \le R$. R – радиус планеты. $\Phi(r) =$ $= -4\pi r^2 g(r)$. Значит,

$$g(r) = \frac{GM}{R^3} r = g_0 \frac{r}{R}, \text{ где } r \le R.$$

Высота столба вещества равна радиусу Земли. Поскольку ускорение свободного падения прямо пропорционально расстоянию от центра Земли, можем написать $g_{ср} = g_0/2$, где $g_0 = 9{,}8$ м/с^2. Давление в центре Земли $p \sim \rho g_{ср} R_З \sim \rho (g/2) R_З$, $\rho = M_З / V_З \sim 3g / (4\pi G R_З)$, то есть

$$p \sim 3g^2 / (8\pi G) \sim 10^{11} \text{ Па}.$$

Задача 6. Оцените скорость струи пара, выходящего из носика кипящего чайника.

Решение. Мощность нагревателя обозначим через W, удельную теплоту парообразования – L. Введем еще один параметр – долю мощности α, идущую на образование пара. Масса пара, образующегося в каждую секунду, $\rho v S$. Очевидно, сколько пара образовалось, столько же и выходит из чайника:

$$\frac{\alpha W}{L} = \rho v S.$$

Здесь ρ – плотность пара при кипении, v – скорость вытекания пара, S – площадь сечения носика чайника. По закону Менделеева-Клапейрона плотность пара $\rho =$ $= \mu p / (RT)$, p – давление, μ – молярная масса воды, R –

универсальная газовая постоянная, T – температура пара. Окончательно получаем

$$v = \frac{\alpha W}{L\rho S} = \frac{\alpha WRT}{Lp\mu S}.$$

Если мощность нагревателя $W \approx 1$кВт, $\alpha \approx 0{,}5$, $S \approx 1\text{см}^2$, $T \approx 373$К, $p \approx 10^5$Па, (так как давление насыщенного пара при температуре кипения равно атмосферному давлению), а постоянные величины равны, соответственно $R = 8{,}3$ Дж/(кг·К), $L = 2{,}26$ МДж/кг, $\mu = 18\cdot10^{-3}$кг/моль. Оценочное значение скорости струи пара равно $v \sim 4$ м/с.

Задача 7. Оцените время разрядки металлического шара, соединенного с Землей через резистор с известным сопротивлением.

Решение. Пусть потенциал заряженного шара φ, а заряд $Q = C\varphi$, где $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ – емкость шара (a-радиус шара). После соединения с Землей и потенциал шара, и его заряд станут равными нулю. Во время разрядки по цепи пойдет ток I, который с течением времени будет изменяться. Но для оценки этим фактором мы пренебрежем. Напишем оценочное соотношение для тока, проходящего через резистор:

$$I \sim Q/t \sim \varphi/R,$$

где R – сопротивление резистора, t – время разрядки. Отсюда

$$t \sim QR/\varphi = CR = 4\pi\varepsilon_0 aR.$$

Сделаем прикидку по порядку физических величин: a = 1м, R = = 1 МОм, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, $t \sim 10^{-4}$ с.

Задача 8. Во сколько раз собирающая линза от очков увеличивает на единицу площади мощность света, приходящего от Солнца?

Решение. Свет, падающий на линзу диаметра $d \approx 5$ см, собирается в фокальной плоскости, формируя пятно – изображение Солнца – диаметром $D \approx \alpha F = DF/R$, где α – угловой размер Солнца, равный отношению диаметра Солнца D к расстоянию R от Земли до Солнца. Известно, что угловой размер Солнца $\alpha \approx 0{,}01$рад. Считаем, что оптическая сила линзы очков равна 4 дптр, значит, фокусное расстояние линзы F= 25 см. Отношение β мощности излучения, падающего на линзу, к мощности излучения, падающего на экран, обратно пропорционально отношению площадей линзы и изображения Солнца на экране:

$$\beta = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \frac{d}{\alpha F^2} \approx 4\cdot10^2.$$

2. Решение задач-оценок с помощью метода анализа размерностей

Известно, что метод размерностей помогает установить функциональные зависимости между разными физическими величинами, но только для тех ситуаций, когда эти зависимости степенные. Действительно, таких зависимостей в природе довольно много, и этот метод широко используется исследователями. Численные коэффициенты

только из соображений размерностей получить нельзя. Чаще всего эти коэффициенты условно полагают равными единице, если речь идет об оценке лишь по порядку физических величин. Предлагаем некоторые задачи-оценки на применение метода размерностей.

Задача 9. Оцените период колебаний дождевой капли.

Решение. Период колебаний капли (T) зависит от следующих физических величин: плотности дождевой капли (ρ), коэффициента поверхностного натяжения (σ) и радиуса капли (r). Пусть величины T, ρ, σ, r связаны следующей формулой степенной зависимостью:

$$T \sim \rho^X \sigma^Y r^Z.$$

Всего у нас есть, следовательно, четыре величины (T, ρ, σ, r), связь между которыми интересует. Выпишем размерности этих величин в системе СИ: $[T]$ = с, $[\rho]$ = кг · м$^{-3}$, $[\sigma]$ = кг·с$^{-2}$, $[r]$ = м.

Показатели степени X, Y, Z – числа, которые нам нужно определить.

Если формула степенной зависимости выражает реальную физическую закономерность, то размерности правой и левой частей этой формулы должны совпадать, то есть должно выполняться равенство

$$\text{с} = (\text{кг} \cdot \text{м}^{-3})^x \cdot (\text{кг}\cdot\text{с}^{-2})^y \cdot (\text{м})^z =$$
$$= \text{кг}^x \cdot \text{м}^{-3x} \cdot \text{кг}^y \cdot \text{с}^{-2y} \cdot \text{м}^z =$$
$$= \text{кг}^{x+y} \cdot \text{м}^{-3x+z} \cdot \text{с}^{-2y}.$$

В левую часть этого равенства вообще не входят метры и килограммы, а секунды входят в степени – 1. Это означает, что для x, y и z выполняются уравнения:

$$\begin{cases} -2y = 1 \\ x + y = 0 \\ -3x + z = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $x = 1/2$, $y = -1/2$, $z = 3/2$.

Следовательно, $T \sim \rho^{1/2} \sigma^{-1/2} r^{3/2}$. Учитывая, что $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, выразим T через массу капли m: $T \sim \left(\frac{m}{\sigma}\right)^{1/2}$.

Сделаем прикидку по порядку физических величин и подставим их в последнюю формулу: $m \sim 10^{-3}$ кг, $\sigma \sim 10^{-1}$ Н/м, и получим: оценочная величина период колебаний дождевой капли $T \sim 0{,}1$ с.

Задача 10. Оцените время, через которое вы услышите звук взрыва динамита около дерева, которое находится от вас на расстоянии 3 км.

Решение. Известно, что скорость v звука зависит от физических параметров, характеризующих эту среду. К этим параметрам относятся давление p и плотность воздуха ρ. Предположим, что

$$v \sim p^x \rho^y,$$

где x и y – неизвестные пока числа. Если такая зависимость существует, то размерности ее левой и правой частей должны быть одинаковы. Тогда

$$\text{м}\cdot\text{с}^{-1} = (\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2})^x \cdot (\text{кг} \cdot \text{м}^{-3})^y =$$
$$\text{кг}^{x+y} \cdot \text{м}^{-x-3y} \cdot \text{с}^{-2x}.$$

Это равенство выполняется при условии, что

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x-3y=1 \\ -2x=-1 \end{cases}$$

Отсюда $x = 1/2$, $y = -1/2$, и получаем $v \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}}$.

Для оценки скорости звука давление воздуха примем равным нормальному атмосферному давлению: $p \sim 10^5$Па, а плотность воздуха считать равной плотности при нормальных условиях: $\rho \sim 1{,}3$ кг/м^3. Тогда скорость звука $v \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}} \sim$ $\sim$ 300 м/с. Время, через которое наблюдатель услышит звук взрыва,

$$t \sim \frac{3 \cdot 10^3 \text{ м}}{300 \text{ м/с}} \sim 10 \text{ с}.$$

Примечание: Формула для скорости распространения в газе установлена Лапласом: $v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$, где $\gamma = C_p / C_V$. При нормальных условиях для воздуха $\gamma \approx 1{,}2$ и скорость звука равна 330 м/с. Это значение скорости звука было подтверждено посредством экспериментов. Наше оценочное значение скорости звука в воздухе очень близко к значению скорости звука в воздухе, определенному по формуле Лапласа и также экспериментально.

Литература

1. Меледин Г.В. Задачи-оценки // Квант.- 1983.- №7. С.26-31.
2. Меледин Г.В. Физика в задачах. М.: Наука.- Главная редакция физико-математической литературы.-1985.-208 с.
3. Ащеулов С.В., Барышев В.А. Задачи по элементарной физике. Учебное пособие. Л., Изд-во Ленингр. Ун-та. 1974. – 192 с.
4. Мукушев Б.А. Метод анализа размерностей // Потенциал. 2012. № 11. С. 27–34.
5. Брук Ю., Стасенко А. Метод размерностей помогает решать задачи // Квант. 1981. № 6. С. 11–19.

ЮМОР

Один бойкий журналист, держа в руках записную книжку и карандаш, спросил Эйнштейна: — Есть ли у вас блокнот или записная книжка, куда вы записываете свои великие мысли?

Эйнштейн посмотрел на него и сказал: — Молодой человек! По-настоящему великие мысли приходят в голову так редко, что их нетрудно и запомнить.