

Белов Филипп Анатольевич
Кандидат педагогических наук, учитель физики МОУ ЛПН,
доцент кафедры олимпиадной и проектной подготовки по физике
СГУ им. Н.Г. Чернышевского

Экспериментальная задача «Древнерусская линейка»

Единицы измерения физических величин, навыки работы с которыми активно осваиваются школьниками в 5-7 классе, — невероятно глубокая и интересная тема, которая в то же время достаточно скудно представлена в используемых сегодня задачниках. Особенно сложно найти задания экспериментальные, подходящие для использования на уроках пропедевтики физики в 5-6 классах, либо на первом этапе изучения предмета в 7 классе. Чаще всего школьники в этой возрастной группе работают с переводами единиц измерения длин, масс и времени, а также производными от них единицами измерения скорости, площади и объема. И почти все имеющиеся в современной практике примеры рабочих листов посвящены теоретическим задачам формата «переведите в...». Среди известных экспериментальных задач, напрямую связанных с этой темой, автор может назвать только одну — задачу «Понять умом и измерить общим аршином», предложенную в 2016 году на экспериментальном туре регионального этапа олимпиады имени Дж. К. Максвелла. Несмотря на олимпиадный уровень условия, эту задачу с некоторыми упрощениями и дополнительными комментариями вполне можно включить в программу фронтального практикума в 7 классе, а способы её решения не ограничиваются известным оригинальным вариантом. На расширение коллективной методической копилки в отношении экспериментальных задач по теме «Единицы измерения физических величин» направлена данная статья. Предлагаем читателю задачу, которую мы назвали «Древнерусская линейка». Школьнику рекомендуем сначала посвятить время самостоятельным поискам и размышлениям, прежде чем анализировать авторское решение. Если в домашних условиях не найдется цифровых весов, то читатель может принять как заданное тот факт, что масса фрагмента вырезанного листа — «линейки» — будет иметь массу 2 г.

Оборудование: цифровые весы, «линейка» — фрагмент листа бумаги с нанесенной шкалой в вершках (устаревших и неиспользуемых се-

годня единицах измерения расстояния).

Задание:

При использовании вершков для измерения роста людей на Руси результаты выражались особым образом. В вершках указывался не собственно рост, а только то, насколько он превосходил два аршина (1 аршин = 16 вершков). Поэтому для получения истинного роста к значению, выраженному в вершках, следует прибавлять два аршина. Например, дворник Герасим из повести «Муму» описывается И.С. Тургеневым так: «Из числа всей её челяди самым замечательным лицом был дворник Герасим, мужчина двенадцати вершков роста, сложенный богатырём...».

В вашем распоряжении есть «линейка» длиной 6 вершков, напечатанная на листе бумаги, каждый квадратный метр которой имеет массу 80 г.

С помощью имеющегося оборудования:

1) определите, чему равен 1 вершок в современной системе мер

2) выразите рост Герасима в сантиметрах

3) найдите длину и ширину вашего рабочего стола в сантиметрах

4) рассчитайте погрешности результатов, принимая погрешность цифровых весов равной ±0,05 г, а погрешность «линейки» равной половине цены деления её шкалы

Свои линейки для измерений длин использовать запрещено! Допустимо использовать линейку в качестве чертежного инструмента (линейка без шкалы). Опишите методику всех проводимых этапов эксперимента и сдайте линейку с построениями, если вы выполняли их.

Решение и комментарии

Очевидно, что для ответа на второй и третий вопросы необходимо определить значение одного вершка в сантиметрах. Однако следует заметить, что прежде, чем проводить какие-либо исследования с самой выданной линейкой, нарушая её целостность, стоит произвести измерения длин сторон стола в вершках и зафиксировать значения. Иначе, после складывания бумажной линейки в несколько раз (например, для того, чтобы поместить её на весы) восстановить ровность и гладкость листа будет невозможно, что приведёт к снижению точности измерений стола. В этом заключается необратимость эксперимента.

Большинство стандартных школьных парт при измерениях выданной линейкой будут иметь длину и ширину соответственно:

$a = 27$ вершков; $b = 11{,}5$ вершков.

Небольшие отличия могут наблюдаться в зависимости от модели парты. Следуя указаниям об оценке погрешности, мы должны записать результат с абсолютной ошибкой. Важно в данном случае отметить, что указанные значения имеют погрешность больше половины цены деления, так как получились в результате перекладывания линейки вдоль края стола несколько раз. В этом случае:

$$a = 4 \cdot (6{,}0 \pm 0{,}5) + (3{,}0 \pm 0{,}5) = \\ = (27{,}0 \pm 2{,}5) \text{ вершков;}$$

$$b = (6{,}0 \pm 0{,}5) + (5{,}5 \pm 0{,}5) = \\ = (11{,}5 \pm 1{,}0) \text{ вершков.}$$

Интересно отметить, что при таком измерении мы фактически поль-

зуемся обратным методом рядов. Метод рядов применяется для повышения точности в случае, когда необходимо измерить параметр объекта меньший цены деления прибора (например, диаметр или массу зернышка). В данной ситуации мы измеряем объект больший, чем предел измерения прибора, что приводит к снижению точности вследствие многократного суммирования абсолютных ошибок.

Для ответа на первый вопрос и дальнейших переводов с помощью полученного коэффициента нужно исследовать саму линейку. Очевидно, что следует измерить её массу. При точном вырезании её масса получится близка к двум граммам (возможны небольшие отклонения при переходе от одного образца к другому):

$$m = (2{,}00 \pm 0{,}05)\ \text{г};\ \varepsilon_m = 2{,}5\%.$$

При известной поверхностной плотности бумаги легко выразить её площадь (принимаем σ заданной точно и считаем $\varepsilon_S = \varepsilon_m$):

$$S = \frac{m}{\sigma} = (250 \pm 6)\ \text{см}^2;\ \varepsilon_{S\text{см}} = 2{,}5\%.$$

В случае, если школьнику еще неизвестно понятие поверхностной плотности (в 5-6 классе), допустимо составить пропорцию, определяющую площадь фрагмента бумаги по её массе.

Та же самая площадь может быть выражена в вершках, если длину и ширину линейки определить в этих единицах: $S = xy$. Длина линейки $x = 6{,}0$ вершков. Ширина линейки не задана и должна быть измерена. Складывая угол линейки по краю шкалы, мы увидим, что ширина оказывается почти ровно 2 вершка:

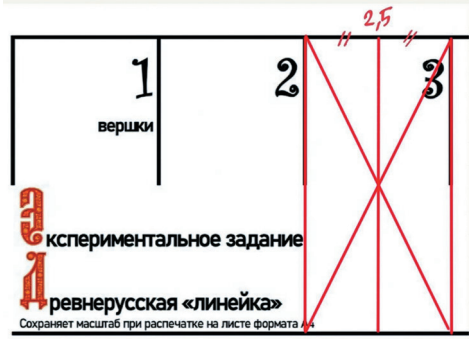


$$y = (2{,}0 \pm 0{,}5)\ \text{вершков};\ \varepsilon_y = 25\%.$$

И если x можно принять заданным точно, то погрешность величины y в 25% слишком высока для прямых измерений. Можно попробовать сложить этот же угол далее в виде «гармошки», что приведёт к укладыванию его вдоль шкалы трижды (используем фактически метод рядов). Тогда:

$$3y = (6{,}0 \pm 0{,}5)\ \text{вершков};\ \varepsilon_{3y} = 8{,}3\%;$$
$$y \approx (2{,}0 \pm 0{,}17)\ \text{вершков};\ \varepsilon_y = 8{,}5\%.$$

Погрешность снизилась, но всё равно слишком велика для прямого измерения, чтобы можно было его считать удачным. На этом этапе можно поискать варианты уточнения шкалы. Позволив решающему применять линейку как чертежный инструмент, мы получаем геометрическую задачу на построение, цель которого разделить каждый отрезок шкалы на равные части. Достаточно продлить вертикальные штрихи, создав прямоугольник, провести его диагонали для нахождения центра и вертикальной осью симметрии разделить соответствующий интервал шкалы на два равных. Цена деления получится тогда 0,5 вершка.



При аккуратных построениях удастся и еще раз осуществить деление получившихся более узких прямоугольников, чтобы сделать цену деления равной 0,25 вершка. Тогда, в соответствии с условием, погрешность прямых измерений допустимо будет взять равной 0,125 вершка, что сильно повышает качество результатов. Строгость и красоту этой части задачи придаст мысль о том, что ту самую вертикальную ось симметрии провести без использования циркуля весьма затруднительно (вспомните основные сюжеты задач на построение с помощью циркуля и линейки без шкалы). Если это делается «на глаз», то, конечно, такой вариант принять как в полной мере корректный нельзя. После некоторых размышлений становится понятно, что в рамках именно этой задачи построение вертикальной оси в точности параллельной напечатанным штрихам вполне возможно и без циркуля! Можно построить второй прямоугольник на тех же двух штрихах, не продляя их. Соединение двух центров прямоугольников даёт искомую прямую. Тогда:

$$3y = (6{,}000 \pm 0{,}125) \text{ вершков};$$
$$\varepsilon_{3y} = 2\%;$$
$$y = (2{,}00 \pm 0{,}04) \text{ вершков};$$
$$\varepsilon_{y} = 2\%.$$

Площадь окажется равна

$$S = xy = (12{,}00 \pm 0{,}24) \text{ вершков}^2;$$
$$\varepsilon_{S\text{вершки}} = 2\%.$$

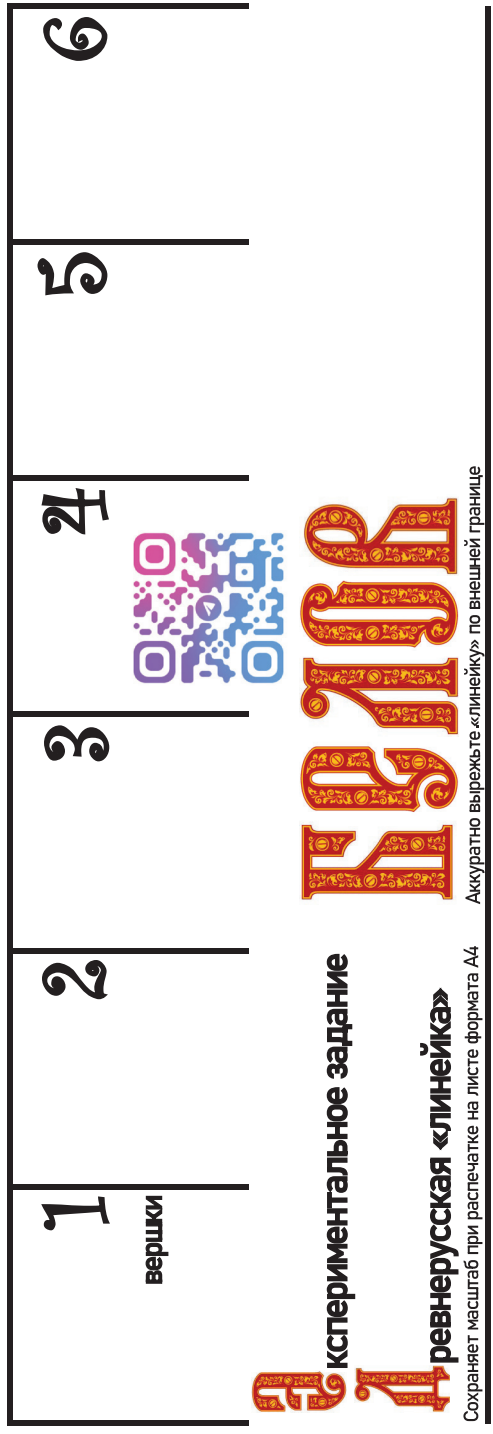
Если формулы расчета абсолютной и относительной погрешности при выполнении арифметических операций в навыках решающего пока отсутствуют, то легко провести оценку максимального и минимального значения площади (как и других косвенных результатов в этой задаче) с помощью доверительных интервалов. Таким образом, оказалось, что:

$$(12{,}00 \pm 0{,}24) \text{ вершков}^2 = (250 \pm 6) \text{ см}^2;$$
$$12{,}00 \text{ вершков}^2 \approx 250 \text{ см}^2;$$
$$1 \text{ вершок}^2 \approx 20{,}8 \text{ см}^2;$$
$$1 \text{ вершок} \approx 4{,}56 \text{ см};$$
$$\varepsilon_{1 \text{ вершок}} = \frac{\varepsilon_{S\text{см}} + \varepsilon_{S\text{вершки}}}{2} = 2{,}3\%;$$

1 вершок ≈ (**4,56 ± 0,10**) см.

При условии, что операция арифметического квадратного корня еще не изучена, школьнику можно предложить подобрать число, квадрат которого максимально близок к значению 20,8. Путем недолгого перебора можно убедиться в том, что это число равно 4,56. Полученное значение весьма близко к истинному переводному коэффициенту (один вершок равен 4,445 см).

Последний шаг в решении задачи — расчет роста Герасима и длин сторон стола (которые после проведенного уточнения шкалы можно написать с уменьшенными погрешностями):



Рост = 2 аршина + 12 вершков =
= 44 вершка ≈ (201 ± 4) см;

$a = 4 \cdot (6{,}0 \pm 0{,}125) + (3{,}0 \pm 0{,}125) =$
$= (27{,}0 \pm 0{,}6)$ вершков =
$= (123{,}1 \pm 1{,}2)$ см;

$b = (6{,}0 \pm 0{,}125) + (5{,}5 \pm 0{,}125) =$
$= (11{,}50 \pm 0{,}25)$ вершков =
$= (52{,}4 \pm 2{,}3)$ см.

Файл для распечатывания линейки с выверенными размерами можно скачать по Qr-коду.

Ответы к статье «Вопросы из страны Зазеркалье»

1. На рис. 1 в статье часы показывают время 2 часа 35 минут, на рис. 2 — 3 часа 10 минут. Между этими моментами времени прошло 35 минут.

2. Ответ на вопрос Белой Королевы: 10 (сумма 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + + 1+ 1 + 1 + 1 и в зеркале равна 10).

Ответ на вопрос Чёрной Королевы: 1 (вычитание девяти из восьми в Зазеркалье соответствует вычитанию 9 — 8).

Ответ к статье «Алиса и системы счисления»

Можно предположить, что в рассуждениях Алисы речь идёт о вычислениях в недесятичных системах счисления[1]. В каких?

Произведение чисел 4 и 5 равно 12 в восемнадцатеричной системе счисления ($12_{18} = 1 \times 18 + 2 \times 1 = 20_{10}$), чисел 4 и 6 — 13 в системе счисления с основанием 21 ($13_{21} = 1 \times 21 + 3 \times 1 = 24_{10}$).

Более сложным является ответ на вопрос — почему девочка утверждала: «Так я до двадцати никогда не дойду!»? Давайте разберёмся.

Для системы счисления, основание которой — 18 («восемнадцатеричная»), произведение 4 × 5 равняется 12. В системе счисления с основанием 21 справедливо равенство 4 × 6 = 13. Если продолжить этот ряд, каждый раз увеличивая основание на 3, то произведения будут увеличиваться на единицу:

$$4 \times 7 = 14_{24};$$
$$4 \times 8 = 15_{27};$$
$$4 \times 9 = 16_{30};$$
$$4 \times 10 = 17_{33};$$
$$4 \times 11 = 18_{36};$$
$$4 \times 12 = 19_{39}.$$

Но при умножении на 13 мы не получим 20. Дело в том, что в системе счисления с основанием 42 произведение 4 × 13 (52_{10}) равняется не 20, а числу, начинающемуся на цифру 1, за которой будет следовать символ, обозначающий цифру 10 (например, числу $1A$[2]). Так что героиня книга была права, утверждая, что не дойдет до числа 20![3] Впервые такое объяснение дал А. Л. Тейлор в своей книге «Белый рыцарь» (A. L. Taylor. The White Knight. — L., 1952), но в русскоязычной литературе это малоизвестно...

---

[1] Заметим, что о недесятичных числах 12, 13 и 20, если быть точным, нельзя говорить «двенадцать», «тринадцать» и «двадцать».

[2] $1A_{42} = 1 \times 42 + 10$, то есть $1A_{42}$ равно десятичному числу 52.

[3] Такие знания автора книги в области математики — не удивительны: Л Кэрролл (настоящее его имя Крайст-Чёрч Чарльз Доджсон) — достаточно плодотворный математик, логик, это — его основное занятие. — **Прим. ред.**