

Иванов Анатолий Ефимович
Профессор Российской Академии Естествознания, кандидат технических наук, доцент по кафедре физики, доцент кафедры «Основы физики» МГЕУ им. Н.Э. Баумана

Решение задач по физике в системе центра масс с помощью теоремы Кёнига

Центр масс

Центром масс системы двух материальных точек массами m_1 и m_2, положение которых в данной системе отсчёта задано радиус-векторами r_1 и r_2 (см. рис. 1), называют точку C, масса которой равна сумме масс $M = m_1 + m_2$, а положение определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

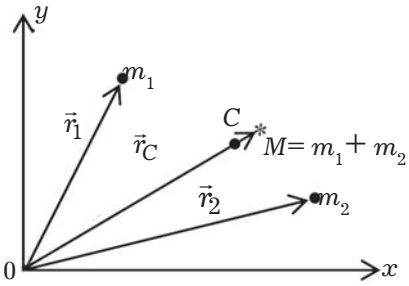


Рис. 1

В случае n точек радиус-вектор центра масс имеет вид

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i}.$$

Координаты центра масс соответственно определяются выражениями

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i},$$

$$z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} mz_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i}. \qquad (1)$$

Отметим, что центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Дифференцируя по времени соотношения (1), находим выражения для скоростей центра масс:

$$v_{Cx} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i v_{ix}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i}, \qquad v_{Cy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i v_{iy}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i},$$

$$v_{Cz} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i v_{iz}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i}.$$

Если центр масс движется со скоростью $\vec{v}$, то импульс $\vec{P}$ системы материальных точек выражается через эту скорость следующим образом:

$$\vec{P} = M\vec{v} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{v}_i.$$

В инерциальной системе отсчёта ускорение центра масс $\vec{a}_C$ определяется лишь внешними силами, приложенными к материальным точкам системы:

$$M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{\text{внеш}\,i}. \qquad (2)$$

Внутренние силы *не могут* изменить скорость центра масс. Выражение (2) называют *теоремой о движении центра масс*.

Связь между кинетическими энергиями в различных инерциальных системах отсчета. Теорема Кёнига[1]

Рассмотрим частный случай, когда тело состоит из одной материальной точки массы m, движущейся в неподвижной системе отсчета со скоростью $v_{\text{абс}}$. В этой системе отсчета её кинетическая энергия равна $E_{\text{к}} = \frac{mv_{\text{абс}}^2}{2}$. В системе отсчета, движущейся поступательно относительно неподвижной системы отсчета со скоростью $v_{\text{пер}}$, скорость рассматриваемой материальной точки будет равна $v_{\text{отн}}$, а ее кинетическая энергия в движущейся системе отсчета $E'_{\text{к}} = \frac{mv_{\text{отн}}^2}{2}$. Учитывая закон сложения скоростей $v_{\text{абс}} = v_{\text{отн}} + v_{\text{пер}}$, получаем

$$\frac{mv_{\text{абс}}^2}{2} = \frac{mv_{\text{отн}}^2}{2} + \frac{mv_{\text{пер}}^2}{2} + m\vec{v}_{\text{отн}} \cdot \vec{v}_{\text{пер}},$$

или

$$E_{\text{к}} = E'_{\text{к}} + \frac{mv_{\text{пер}}^2}{2} + \vec{p}_{\text{отн}} \cdot \vec{v}_{\text{пер}}, \qquad (3)$$

где $\vec{p}_{\text{отн}} = m\vec{v}_{\text{отн}}$ – импульс материальной точки в движущейся системе отсчета.

Формула (3) справедлива и для произвольной системы материальных точек. Действительно, если написать соотношение (3) для каждой материальной точки системы, а затем просуммировать по всем точкам, то снова получится формула (3), в которой под $\vec{p}_{\text{отн}}$ надо понимать импульс всей системы материальных точек в движущейся системе отсчета, т.е. $\vec{p}_{\text{отн}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots$. Его можно представить в виде $\vec{p}_{\text{отн}} = M\vec{v}_C$, где $\vec{v}_C$ – скорость центра масс системы материальных точек относительно движущейся системы отсчета, а $M = m_1 + m_2 + \ldots$ – суммарная масса системы материальных точек.

[1]Кёниг, Иоганн Самуэль (1712–1757) – швейцарский математик и механик.

Если центр масс покоится в движущейся системе отсчета, т.е. $\vec{v}_C = 0$, то

$$E_к = \frac{Mv_{пер}^2}{2} + E'_к.$$

Это выражение называют *теоремой Кёнига* и формулируют так: «Кинетическая энергия системы материальных точек в системе центра масс равна кинетической энергии центра масс плюс кинетическая энергия отдельных материальных точек в их относительном движении относительно центра масс».

Задачи

1. В горизонтально расположенной трубе могут без трения двигаться два поршня массами m_1 и m_2, соединённые пружиной жесткостью k. В момент, когда пружина не деформирована и расстояние между поршнями равно L, поршням толчком сообщают скорости v_1 и v_2, направленные вдоль оси трубы навстречу друг другу (см. рис. 2). Рассматриваемая система находится в вакууме, массой пружины можно пренебречь. Найдите минимальное расстояние между поршнями L_{min}.

Дано: m_1, m_2, v_1, v_2, L.

Найти: L_{min}.

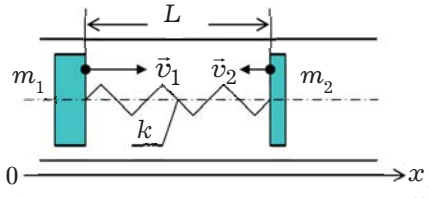


Рис. 2

Решение. Закон сохранения энергии в системе центра масс в соответствии с теоремой Кёнига имеет вид

$$\frac{(m_1+m_2)v_C^2}{2} + \frac{m_1 v_{1ОТН}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2ОТН}^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)v_C^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad (1)$$

где скорость центра масс в проекции на ось Ox

$$v_C = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (2)$$

скорости поршней относительно центра масс в проекции на ось Ox

$$v_{1ОТН} = v_1 - v_C, \quad (3)$$

$$v_{2ОТН} = -v_2 - v_C, \quad (4)$$

x – максимальная деформация пружины. Подставляя равенства (2)–(4) в соотношение (1), найдем x. Тогда минимальное расстояние между поршнями

$$L_{min} = L - x. \quad (5)$$

Проверим единицу измерения величины L_{min}. Единица второго члена предыдущего выражения

$$\left[\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{1}{k}\left\{m_1 m_2\left[\begin{matrix}(m_1+m_2)\left(v_1^2+v_2^2\right)\\ +2v_1v_2(m_1-m_2)\end{matrix}\right]\right\}}\right] = \frac{1}{кг}\sqrt{\frac{м^3\cdot кг^3\cdot с^2}{кг\cdot м\cdot с^2}} = м.$$

Ответ:

$$L_{min} = L - \frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{1}{k}\left\{m_1 m_2\left[\begin{matrix}(m_1+m_2)\left(v_1^2+v_2^2\right)+\\ +2v_1v_2(m_1-m_2)\end{matrix}\right]\right\}}\,м.$$

2. Два шарика одинаковой массы m соединены пружиной жесткостью k и длиной L и лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий шарик массой m движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры первых двух, и упруго соударяется с одним из них (рис. 3).

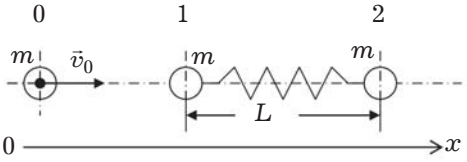


Рис. 3

Определите максимальное расстояние между шариками, соединёнными пружиной, при их дальнейшем движении. Считать, что время соударения шариков мало по сравнению со временем деформации пружины. Массой пружины пренебречь.

Дано: m, k, L. **Найти**: $L_{\max}$.

Решение. Закон сохранения импульса в проекции на ось Ox

$$mv_0 = mv_0' + mv_1, \qquad (1)$$

где v_0', v_1 – скорости шариков 0 и 1 после соударения.

Закон сохранения механической энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0'^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Решение системы уравнений (1)–(2) относительно v_0' и v_1: $v_0' = 0$, $v_1 = v_0$. После абсолютно упругого соударения шарик 0 остановился, а шарик 1 приобрёл скорость v_0.

Переходим в систему центра масс (рис. 4). Скорость центра масс (в проекции на ось Ox)

$$v_C = \frac{v_0 \cdot m + 0 \cdot m}{m+m} = \frac{v_0}{2}. \qquad (3)$$

Скорости шариков 1 и 2 относительно центра масс C

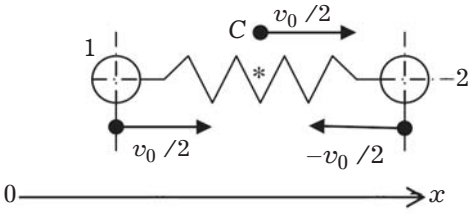


Рис. 4

$$v_{1\text{отн}} = v_0 - v_C = \frac{v_0}{2}, \qquad (4)$$

$$v_{2\text{отн}} = 0 - v_C = -\frac{v_0}{2}. \qquad (5)$$

Эти скорости шариков 1 и 2 максимальные (в этот момент пружина не деформирована).

Запишем закон сохранения энергии для двух положений: пружина не деформирована и пружина деформирована максимально (в это время шарики не движутся) с учётом теоремы Кёнига:

$$\frac{2mv_C^2}{2} + \frac{mv_{1\text{отн}}^2}{2} + \frac{mv_{2\text{отн}}^2}{2} = \frac{2mv_C^2}{2} + \frac{kx_{\max}^2}{2}. \qquad (6)$$

Решение системы уравнений (3)–(6) относительно величины максимальной деформации пружины $x_{\max}$:

$$2mv_0^2 = 4kx_{\max}^2 \Rightarrow x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Проверка единицы $x_{\max}$:

$$[x_{\max C}] = \frac{\text{м}}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{Н}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}}} = \text{м}.$$

Максимальное расстояние между шариками (максимальная длина пружины)

$$L_{\max} = L + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Ответ: $L_{\max} = L + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$ м.

3. Одному из двух шариков массой m каждый, лежащих на горизонтальной плоскости и соединённых недеформированной пружиной, ударом сообщают скорость v_0. Пружина лопается при растяжении, составляющем $\eta = 80\%$ максимально возможного в этом случае (рис. 5). С какой скоростью движутся шарики после

разрушения пружины? Трением и массой пружины пренебречь.

Дано: m, v_0, $\eta = 80\%$.

Найти: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.



Рис. 5

Решение. Запишем закон сохранения энергии в соответствии с теоремой Кёнига

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2mv_C^2}{2} + \frac{mv_{1\text{отн}}^2}{2} + \frac{mv_{2\text{отн}}^2}{2}, \qquad (1)$$

где скорость центра масс в проекции на ось Ox

$$v_C = \frac{v_0 m}{m+m} = \frac{v_0}{2}, \qquad (2)$$

относительные скорости шариков (относительно центра масс)

$$v_{1\text{отн}} = v_0 - v_C = \frac{v_0}{2}, \qquad (3)$$

$$v_{2\text{отн}} = 0 - v_C = -\frac{v_0}{2}. \qquad (4)$$

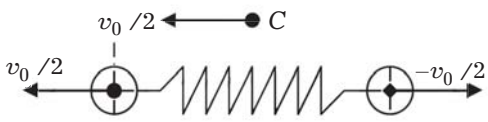


Рис. 6

Из представленной на рис. 6 схемы видно, что центр масс движется со скоростью $\vec{v}_0/2$, а шарики совершают относительно него гармонические колебания с равными по модулю скоростями $v_0/2$.

Запишем закон сохранения энергии для случая, когда пружина максимально растянута (шарики в это время неподвижны):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2mv_0^2}{2\cdot 4} + \frac{kx_{\max}^2}{2}, \qquad (5)$$

здесь k – жесткость пружины. Из (5) следует, что

$$x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}. \qquad (6)$$

Для случая, когда пружина лопается, растянувшись на 80% от максимально возможной деформации, закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4} + \frac{k(\eta x_{\max})^2}{2} + 2\frac{mv_{\text{отн}}^2}{2}, \qquad (7)$$

где $v_{\text{отн}}$ – скорости шаров относительно центра масс (модули их равны).

Из уравнения (7) с учётом (6) следует

$$v_{\text{отн}} = \frac{v_0}{2}\sqrt{1-\eta^2} = 0{,}3v_0.$$

В соответствии с законом сложения скоростей абсолютные скорости равны

$$v_1 = 0{,}3v_0 + v_C = 0{,}3v_0 + 0{,}5v_0 = 0{,}8v_0,$$
$$v_2 = -0{,}3v_0 + 0{,}5v_0 = 0{,}2v_0.$$

Ответ: $v_1 = 0{,}8v_0$ м/с, $v_2 = 0{,}2v_0$ м/с.

4. В горизонтально расположенной трубе могут без трения двигаться два поршня массами m_1 и m_2, между которыми содержится идеальный газ в количестве ν молей. Температура газа равна T_0. Поршням толчком сообщают скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, направленные навстречу друг другу (рис. 7). Найдите максимальную температуру газа $T_{\max}$, если его масса намного меньше массы поршней ($m \ll m_1, m \ll m_2$). Число степеней свободы молекулы газа равно i. Система теплоизолирована и находится в вакууме. Теплоёмкостью трубы и поршней пренебречь.

Дано: $m_1, m_2, \nu, T_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, m \ll m_1, m \ll m_2, i$.

Найти: $T_{\max}$.

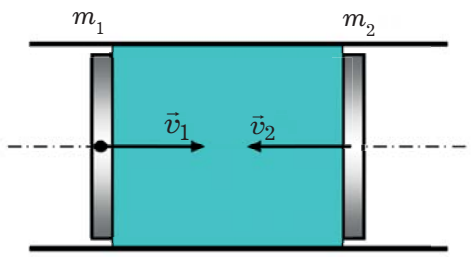


Рис. 7

Решение. Над газом совершается адиабатный процесс сжатия. Запишем первый закон термодинамики для адиабатного процесса:

$$0 = \Delta U - \Delta A. \qquad (1)$$

Здесь ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа, совершаемая над газом (знак минус означает, что работа совершается над газом).

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \nu \frac{i}{2} R(T_{\max} - T_0). \qquad (2)$$

Закон изменения механической энергии с учётом теоремы Кёнига:

$$\Delta E_{\text{K}} = -\Delta A, \qquad (3)$$

где изменение кинетической энергии в системе центра масс равно

$$\Delta E_{\text{K}} = E_{\text{K2}} - E_{\text{K1}}, \qquad (4)$$

$$E_{\text{K2}} = \frac{m_C v_C^2}{2}, \qquad (5)$$

$$E_{\text{K1}} = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{m_1 v_{1\text{отн}}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2\text{отн}}^2}{2}, \qquad (6)$$

масса центра масс

$$m_C = m_1 + m_2, \qquad (7)$$

скорость центра масс

$$v_C = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad (8)$$

относительные скорости (относительно центра масс) левого и правого поршней

$$v_{1\text{отн}} = v_1 - v_C = \frac{m_2(v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}, \qquad (9)$$

$$v_{2\text{отн}} = -v_2 - v_C = \frac{-m_1(v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}. \qquad (10)$$

Таким образом, в системе центра масс сам центр масс (точка C) движется со скоростью $\vec{v}_C$, а поршни относительно него движутся со скоростями $\vec{v}_{1\text{отн}}$ и $\vec{v}_{2\text{отн}}$ (рис. 8).

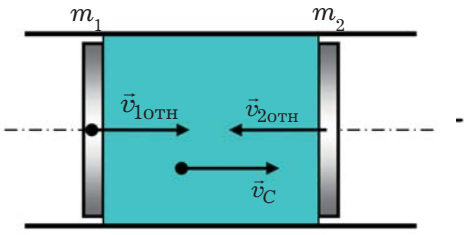


Рис. 8

Решение системы уравнений (3)–(10) относительно ΔA:

$$\Delta A = -\frac{m_c v_c^2}{2} + \frac{m_c v_c^2}{2} + \frac{m_1 v_{1\text{отн}}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2\text{отн}}^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ m_1 \frac{m_2^2 (v_1 + v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{m_1^2 (v_1 + v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \right\} =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2} \cdot \frac{(m_1 + m_2)(v_1 + v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Таким образом,

$$\Delta A = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (11)$$

Подставляя (11) и (2) в (1), получаем:

$$0 = \nu \frac{i}{2} R(T_{\max} - T_0) - \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \Rightarrow$$

$$T_{\max} = T_0 + \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{\nu i R (m_1 + m_2)}.$$

Проверка единицы:

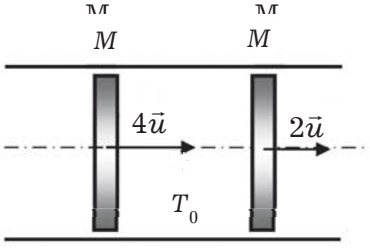
$$\left[\frac{m_1 m_2 (v_1+v_2)^2}{\nu i R (m_1+m_2)}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{с}^2\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{кг}} = \text{К}.$$

Ответ:

$$T_{\max} = T_0 + \frac{m_1 m_2 (v_1+v_2)^2}{\nu i R (m_1+m_2)} \text{ К}.$$

5. В длинной трубе между двумя поршнями массы M каждый находятся два моля идеального одноатомного газа при температуре T_0 (рис. 9). Масса газа много меньше массы поршней. В остальном пространстве трубы – вакуум. В начальный момент левый поршень имеет скорость $4u$, а правый – $2u$. Определите максимальную температуру газа $T_{\max}$ при дальнейшем движении поршней. Система теплоизолирована, теплоёмкостями поршней и трубы, а также трением пренебречь.

Дано: M, $i=3, \nu=2$, T_0, $m \ll M, 4u$, $2u$, $\Delta Q = 0$. **Найти**: $T_{\max}$.



Решение. Запишем первый закон термодинамики для адиабатного процесса:

$$0 = \Delta U - A. \qquad (1)$$

Здесь ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа, совершаемая над газом (знак минус означает, что работа совершается над газом).

Изменение внутренней энергии равно

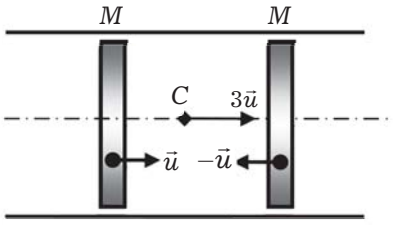


Рис. 10

$$\Delta U = \nu \frac{i}{2} R (T_{\max} - T_0). \qquad (2)$$

Закон изменения механической энергии с учётом теоремы Кёнига:

$$\Delta E_{\text{K}} = -A, \qquad (3)$$

где изменение кинетической энергии в системе центра масс равно

$$\Delta E_{\text{K}} = E_{\text{K2}} - E_{\text{K1}}, \qquad (4)$$

$$E_{\text{K2}} = \frac{m_C v_C^2}{2}, \qquad (5)$$

$$E_{\text{K1}} = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{M v_{1\text{отн}}^2}{2} + \frac{M v_{2\text{отн}}^2}{2}, \qquad (6)$$

масса центра масс

$$m_C = 2M, \qquad (7)$$

скорость центра масс

$$v_C = \frac{M\cdot 4u + M\cdot 2u}{M+M} = 3u, \qquad (8)$$

относительные скорости (относительно центра масс) левого и правого поршней

$$v_{1\text{отн}} = 4u - 3u = u, \qquad (9)$$

$$v_{2\text{отн}} = 2u - 3u = -u. \qquad (10)$$

Таким образом, в системе центра масс сам центр масс (точка C) движется со скоростью $3\vec{u}$, а поршни относительно него движутся со скоростями $\vec{u}$ и $-\vec{u}$ (рис.10).

Решение системы уравнений (3)–(10) относительно A:

$$A = Mu^2. \qquad (11)$$

Подставляя (11) и (2) в (1), получаем:

$$T_{\max} = T_0 + \frac{Mu^2 \cdot 2}{\nu i R} = T_0 + \frac{2Mu^2}{2 \cdot 3R} = T_0 + \frac{Mu^2}{3R}.$$

Проверка единицы:

$$\left[\frac{2Mu^2}{\nu i R}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{Дж}} = \text{К}.$$

Ответ: $T_{\max} = T_0 + \frac{Mu^2}{3R}$ К.

Список литературы

1. *Иванов А.Е., Иванов С.А.* Механика, молекулярная физика, термодинамика: учебник. – М.: Кнорус, 2012. – 950 с.
2. *Иванов А.Е.* Задачник по физике (механика, молекулярная физика, термодинамика): учебное пособие для поступающих в вузы. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.1: Механика. – М.: Наука, 1974. – 520 с.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Хвалебная ода Бору

Эта ода-шутка (ниже она приводится в сокращении) написана выдающимся российским физиком-теоретиком академиком Владимиром Александровичем Фоком:

***

Твои заслуги необъятны,
Твои писанья непонятны,
Тебя никто постичь не мог,
Тебя мудрее только Бог.
Ты сам творишь свои законы,
Тебе неведомы препоны,
Тебе механика - слуга,
Она смиренна и робка:
Бессилен всякий в ней закон,
Пока тобой не утверждён.

***

Твоею волею одной
Кружится электронов рой:
Она им выйти не велит
Из схематических орбит,
Твоим глаголам электрон
В священном ужасе внимает,
Дрожа от страха, излучает,
Свою орбиту покидает -
И на другую попадает,
Прыжок свой ловко рассчитав.

***

Ликуй же Бор! Ты победил,
Ты физиков всех с толку сбил.
Хвала тебе! Ты слово рек -
И одуревший человек
Уж полон верою в него,
Не понимая ничего.