

Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент,
организатор и руководитель
музея истории вычислительной техники
школы № 1530 «Школа Ломоносова» Москвы

120 лет головоломке «Разрезание Дьюдени»

1 февраля 1905 года в лондонской газете «Daily mail» была опубликована головоломка, в которой требовалось, разрезав равносторонний треугольник на четыре части, собрать из них квадрат. Она была предложена автором многих математических головоломок Генри Дьюдени (1857–1930). Позже эта головоломка вошла в книгу Дьюдени «Кентерберийские головоломки» [1] под названием «Задача галантерейщика». Один из героев книги — галантерейщик, достав кусок материи в форме равностороннего треугольника, говорит своим собеседникам: «Есть ли среди вас кто-нибудь, кому приходилось бы раскраивать материю? Побожусь, что нет. Каждый умеет что-то свое, и школяр может чему-нибудь поучиться у простолюдина, а мудрец у дурака. Покажите мне, если умеете, каким образом этот кусок материи можно разрезать на четыре части так, чтобы потом из них удалось составить правильный[1] квадрат».



Рис. 1 (иллюстрация из книги [1])

Конечно, в отличие от своего героя, который «после долгих увиливаний признался, что не умеет решать эту задачу ни для какого числа частей» [1], Дьюдени знал решение головоломки. Вот это решение (см. рис. 2): «Разделим AB пополам в точке D, а BC в точке E. Продолжим прямую AE до точки F так, чтобы EF равнялось EB. Разделим пополам AF в точке G и проведем дугу AHF. Продолжим EB до точки H; EH как раз и равно стороне искомого квадрата. Из E как из центра радиусом EH опишем дугу HJ и отложим отрезок JK, равный BE. Теперь из точек D и K

[1] Так в [1] — **Авт.**

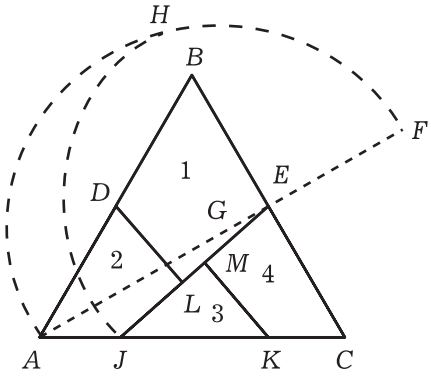

Рис. 2 (чертёж из книги [2], основанный на книге [1])

опустим перпендикуляры на *EJ* с основаниями в точках *L* и *M*» [1–2].

Разрезав треугольник вдоль отрезков *JE*, *DL* и *KM*, из полученных частей 1, 2, 3, 4, можно собрать квадрат (рис. 3)[2].

К сожалению, ни Дьюдени, ни Мартин Гарднер, автор книги [2], первым рассказавший о творчестве Генри Дьюдени и об обсуждаемой головоломке [3], не приводят подтверждения того, что в результате указанного разделения треугольника и сборки его частей полученная фигура будет прямоугольником с равными сторонами. Нам не удалось обнаружить такое доказательство и в современных публикациях. Приведём его.

После построений, представленных на рис. 4, отрезок *EH* будет являться стороной искомого квадрата. Дело в том, что сторона *b* этого квадрата связана со стороной *a* заданного треугольника следующим образом: $b=\frac{a}{2}\sqrt[4]{3}$. Эту зависимость можно представить так: $\sqrt{\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\sqrt{3}}$, то есть в виде среднего пропорционального $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Построения Дьюдени как раз и соответствуют известному построению среднего пропорционального отрезков (см., например, [4]), длины которых равны указанным значениям (*AE* и *EF*).

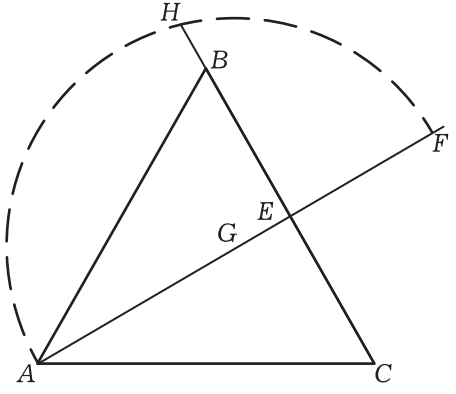

Рис. 4

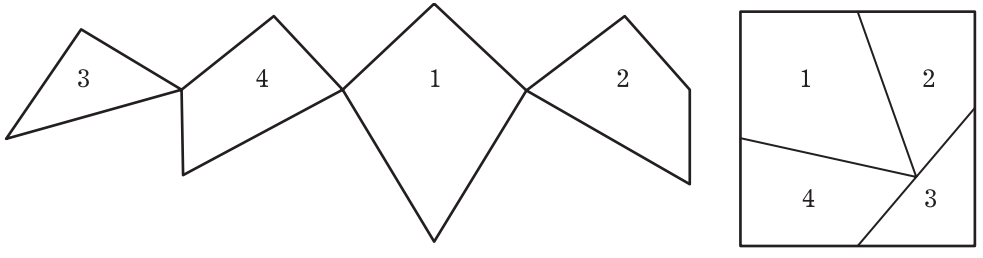

Рис. 3 (иллюстрации из книги [2])

[2] Эффектная анимация, иллюстрирующая преобразование фигур, представлена по адресу https://habr.com/ru/articles/900096

При дальнейших построениях $EJ = EH = b$.

Сравним исходный треугольник с полученной согласно рис. 2–3 фигурой (см. рис. 5).

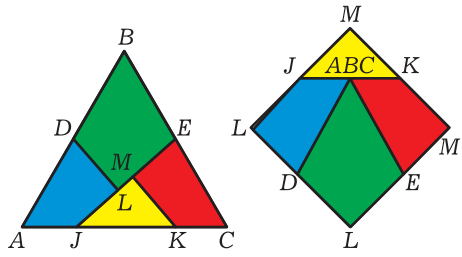

Рис. 5

Прежде всего, обратим внимание на то, что в полученной фигуре углы в точках L и M — прямые по построению.

Докажем, что на рис. 5 справа сумма отрезков, образующих каждую сторону фигуры, равна b:

1) $2KM = b$;

2) $2DL = b$;

3) $LJ + JM = b$;

4) $ME + EL = b$.

Доказательство

1) $\sin(EJC) = \dfrac{\frac{a}{4}\sqrt{3}}{b} = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{3}$.

В прямоугольном треугольнике JMK: $KM = JK \times \sin(EJC) = \dfrac{a}{2} \times \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{3} = \dfrac{a}{4}\sqrt[4]{3} = \dfrac{b}{2}$. Значит, $2KM = b$.

2) Прямоугольные треугольники DEL и JMK равны, следовательно $DL = KM = \dfrac{b}{2}$, то есть $2DL = b$.

3) Из отмеченного равенства треугольников DEL и JMK следует, что $JM = EL$, следовательно, $JL = ME$. Так как $JM + ME = b$, то и $JM + JL = b$.

4) Так как $EL + LJ = b$, а $LJ = ME$ (см. чуть выше), то и $EL + ME = b$.

После этих доказательств начнём собирать новую фигуру так, как показано на рис. 3.

Совместим вырезанные части 4 и 3 исходного треугольника. Для наглядности расположим часть 4 так, что её прямой угол будет слева внизу (см. рис. 6) и приложим к ней часть 3. Сумма углов в точке K равна 180° (это следует из рис. 5 слева). Так как $MK + KM = b$, то отрезок MM равен стороне искомого квадрата.

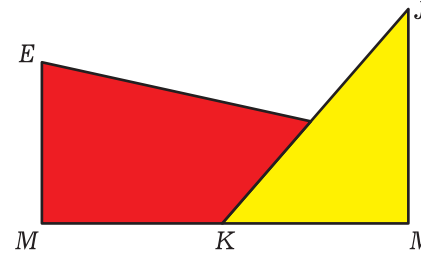

Рис. 6

Приставим к части 4 часть 1 (рис. 7).

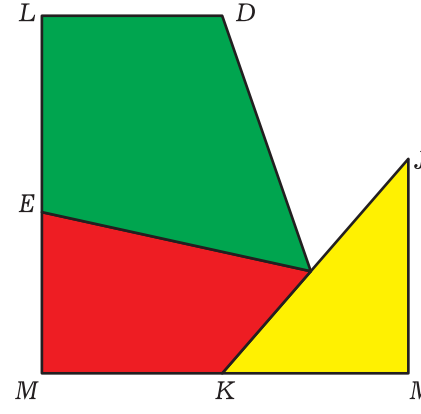

Рис. 7

Поскольку сумма углов в точке E равна 180° (это также следует из

рис. 5 слева), а $EL + ME = b$, то отрезок ML является второй стороной искомого квадрата.

Далее, так как $LD + DL = b$ и $MJ + JL = b$, то при добавлении к фигуре на рис. 7 части 2 треугольника точка L синей части будет вершиной искомого квадрата (рис. 8).

Итак, вся фигура на рис. 5 справа — действительно квадрат!

Автор уверен — читатели согласятся с существующим мнением, что описанная головоломка, которую называют «Разрезание Дьюдени», относится к лучшим математическим головоломкам всех времён...

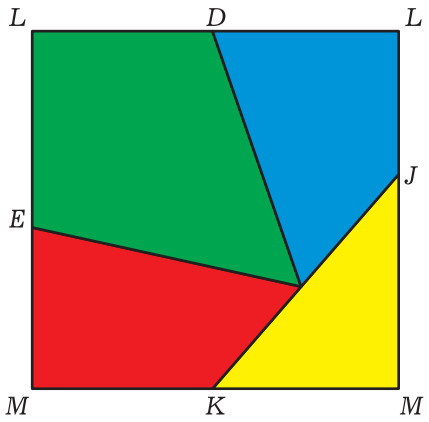

Рис. 8

Литература

1. Дьюдени Г. Э. Кентерберийские головоломки / Перевод с английского Ю.Н. Сударева. М.: Мир, 1979.
2. Мартин Гарднер. Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1999.
3. Martin Gardner. About Henry Ernest Dudeney, a brilliant creator of puzzles (О Генри Эрнесте Дьюдени, гениальном создателе головоломок) // Scientific American, Vol. 96, № 6 (June 1958).
4. Среднее геометрическое // РУВИКИ. https://ru.ruwiki.ru/wiki/Среднее_геометрическое.

КАЛЕЙДОСКОП

Задачи о квадратах

Задача 1 «Координаты вершин квадрата»

Известны координаты на координатной плоскости концов одной из диагоналей квадрата — (3, 4) и (7, 10).

Какие координаты у вершин, которые соединяет другая диагональ? Ответьте на вопрос, не проводя построения на клетчатой бумаге.

Задача 2 «Квадрат ли это?»

На бумаге отмечены четыре точки. Как за наименьшее число операций установить, являются ли они вершинами квадрата? Операциями считать:

- построение отрезков;
- измерение отрезков;
- измерение углов.

Для измерения угла должны быть построены оба его луча.

Задачи и ответы представил Митрофан Днепровский

Ответы на стр. 64