

МАТЕМАТИКА • ФИЗИКА • ИНФОРМАТИКА

# ПОТЕНЦИАЛ

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ И УЧИТЕЛЕЙ

№2•2022



**ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ  
МЕХАНИКИ. МЕТОД ВИРТУАЛЬНЫХ  
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

**МОЛНИИ НАД ОБЛАКАМИ**

**О ВЫЧИСЛЕНИИ СУММ ЭЙЛЕРА**

SAPERE AUDE – ДЕРЗАЙ ЗНАТЬ!

ISSN 1814-6422

**12+**

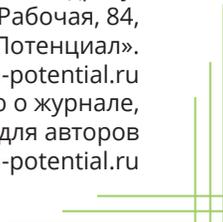


# ДОРОГИЕ ЧИТАТЕЛИ!

Вы держите в руках журнал «Потенциал», ежемесячный физико-математический журнал для старшеклассников и учителей. Целью журнала является популяризация физико-математических наук, привлечение молодых людей к изучению физики, математики и информатики и повышение качества физико-математического образования. Мы верим, что интерес к точным наукам закладывается не только до школы, но и непосредственно во время процесса обучения, и целью школьного образования является развитие и удержание этого интереса. Материалы нашего журнала направлены на развитие знаний старшеклассников и на помощь учителям в подборе примеров и тем для уроков и дополнительных занятий. Журнал является площадкой для педагогов школ и преподавателей вузов, с помощью которой можно делиться своими знаниями с коллегами, старшеклассниками и заинтересованными наукой читателями.

Мы ждём новых авторов, которые поддерживают наш взгляд на образование, стремятся развиваться и развивать окружающих!

Вся переписка с редакцией осуществляется по адресу:  
109544, г. Москва, ул. Рабочая, 84,  
редакция журнала «Потенциал».  
Тел.: 8 (495) 743-29-02, e-mai: editor@edu-potential.ru  
Всю дополнительную информацию о журнале,  
а также рекомендации для авторов  
вы найдете на нашем сайте [www.edu-potential.ru](http://www.edu-potential.ru)



**В ЭТОМ НОМЕРЕ****СКВОЗЬ ВРЕМЯ**

- 2** Диалоги об истории науки и инженерии.  
Диалог 17. Двигатели человечества:  
часть II — от механических к тепловым.  
*С.Е. Муравьёв, А.С. Ольчақ, С.В. Генисаретская*

**ЗАГАДОЧНЫЙ МИР**

- 13** Молнии над облаками. *Т.И. Морозова*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК**

- 22** О вычислении сумм Эйлера. *Ю.В. Нестеренко*

**ФИЗИКА**

- 36** Вариационные принципы механики.  
Метод виртуальных перемещений.  
*М.Ю. Замятнин, А.Ю. Вергунов*
- 53** О некоторых физических понятиях и законах.  
*А.И. Киркинский*

**ИНФОРМАТИКА**

- 58** Переводим псевдокод, или Решение задачи № 12  
ЕГЭ по информатике на обработку строк.  
*В.С. Попов*

**ПРИРУЧАЕМ КОМПЬЮТЕР**

- 63** Методы скрытия данных в Excel.  
*Е.Т. Вовк*

**ДЕМОНСТРАЦИИ И ОПЫТЫ**

- 69** Развиваем физическое мышление свое и своих  
одноклассников. *В.В. Майер, Е.И. Вараксина*

**ОЛИМПИАДЫ**

- 78** Ответы на вопросы 18-й Международной  
естественнонаучной олимпиады юниоров  
(IJSO-2021)

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ****Председатель совета**

Н.Н. Кудрявцев

**Редакционный совет**

М.Н. Стриханов, Д.В. Ливанов,  
А.Е. Жуков, В.Н. Чубариков,  
И. А. Соколов, А.С. Чирцов,  
Н.Д. Кундикова, В.Н. Задков,  
В.Т. Корнеев, Г.А. Четин

**РЕДКОЛЛЕГИЯ**

Главный редактор В.Н. Задков  
Зам. главного редактора  
по физике В.И. Чивилев  
Зам. главного редактора  
по информатике Е.Т. Вовк

**Редакторы**

С.Б. Гашков, С.И. Колесникова,  
А.А. Лукьянов, А.В. Михалёв,  
С.Е. Муравьёв, Т.С. Пиголкина,  
И.Н. Сергеев, В.П. Слободянин,  
М.В. Федотов

**Ответственный секретарь**

М.В. Гребенникова

**Шеф-редактор**

Г.А. Четин

**ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕДАКЦИЯ**

Верстка С.А. Кудасова

Журнал зарегистрирован  
Федеральной службой по надзору  
за соблюдением законодательства  
в сфере массовых коммуникаций  
и охране культурного наследия.  
Свидетельство о регистрации  
СМИ ПИ № ФС 77-19521  
от 17 февраля 2005 года.  
Адрес: 109544, г. Москва,  
ул. Рабочая, 84,  
редакция журнала «Потенциал».  
Тел. (495) 970-04-17  
E-mail: editor@edu-potential.ru  
Подписано в печать 02.03.2022  
Отпечатано в типографии  
«Азбука-2000».  
Печать офсетная. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 5. Формат 70x100<sup>1</sup>/16.  
Тираж 500 экз. Заказ №000.  
Учредитель ООО «Азбука-2000»,  
109544, г. Москва, ул. Рабочая, 84.

Журнал издаётся на средства  
выпускников технических вузов.

ISSN 1814-6422

© «Потенциал», 2005 – 2022

**Светлана Владимировна Генисаретская**  
Заместитель директора института  
Лазерных и плазменных технологий НИЯУ МИФИ



**Сергей Евгеньевич Муравьев**  
Доцент, заведующий кафедрой  
теоретической ядерной физики НИЯУ МИФИ,  
кандидат физико-математических наук

**Андрей Станиславович Ольчак**  
Доцент кафедры общей физики НИЯУ МИФИ,  
кандидат физико-математических наук



## Диалоги об истории науки и инженерии Диалог 17. Двигатели человечества: часть II – от механических к тепловым

В форме живого диалога авторы рассказывают о замечательном изобретении человечества - тепловом двигателе. Без двигателя не ездили бы на Земле автомобили, не ходили бы поезда, не летали бы самолёты. Двигатели являются инженерной основой нашей жизни. И первым «научноёмким» изделием, которое стало тиражироваться на Земле в огромном количестве экземпляров. Этим рассказом авторы продолжают серию статей об истории науки, техники и технологий, публиковавшихся в течение нескольких последних лет в журнале «Потенциал».

**С.Е. Муравьев.** Итак, первые тепловые двигатели работают, помогают человечеству. Но нет теории двигателя. Как он совершает работу? Почему один двигатель очень-очень-очень неэкономичный, а дру-

гой – только очень. Какой параметр двигателя нужно изменить, чтобы увеличить эффективность двигателя? И что такое – эффективность? Все эти вопросы ждали своих ответов. Нужна была теория двигателя.

**А.С. Ольчак.** Конечно, нет ничего практичнее хорошей теории. Теорию теплового двигателя в начале XIX века построил французский физик Сади Карно. Но он, как я знаю, использовал совсем другую аргументацию и даже терминологию, чем те, что использует современная физика. Может быть, имеет смысл сначала напомнить читателям современную теорию теплового двигателя, а потом уже вернуться в начало XIX века и рассказать о Сади Карно?

**С.В. Генисаретская.** Про Карно нужно рассказать обязательно, ведь таких физиков, как Карно, можно посчитать по пальцам одной руки.

**С.М.** Согласен. Но сначала давайте расскажем о теории двигателя. Начнём с того, что механическая работа в тепловых машинах, как правило, совершается газом, который помещается в некоторый цилиндрический сосуд с поршнем (называемый просто цилиндром). При нагревании газа (его иногда называют рабочим телом двигателя) повышается его давление, он толкает поршень и совершает полезную механическую работу, вращая через систему передач колеса автомобиля, двигая пилу лесопилки, резец станка и т.д. При реализации теплового двигателя в циклическом режиме рабочее тело после совершения цикла возвращается к своему начальному состоянию и, следовательно, не теряет своей внутренней энергии. Энергию на совершение работы надо откуда-то взять. Для этого нужно ещё одно тело – нагреватель двигателя. Согласно закону сохранения энергии для того, чтобы газ совершил за цикл работу  $A$ , он должен как минимум такое же (или боль-

шее) количество теплоты  $Q_n \geq A$  получить от нагревателя.

**А.О.** Фактически, двигатель превращает в работу тепловую энергию, получаемую от нагревателя. Причём, чтобы двигатель работал в циклическом режиме, рабочее тело нужно периодически сжимать, возвращая в начальное состояние и совершая «не полезную» работу.

**С.М.** Да, без этого никак не обойдётся. И на это придётся потратить часть полученной от нагревателя энергии  $Q_n$ . Важно, чтобы работа по сжатию рабочего тела была меньше работы самого рабочего тела при его расширении. Тогда часть полученной от нагревателя за цикл внутренней энергии будет преобразована в работу полезную.

**С.Г.** А как это сделать технически?

**С.М.** Для этого нужно ещё одно тело – «холодильник». Нужно охладить рабочее тело после расширения. Тогда уменьшится его давление, и мы сможем сжать рабочее тело, совершая небольшую работу.

**С.Г.** Холодильник? Мне кажется, у нас в машинах холодильника нет...

**С.М.** Холодильником двигателя, Светлана Владимировна, называют любое тело с температурой, меньшей температуры нагревателя, функция которого отобрать тепло у рабочего тела и понизить его температуру, т.е. сделать так, чтобы работа по сжатию была меньше работы расширения.

**А.О.** Сергей Евгеньевич, мне кажется, что вопрос соотношения работ – полезной и неполезной – станет более понятен, если проиллюстрировать его графиками происходящих с рабочим телом процессов.

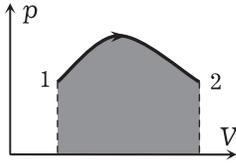


Рис. 1

**С.М.** Согласен... Давайте посмотрим на график зависимости давления газа от его объема  $p(V)$ , площадь под которым численно равна работе, совершённой газом, причём со знаком «+», если газ расширяется, и со знаком «-», если газ сжимается. Процесс 1-2 на рис. 1 соответствует расширению газа и совершению им положительной работы, которая равна площади под графиком (тёмная «заливка»).

**А.О.** Какой-то вы непростой процесс нарисовали, Сергей Евгеньевич. Известный из школьного курса физики закон Клапейрона-Менделеева

$$pV = \nu RT \quad (1)$$

говорит, что произведение давления и объема газа  $pV$  при неизменном количестве вещества  $\nu$  (числа молей) пропорционально его абсолютной температуре  $T$  ( $R$  – универсальная газовая постоянная). Похоже, в этом процессе что-то не так... Как организовать такой процесс?

**С.М.** Реализовать такой процесс можно, закрыв газ в некотором цилиндрическом сосуде подвижным поршнем, и проводить процесс медленно, чтобы давление газа в сосуде равнялось внешнему давлению. Его нужно сначала увеличивать, потом уменьшать, одновременно нагревая газ, причём тепло нужно подводить с разной скоростью на разных участках процесса.

Теперь посмотрим на рис.2, где показан процесс 2-1, в котором газ

сжимают, и он возвращается в начальное состояние 1. График рис.2 проходит ниже графика процесса расширения на рис.1. Поскольку газ в этом процессе сжимается, его работа отрицательна и равна (со знаком «минус») площади под графиком процесса (более светлая «заливка»).

Складывая эти две работы, заключаем, что работа газа в процессе 1-2-1 положительна и равна площади цикла на графике  $p(V)$  (рис. 3; площадь цикла выделена тёмной «заливкой»).

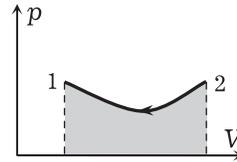


Рис. 2

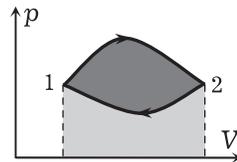


Рис. 3

**С.Г.** А как провести сжатие, чтобы график этого процесса шёл ниже, чем график расширения?

**С.М.** Мы уже говорили, что нужно охладить газ. Согласно закону (1), чем ниже температура газа, тем меньше его давление при равных объемах и тем ниже расположен график процесса. Итак, перед сжатием мы должны газ охладить, для чего и нужен холодильник.

**А.О.** Но ведь это же потери! Смотрите, мы сжигали топливо, чтобы получить работу, а... нагрели холодильник, потеряв тепло, полученное при сжигании.

**С.М.** Да. Но иначе мы не сможем организовать циклический процесс. В результате работа газа определяется разностью количества тепла, полученного от нагревателя  $Q_n$ , и количества тепла, отданного холодильнику  $Q_x$ , т.е. она всегда меньше тепла, которое мы получили, сжигая топливо:

$$A = Q_n - Q_x, \quad (2)$$

Именно тепло, отданное холодильнику (формально потерянное с точки зрения совершения работы), и обеспечивает саму возможность совершения двигателем полезной работы.

**С.Г.** А какова доля отданной теплоты в первых двигателях Ньюкомена и Уатта?

**С.М.** До 95-97 % от количества тепла, которое давало топливо...

**С.Г.** Т.е. подавляющая доля энергии топлива уходила на обогрев холодильника?

**А.О.** Да, и это не случайные, а запланированные потери – иначе не удавалось замкнуть цикл.

**С.М.** Да, именно так. И современные тепловые двигатели тоже теряют энергию, но, конечно, не в таких количествах, как первые двигатели Ньюкомена и Уатта. Причём и Уатт, и Ньюкомен понимали, что потери есть, но не понимали их природы и не умели оценить их количественно.

**А.О.** И кто разобрался в источнике потерь теплового двигателя?

**С.М.** Первые шаги в этом направлении сделал все-таки Джеймс Уатт. Он понял, что основной источник потерь в двигателе – конденсация пара, и стал проводить её в отдельном резервуаре (конденсаторе) чтобы не охлаждать сам цилиндр двигателя. Он вообще очень близко

подошёл к определению коэффициента полезного действия (КПД) двигателя. Но окончательно всё понял и объяснил на полвека позже Сади Карно.

**А.О.** Как же определяется КПД теплового двигателя?

**С.М.** На основе здравого смысла. Превратить всё тепло, взятое у нагревателя, в работу двигатель не может. Поэтому экономичность двигателя определяется тем, какую часть тепла, полученного у нагревателя, двигатель превращает в работу, а какую часть теряет, отдавая холодильнику. Поэтому экономичность двигателя определяется величиной

$$\eta = \frac{A}{Q_n} = \frac{Q_n - Q_x}{Q_n}, \quad (3)$$

которую мы и называем коэффициентом полезного действия. Чем больше КПД двигателя, тем эффективнее он превращает энергию топлива в работу и, следовательно, является более экономичным.

**С.Г.** Я думаю, определение КПД понятно. Но давайте разберём какие-нибудь примеры с вычислением КПД, чтобы наши читатели лучше поняли и принципы работы теплового двигателя, и логику определения этой величины.

**С.М.** Давайте. Для этого нам понадобится термодинамический закон сохранения энергии – первое начало термодинамики, устанавливающий, что полученная телом теплота  $Q$  идёт на изменение его внутренней энергии  $\Delta U$  и на совершение им механической работы  $A$ :

$$Q = \Delta U + A, \quad (4)$$

а также уже упоминавшийся закон Клапейрона-Менделеева (1) и формула, определяющая зависимость

внутренней энергии  $U$  идеального газа от температуры  $T$ :

$$U = C\nu RT, \quad (5)$$

где  $C$  – числовой коэффициент. Определение этого коэффициента достаточно нетривиально для газов, состоящих из сложных молекул, но для одноатомных газов это число равно  $3/2$ . Чтобы не лезть в дебри анализа движения многоатомных молекул, будем считать, что в нашем примере используется именно одноатомный газ.

Я думаю, все наши читатели с помощью хорошо им известных законов (1), (4), (5) легко смогут проследить за этим анализом. Итак, пусть с одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс 1-2-3-4-1, график которого в координатах «давление-объём» показан на рис. 4. Процессы 1-2, 3-4 являются изохорическими (происходят при неизменном объёме газа), процессы 2-3, 4-1 – изобарическими (происходят при неизменном давлении). На рисунке указаны значения давления и объёма газа в разных точках цикла. Найдём КПД данного процесса. Как бы вы действовали, Андрей Станиславович?

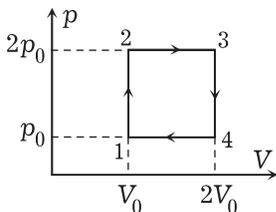


Рис. 4

**А.О.** Я думаю, надо найти работу газа за цикл, определить, на каких участках процесса газ получал тепло от нагревателя, и найти его коли-

чество, а далее использовать определение КПД.

**С.М.** Абсолютно верно. Так и сделаем. Работа газа за цикл равна площади цикла в координатах «давление-объём»  $p-V$ . Для данного цикла

$$A = p_0 V_0. \quad (6)$$

Далее рассмотрим каждый из процессов 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 и ответим на вопрос, получал газ тепло в этом процессе или отдавал.

Изохорическое нагревание 1-2. Поскольку растёт произведение  $pV$ , которое по закону Клапейрона-Менделеева (1) пропорционально температуре, растёт и температура газа. Следовательно, растёт его внутренняя энергия  $U$ . А работу газ не совершает, поскольку не меняется его объём. Поэтому из первого закона термодинамики для этого процесса

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2} \quad (7)$$

( $Q_{1-2}$ ,  $\Delta U_{1-2}$  и  $A_{1-2}$  – количество полученной теплоты, изменение внутренней энергии и работа газа в процессе 1-2), следует, что  $Q_{1-2} > 0$ , поскольку

$$\Delta U_{1-2} > 0, \text{ а } A_{1-2} = 0. \quad (8)$$

Поскольку количество теплоты, полученное газом, положительно, то согласно правилам термодинамики газ получал тепло. От какого-то тела. Это и есть нагреватель. Аналогично,

$$Q_{2-3} > 0, \quad Q_{3-4} < 0, \quad Q_{4-1} < 0, \quad (9)$$

т.е. газ получает тепло от нагревателя в процессах 1-2 и 2-3, и отдаёт тепло холодильнику в процессах 3-4 и 4-1. Применим теперь к процессу получения тепла первое начало термодинамики

$$Q_H = Q_{1-2-3} = \Delta U_{1-2-3} + A_{1-2-3}. \quad (10)$$

Изменение внутренней энергии газа в процессе 1-2-3 можно найти как

$$\Delta U_{1-2-3} = U_3 - U_1 = \frac{3}{2} \nu R T_3 - \frac{3}{2} \nu R T_1 = \frac{3}{2} ((pV)_3 - (pV)_1) = \frac{9}{2} p_0 V_0, \quad (11)$$

где  $T_3$  и  $T_1$  – температуры газа в состояниях 3 и 1,  $(pV)_3 = 4p_0 V_0$  и  $(pV)_1 = p_0 V_0$  – произведения давления газа на его объём в состояниях 3 и 1.

Работу газа в процессе 1-2-3 найдем как площадь под графиком процесса 1-2-3

$$A_{1-2-3} = 2p_0 V_0. \quad (12)$$

Из (10), (11) и (12) находим количество теплоты, полученное газом от нагревателя:

$$Q_n = \frac{9}{2} p_0 V_0 + 2p_0 V_0 = \frac{13}{2} p_0 V_0. \quad (13)$$

Итак, в течение нашего циклического процесса газ получил от нагревателя количество теплоты  $Q_n = 13p_0 V_0 / 2$ , а совершил работу  $A = p_0 V_0$ . Следовательно, КПД рассматриваемого процесса

$$\eta = \frac{2}{13}. \quad (14)$$

**С.Г.** Получается, что только 2/13 части количества теплоты, полученной от нагревателя, превращаются в рассматриваемом процессе в работу (около 15 %). А куда делись оставшиеся 11 из 13 частей?

**С.М.** Отданы холодильнику в процессах 3-4 и 4-1, т.е. потеряны с точки зрения совершения механической работы. Кстати, в том, что именно такое количество теплоты отдано холодильнику в цикле, несложно убедиться и непосредственным вычислением. Я думаю, повто-

ря логику нашего рассмотрения для процессов 3-4-1, наши читатели могут сами легко убедиться, что тепло, отданное холодильнику, составляет

$$Q_x = -Q_{3-4-1} = -(\Delta U_{3-4-1} + A_{3-4-1}) = -\left(-\frac{9}{2} p_0 V_0 - p_0 V_0\right) = \frac{11}{2} p_0 V_0. \quad (15)$$

**А.О.** А почему здесь знак «-»?

**С.М.** Согласно правилам термодинамики *отданное* тепло есть «минус» тепло *полученное*. А используемое нами первое начало термодинамики (4) написано для полученного тепла.

**А.О.** Сергей Евгеньевич, я думаю, у многих наших читателей возник вопрос: а как увеличить КПД? Например, расширять газ не в два раза, а в три? Или взять цикл не в виде прямоугольника в координатах  $p-V$ , а его половинку, как это показано на рисунке 5?

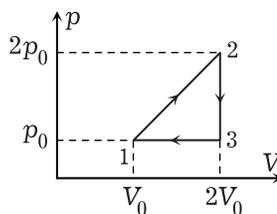


Рис. 5

**С.М.** Конечно, мы могли бы по тем же правилам найти КПД и для этого процесса. А можем поступить хитрее, сравнив этот цикл с предыдущим. Поскольку площадь этого цикла вдвое меньше площади цикла, данного на рис. 4, то работа газа в рассматриваемом цикле  $A_1$  вдвое меньше работы (6) –  $A_1 = A / 2$ . Отметим также, что процессы 3-4-1 на

рис. 4 и 2-3-1 на рис. 5, в которых газ отдаёт тепло холодильнику, абсолютно одинаковы. Поэтому от нагревателя газ получает в этих процессах следующие количества теплоты

$$Q_n = A + Q \quad (\text{в процессе рис. 4}) \quad \text{и}$$

$$Q_{n,1} = \frac{A}{2} + Q \quad (\text{в процессе рис. 5}), \quad (16)$$

где  $Q$  – количество теплоты, отданное газом холодильнику в этих процессах. Отсюда заключаем, что КПД циклов, данных на рисунках 4 и 5 ( $\eta$  и  $\eta_1$  соответственно), равны:

$$\eta = \frac{A}{Q_n} = \frac{A}{A+Q},$$

$$\eta_1 = \frac{A/2}{Q_{n,1}} = \frac{A/2}{A/2+Q}. \quad (17)$$

Выражая из первой формулы (19) отношение  $A/Q$  и подставляя его во вторую, получим для КПД процесса, данного на рисунке 5:

$$\eta_1 = \frac{\eta}{2-\eta} = \frac{1}{12}, \quad (18)$$

т.е. почти в два раза меньше, чем в процессе, данном на рисунке 4.

**С.Г.** Этот вывод я поняла. А в каком цикле КПД ещё больше? Есть ли у нас какая-то «путеводная нить», как получить цикл с максимальным КПД? Из ваших рассуждений я этого не увидела.

**С.М.** Эту «путеводную нить» дал нам Сади Карно, который построил цикл с максимальным КПД для заданных нагревателя и холодильника. Этот цикл называется сейчас циклом Карно, и он даёт нам рецепт увеличения КПД двигателя – делай цикл, максимально приближенным к циклу Карно, и ты будешь увеличивать КПД двигателя.

**С.Г.** А как устроен цикл Карно?

**С.М.** Давайте поговорим об этом в диалоге, посвященном Сади Карно. Сейчас скажу только, что максимальный КПД теплового двигателя, работающего с нагревателем с абсолютной температурой  $T_n$  и холодильником с абсолютной температурой  $T_x$ , определяется соотношением

$$\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_n - T_x}{T_n}. \quad (19)$$

**С.Г.** И ещё у меня есть один глупый вопрос. А нельзя ли придумать цикл вообще без холодильника? Например, заставим газ охлаждаться за счет совершения работы, а потом будем сжимать его. Кто-то пытался так сделать?

**С.М.** «Глупых вопросов» не бывает, так же как и двигателя без холодильника, как это доказал Карно. Его главная идея заключалась в том, что для совершения работы нам обязательно нужна неравновесность. Если, например, давление и температура будут везде одинаковы, то невозможно заставить кого-то двигаться. Или, другими словами, для превращения внутренней энергии в механическую нужна разность температур. Нагреватель и холодильник! Карно сформулировал это утверждение как технический принцип невозможности двигателя без холодильника, а он оказался удивительным законом природы, который показывает возможное направление тепловых процессов и который сейчас называется вторым началом термодинамики.

**А.О.** Коллеги, я хочу более подробно прокомментировать эти слова Сергея Евгеньевича. Пусть у нас есть только нагреватель, но нет холодильника. В нем запасено огром-

ное количество внутренней энергии – много молекул, и все они движутся. Но получить из этой энергии механическую энергию движения какого-то макроскопического тела – невозможно. Если же холодильник есть, мы можем получить механическую работу, но... В работу можно превратить не всю энергию, взятую у нагревателя, а только её часть. Вторая часть останется внутренней и будет передана холодильнику. При этом – важно! – нагреватель охладится, холодильник нагреется, что уменьшит наши возможности получить работу в дальнейшем. Таким образом, превратить внутреннюю энергию какого-то тела ЦЕЛИКОМ в работу в циклическом процессе невозможно. Только частично. При этом обратный процесс превращения механической энергии целиком во внутреннюю энергию возможен. Бросьте тело на землю, оно немножко попрыгает и остановится. Куда делась механическая энергия тела? Целиком перешла во внутреннюю.

**С.М.** Да, вы абсолютно правы. Второе начало термодинамики «стоит между» макроскопическим (механическим) и микроскопическим (внутренним) движением и говорит о том, что они разные. И то, и то – движение, и то, и то – энергия. И внутренняя, и механическая энергии измеряются в джоулях, они обе входят в первое начало термодинамики. Но они разные! Механическую энергию можно целиком превратить во внутреннюю, внутреннюю в механическую – только частично.

**С.Г.** А в чём же разница между ними? Ведь внутренняя энергия – это тоже механическая энергия движения молекул. Ну, маленькие они, ну и что...

**С.М. и А.О.** Внутреннее движение хаотично! И целиком убрать эту хаотичность мы не можем. Вообще, второе начало термодинамики оказалось гораздо более глубоким утверждением, чем утверждение о невозможности двигателя без холодильника. Это соотношение между микро- и макро-, хаотическим и регулярным, беспорядком и порядком. Уже двести лет мы пытаемся понять его, но до конца так и не поняли...

**С.Г.** И как тепловой двигатель работает не понимаем?

**С.М. и А.О. (смеются).** Нет. После Уатта и Карно мы хорошо это понимаем. Более того, мы понимаем, что все рассмотренные выше процессы позволяют нам не только совершать работу за счет внутренней энергии нагревателя, но и дают другие удивительные возможности.

**С.Г.** Вы имеете в виду холодильники и тепловые насосы?

**С.М.** Да, именно их. Давайте, например, проведём процесс, показанный на рисунке 4, в обратном направлении (рис. 6). В этом цикле происходят процессы, обратные процессам, показанным на рисунке 4. В процессе (рис. 4) нагреватель (горячее тело) передает количество теплоты  $Q_n$  рабочему телу, которое совершает работу  $A$ , и отдаёт количество теплоты  $Q_x = Q_n - A$  холодильнику (холодному телу). А здесь

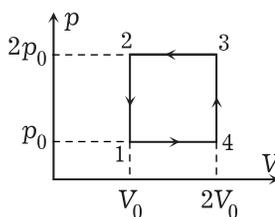


Рис. 6

все наоборот: холодильник отдаёт количество теплоты  $Q_x$  рабочему телу, внешние силы совершают над рабочим телом работу  $A$ , нагреватель получает теплоту  $Q_n = A + Q_x$ . Эти процессы можно проиллюстрировать рис. 7а, на котором стрелками показаны пути движения энергии от нагревателя рабочему телу, от рабочего тела – холодильнику, и совершение работы рабочим телом над внешними телами. А в обратном процессе все эти пути развернутся (рис. 7б).

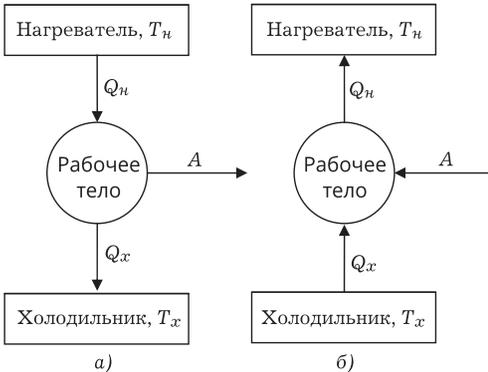


Рис.7. Принципиальные схемы тепловой машины (а), бытового холодильника и теплового насоса (б)

**А.О.** Смотрите, Светлана Владимировна. Допустим, вы хотите сделать бытовой холодильник. Тело, которое поддерживается при температуре, меньшей температуры среды, и которое благодаря теплообмену непрерывно получает теплоту от среды. Как поддерживать такое тело при низких температурах? Ведь у него нужно забирать теплоту и передавать её окружающей среде с

более высокой температурой? Так, как показано на рисунке 7б.

**С.М.** Но это ещё не всё. Представьте, что у вас в комнате  $20^\circ\text{C}$ , а на улице –  $-20^\circ\text{C}$ . А можно ли отапливать комнату за счёт передачи теплоты с улицы? Ведь, несмотря на то, что там холодно, у холодного воздуха есть внутренняя энергия. Прибор, осуществляющий такую передачу, называется тепловым насосом.

**С.Г.** Да, внутренняя энергия на улице действительно есть. Но её невозможно передать в комнату, ведь теплота передается от горячего к холодному.

**А.О.** Можно! Если совершить работу. Проведите процесс, как это показано на рисунке 7б. И вы передадите тепло от «холодильника» (холодной улицы) «нагревателю» (тёплому дому). В результате дом получит тепло от холодной улицы, и совершённая работа тоже пойдёт на его нагревание.

**С.Г.** Т.е. такой способ отопления оказывается более выгодным?

**С.М.** Давайте посчитаем. Пусть температура в комнате равна  $T_1 = 27^\circ\text{C} = 300\text{ К}$ , а температура на улице  $T_2 = 0^\circ\text{C} = 273\text{ К}$ . КПД двигателя Карно, работающего с такими нагревателем и холодильником, можно найти по формуле (19):  $\eta_{\text{Карно}} = 0,09$ .

Работа такого двигателя Карно равна  $A = \eta_{\text{Карно}} Q_n = 0,09 Q_n$ , холодильнику отдаётся  $Q_x = Q_n - \eta_{\text{Карно}} Q_n =$

$$= (1 - \eta_{\text{Карно}}) Q_n = 0,91 Q_n.$$

Поэтому тепловой насос, работающий при таких температурах «улицы» и «дома», при совершении работы  $A$  возьмёт у холодной улицы и

передает тёплому дому следующие количества теплоты:

$$Q_x = \frac{(1 - \eta_{\text{Карно}})}{\eta_{\text{Карно}}} A = 10,1A \quad (20)$$

при этом из «розетки» нужно будет взять только энергию на совершение работы. Поскольку КПД электродвигателей составляет  $\eta_{\text{Э}} = 0,8$ , энергия, которую нужно взять у электрической сети (и, соответственно, заплатить за неё), составляет  $W = A / \eta_{\text{Э}}$ , то в комнату передаётся энергия

$$Q_n = \frac{\eta_{\text{Э}} W}{\eta_{\text{Карно}}} = 8,9W. \quad (21)$$

Таким образом, заплатив за энергию  $W$ , мы сообщим комнате тепловую энергию  $8,9W$ !

**С.Г.** А если для совершения работы мы будем использовать тепловой двигатель? Мне кажется, что здесь не будет никакого выигрыша в энергии – сначала мы потеряем часть энергии нагревателя, отдав ее холодильнику (холодной улице), а потом её же и возьмём назад...

**С.М.** Всё равно будет. Если получать работу с помощью двигателя с большим КПД. Пусть для обогрева здания используется нефть, которую мы сжигаем в котельной, получив количество теплоты  $Q$ . Если эту теплоту использовать для отопления напрямую, на отопление может пойти 90% этой энергии (характерное значение КПД бытовых котельных):

$$Q_{\text{полезн,1}} = 0,9Q. \quad (22)$$

А поскольку температура горения нефти составляет около 2000 К, КПД преобразования энергии нефти в работу с помощью цикла Карно составляет 0,85. Поэтому мы сможем совершить работу

$$A = 0,85Q \quad (23)$$

и, следовательно, передадим комнате количество теплоты

$$Q_{\text{полезн,2}} = \frac{A}{\eta_{\text{Карно}}} = \frac{0,85Q}{\eta_{\text{Карно}}} = 9,4Q. \quad (24)$$

Из сравнения формул (22) и (24) заключаем, что с помощью сжигания топлива мы сможем получить только 10 % той энергии, которую нам даст тепловой насос (при одинаковых затратах):

$$\frac{Q_{\text{полезн,1}}}{Q_{\text{полезн,2}}} \approx 0,1. \quad (25)$$

**С.Г.** Фантастика!

**С.М.** На самом деле, эффективность современных тепловых насосов несколько меньше оценки (25): при затрате энергии  $Q$  на приведение в действие самого насоса удаётся получить  $5Q$  тепловой энергии. Но всё равно это впечатляющая цифра. В этой связи я могу повторить слова Д.И.Менделеева (сказанные, правда, по другому поводу, но также относительно сжигания нефти для отопления), что «топить можно и ассигнациями».

**С.Г.** Всё это, коллеги, конечно, хорошо... Но почему тепловые насосы не получили у нас (по крайней мере, пока) широкого распространения? Значит не всё так радужно?

**А.О.** Цены самих тепловых насосов пока тоже «фантастические». Но когда-нибудь станут «реальными»! Тем более что использование тепловых насосов в мире неуклонно растёт. Уже создаются централизованные теплонасосные станции в крупных городах. Например, 95 % всех домов в Стокгольме – а это, как вы догадываетесь, не самый южный город на планете Земля – отапливаются централизованной теплонасосной станцией.

**С.Г.** Но давайте вернёмся к истории. Кто первым сказал о возможности отопления с помощью теплового насоса? И кто первым его сделал? А кто сделал первый бытовой холодильник?

**С.М.** Идею теплового насоса высказал в 1852 году один из создателей термодинамики Уильям Томсон (которого мы лучше знаем по «дворянскому имени» лорда Кельвина). Создателем первого насоса стал австрийский инженер Питер фон Риттингер в 1855 году. Первые промышленные насосы появились в 40-х годах XX века. Широкое распространение насосов началось после мирового нефтяного кризиса 1973 года, когда сильно подорожала нефть. Что же касается бытовых холодильников, то это отдельная история! В 1857 году американский врач Джон Гори создал холодильную машину, которая производила лед в компрессионном цикле по типу теплового насоса.

**С.Г.** Но ведь электричества еще не было. Как совершалась работа?

**С.М.** С помощью паровой машины, работавшей на дровах! Параллельно Фердинанд Карре придумал холодильную установку, работающую на абсорбционном принципе – охлаждении за счет испарения. Такие установки тоже работали на дровах и были крайне неэкономичными. Но достаточно производительными. На Лондонской промышленной выставке в 1862 году аппарат Карре производил 200 кг льда в час. Эти установки появились и у нас в России.

**С.Г.** У нас? Мороженое делали?

**С.М.** Именно его! В начале XX века в Москве стали продаваться холодильные аппараты «Эскимо», и появилось множество фирм, произ-

водящих мороженое. Которое называлось «Эскимо». Работали эти аппараты на дровах, угле или керосине. А вот первый бытовой электрический холодильник, работающий по принципу теплового насоса, запатентовал в 1899 году американец Альберт Маршалл. В 1913 году в Америке стали выпускаться серийные электрические холодильники. Свой проект холодильника создал даже великий физик-теоретик Альберт Эйнштейн...

**А.О.** Я всегда знал – физик-теоретик может все: «коня на скаку остановит, в горящую избу пойдет».

**С.Г.** Андрей Станиславович, это не про физика-теоретика, а про русскую женщину!

**А.О.** Я знаю, Светлана Владимировна, но уж очень к месту пришлось. А почему Эйнштейн вдруг занялся холодильниками?

**С.М.** В первых бытовых холодильниках в качестве хладагента использовались токсичные вещества. И было несколько печальных историй с отравлением владельцев. Так вот Эйнштейн со своим аспирантом Лео Силардом в 1926 году предложил свой вариант холодильника, свободного от этого недостатка. С 1927 года электрические холодильники стали выпускаться кампанией Дженерал Электрик. С 1939 года холодильники стали выпускаться и у нас – Харьковским тракторным заводом.

**А.О.** Сергей Евгеньевич, мы уже несколько раз обещали рассказать о Сади Карно, но никак этого не делаем.

**С.М.** Давайте мы сейчас прервёмся и вернёмся к Сади Карно в следующем диалоге. Я думаю, этот человек достоин отдельного диалога.

**Татьяна Игоревна Морозова**

Выпускник МФТИ  
(Московский физико-технический институт),  
к.ф.-м.н., научный сотрудник Института  
космических исследований РАН



## Молнии над облаками

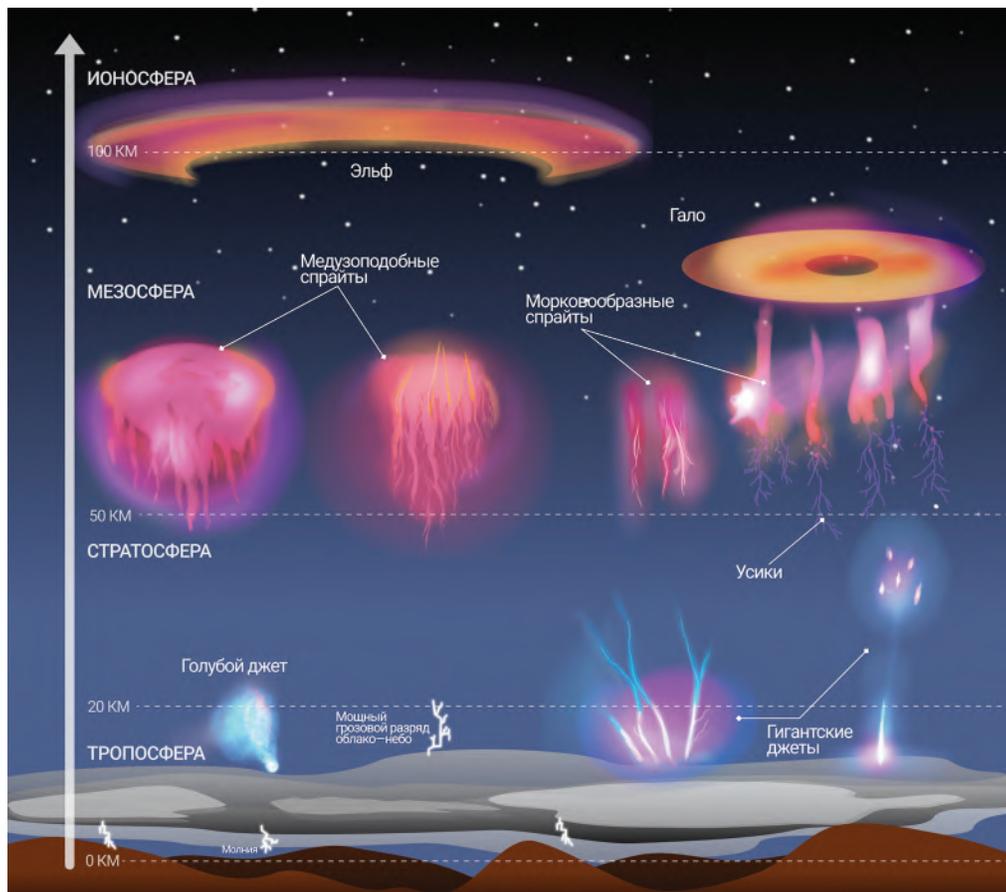
Удивительные молниевые явления можно встретить высоко над облаками. Они направлены не как привычные для нас молнии от грозового облака к земле, а от грозового облака вверх – в стратосферу и выше.

Основные высотные разряды бывают четырех видов: джеты, спрайты, гало и эльфы. Есть также менее известные высотные молнии – зеленые призраки, гномы и феи. Обнаружили их сравнительно недавно, в конце 20 века. Тогда ученые из Университета Миннесоты тестировали чувствительную камеру для снимков на большой высоте. Оказалось, что это принципиально новое природное явление, которое позже назвали «спрайт» (англ. sprite), что переводится, как «дух, фея, приведение». В 1994 году спрайт зафиксировали в цвете, снимок сделали с самолета.

Летая на самолетах над облаками, можно стать наблюдателем такого удивительного, но, как оказалось, довольно частого явления, которое появляется почти каждую грозу. Можно проследить несколько событий высотных разрядов в минуту. Активное изучение высотных разрядов началось недавно, и пока еще у

учёных нет четких устоявшихся теорий, описывающих процессы формирования данных структур. Динамику высотных разрядов сложно отследить с помощью наблюдений из-за спонтанного появления, поэтому для их изучения ученые обращаются к лабораторным экспериментам, моделирующим условия в атмосфере Земли. Без понимания детальных процессов и оценки физических параметров (электрических полей, зарядов, концентраций молний) невозможно понять причины возникновения высотных разрядов.

**Джеты** представляют собой обычные молнии, разница лишь в том, что электрическое поле от облака направлено вверх, а не к земле. Эти электрические разряды распространяются от верхнего края грозового облака и могут достигать высот до 90 км в зависимости от мощности разряда. Джеты, достигающие высот 70-90 км, называются «гигантскими», и на таких высотах светятся красным. К джетам относятся и так называемые «голубые стартеры» – они обычно развиваются до высот около 25 км. Более мощные джеты – до высот порядка 40 км. Джеты распространяются со скоростью



*Типы высотных молниевых разрядов в атмосфере Земли*

около 100 км/с, а время их жизни составляет 200–300 миллисекунд.

Один из предполагаемых механизмов возникновения голубых джетов – это распространение и фокусировка электромагнитных волн, вызванных токами молниевых разрядов между облаками в присутствии ионных каналов, которые возникают на коронных разрядах с мельчайших частиц в воздухе и играют роль антенных элементов.

Другой широко признанный механизм возникновения голубых джетов – это подъем яркого термо-

ионизованного канала с высокой проводимостью, так называемого лидера молнии, через неоднородную атмосферу. Это происходит, когда нити электрических разрядов, соединяясь между собой, образуют так называемые стримеры и дают начало ступенчатому лидеру молнии.

Похоже на механизм возникновения обычных молний – пробой на убегающих электронах, впервые рассмотренный советским физиком А.В. Гуревичем. Пробой происходит, когда напряжение в среде становится выше критического (которое

не дает зарядам разгоняться, чтобы тек электрический ток). Убегающие электроны – это электроны полностью ионизованной плазмы, ускоряемые внешним электрическим полем за счет постоянного наличия в системе электронов с большими тепловыми скоростями. В итоге электрическая сила  $E$  превосходит силу трения электронов об ионы при больших скоростях – и электроны ускоряются. По теории, разработанной Гуревичем, частица космического излучения ионизует молекулу воздуха при столкновении и дает начало образованию большого числа электронов с высокой энергией. Такой широкий атмосферный ливень понижает пробивное напряжение воздуха на порядок и вызывает пробой на убегающих электронах. Электрическое поле в

системе «облако—земля» ускоряет электроны до скоростей, близких к скорости света, что вызывает ионизацию на пути электронов и далее порождает целую лавину электронов, движущихся к земле. Электронные лавины переходят в стримеры. Такой создаваемый ионизированный канал используется молнией для разряда [«Наука и жизнь» № 7, 1993 г.].

В случае же высотных молниевых разрядов электроны ускоряются электрическим полем *над* облаком, которое в свою очередь создается электрическим полем грозового облака, когда лидер молнии передает высокий потенциал грозовой тучи вверх. Обычные молнии чаще бьют даже не между облаком и землей, а между двумя облаками и зарождаются на высотах не выше 16 км.



*Гигантский джет, снятый автоматической камерой из Обсерватории Джемини на высоте 4200 метров на Мауна-Кеа, Гавайи*

**Спрайты** – это молниевые вспышки с разветвленной структурой, немного похожие на красных медуз. Они занимают высоты 50–90 км и достигают ширины 100 км в диаметре. Спрайты появляются через несколько миллисекунд после разряда облако—земля и длятся менее 100 миллисекунд. Оптическая вспышка в мезосфере возникает че-

рез несколько миллисекунд (иногда через несколько десятков или даже сотен миллисекунд) после разряда облако—земля.

Один из сценариев развития спрайтов таков: электроны из грозовой тучи идут не вниз к земле, а вверх, в то время как положительные заряды движутся к земле.



Stephen Hummel

*Стивен Хаммел, работающий в обсерватории Мак-Дональда, запечатлел спрайты в 2020 году*

Появление спрайтов связано с обычной молниевой активностью в тропосфере, когда между землей и грозовым облаком в нем остается некомпенсированный заряд 10–100 Кл. Напряженность этого электрического поля спадает с высотой по степенному закону пропорционально минус третьей степе-

ни. Напряженность же пробойного поля, определяемая атмосферным давлением, уменьшается по экспоненте. Но это простая модель поля. В более сложных моделях следует учитывать плазмохимические процессы и изменение ионного состава ионосферы. Об этом мы поговорим в конце статьи.

Мощный молниевый разряд облако—земля способен перенести такой заряд, что на высоте 75–80 км поле некомпенсированного заряда в облаке превышает пробойное поле. Спрайты наблюдаются достаточно часто – порядка  $10^4$  событий в сутки на всём земном шаре.

Наблюдения также показывают, что область свечения спрайта в мезосфере имеет ярко выраженную структуру. Большинство спрайтов имеют сравнительно однородно светящуюся диффузную верхнюю область (на высотах более 80 км) с поперечным размером порядка 30 км и стримерную нижнюю область со светящимися каналами (на высотах до 70–75 км). В нижней части спрайта располагается множество светящихся каналов-стримеров с поперечными размерами от десятков до сотен метров. Между диффузной и стримерной областями располагается переходная зона.

Поперечные размеры стримеров спрайтов и джетов, а также их сила тока очень близки.

**Гало** – это свечение вокруг спрайта. Оно приходится на его верхушку и самые большие высоты – около 75–85 км. Гало имеет красный цвет и представляет собой диффузную светящуюся область на высоте 75–85 км с горизонтальными размерами около 20–30 км. В случае гало пробой не всегда развивается, однако ускоренные разрядом электроны успевают набрать энергию, достаточную для возбуждения молекул с появлением свечения в первой положительной полосе азота.

Оценки, основанные на данных наблюдений показывают, что при формировании спрайтов и гало

температура электронов на высотах мезосферы увеличивается до 1.5–2 эВ на временах порядка нескольких десятков микросекунд, а электрическое поле достигает значений 100 В/м и более (для сравнения у поверхности земли напряженность электрического поля составляет 130 В/м). Такие оценки удалось сделать по спектрографическим данным и молекулярным полосам поглощения.

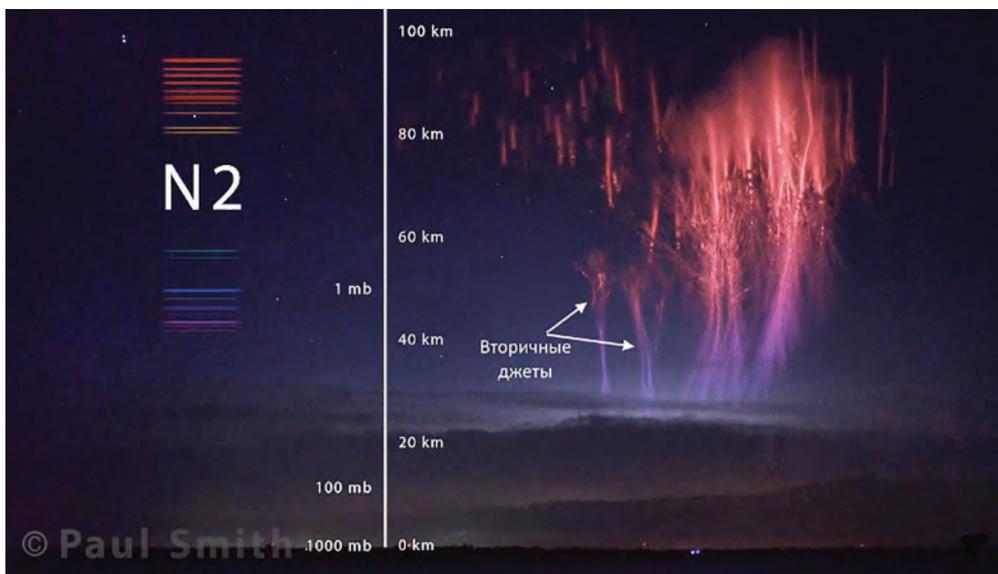
Диффузное излучение – это излучение после того, как оно было рассеяно на молекулах или твёрдых частицах. Диффузная область свечения характеризуется понижением концентрации и распределением вещества по большему объему. Само слово «диффузия» означает «распространение, рассеивание» и представляет собой процесс перемещения частиц вещества из области повышенной концентрации в область пониженной с выравниванием концентрации по занимаемому объему.

**Эльфы.** На больших высотах наблюдаются эльфы (ELVES, Emission of Light and Very Low Frequency perturbations due to Electromagnetic Pulse Sources – «излучение света и очень низкочастотные возмущения из-за импульса от электромагнитного источника»). Они представляют собой овалообразное расходящееся свечение на высоте около 90 км, которое связывается с электромагнитным импульсом от мощных молниевых разрядов. Так же как и для гало, пробоя воздуха в случае эльфов не происходит, хотя напряженности электрического поля хватает для возбуждения молекулярного азота.

## Цвет молниевых разрядов

Складываются условия в атмосфере (а именно концентрация газов, их состав и давление), при которых возбуждаются уровни определенных молекул, что дает свечение конкретных цветов. Например, азот на больших высотах при малом давлении дает красное свечение, потому что возбуждается соответствующий уровень энергии атома. Плотность атмосферы и давление возрастают на низких высотах и, соответственно, столкновения атомов не дают выжить долгоживущим красным линиям. Красные линии испускания

соответствуют меньшим энергиям уровней и наблюдаются у холодных медленных молекул с небольшой начальной энергией. Какой бы большой квант энергии не пришел, система его не поглотит – разность между начальной и конечной энергиями в этом случае может быть только небольшой. Это оказывается возможным лишь на больших высотах в диффузной области. Поэтому там молнии светят красным – большая длина волны и, соответственно, маленькая энергия как раз соответствуют красной области спектра.



Фотография группы красных спрайтов и двух вторичных джетов во время интенсивной грозы в штате Оклахома, США, 2019 год. Слева изображены спектральные полосы свечения азота при его возбуждении на разных высотах

Более того, с высотой меняется химический состав атмосферы, поэтому на более низких высотах с увеличением концентрации разных газов и их свечения во всем цветовом диапазоне

цвет молний интегрально кажется голубым. Здесь имеется аналогия с голубым цветом неба – Релеевское рассеяние обуславливает в 16 раз более интенсивное рассеяние фиоле-

тового участка спектра, чем красного (по формуле Релея интенсивность излучения обратно пропорциональна длине волны в четвертой степени). В случае неба спектр теплового излучения Солнца имеет такую форму, что интенсивность синего больше, чем фиолетового. Более того, глаз также лучше видит синюю область спектра, чем фиолетовую. Поэтому небо нам представляется сине-голубым.

В случае молниевых разрядов возбужденных атомов излучение не тепловое, а вынужденное. Однако, если учитывать цвета всех систем полос излучающих атомов и Релеевское рассеяние света на атмосферных частицах, то интегрально также свет получится голубым, как и небо. Он мог бы быть белым, если бы излучения в красном диапазоне было

больше, чем в синем. Например, азот может светить в красном, фиолетовом и синем, кислород в красном и зеленом цветах. Но бывают отдельные примеры и фиолетовых джетов, когда линии возбуждения молекул имеют максимумы в фиолетовой и синей областях и минимумы в остальных (либо максимум в красной, который примешивается к синей, чье рассеяние интенсивнее, и дает фиолетовый). Итоговое излучение с учетом Релеевского рассеяния смещается в фиолетовую область.

Интересно, что озоновый слой, через который проникают голубые джеты, также прибавляет им синего свечения, так как ввиду поглощения Шапью молекул озона область спектра от 450 нм и до 700 нм уходит и остаются синие цвета.



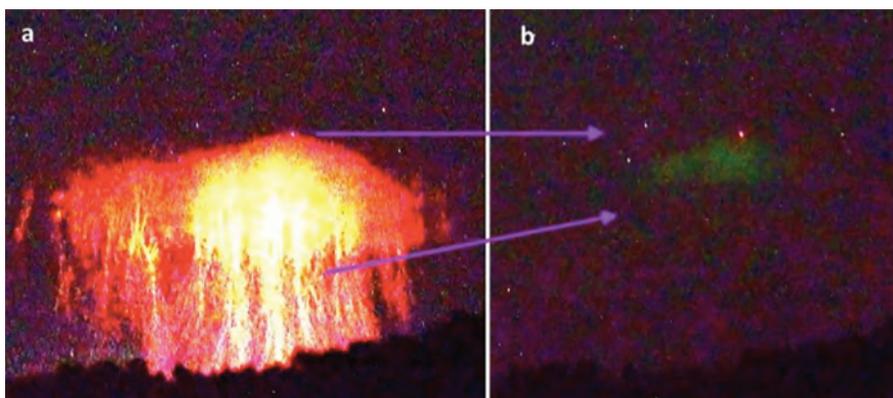
На снимке, сделанном в Китае в 2016, запечатлён гигантский синий джет.  
Автор: Phebe Pan

Большая часть звезд светит на всех длинах волн, а лучше других рассеивается свет с меньшей длиной волны, сумма же всех рассеянных цветов чаще дает голубой цвет.

В начале пути джетов и спрайтов происходит филаментирование от облака наверх, так как плотная плазма в этой области образует четкие структуры, которые светятся голубым, потому что смешиваются все цвета. А далее в

диффузной области возникает разреженная плазма и красное свечение.

**Зеленые призраки** (аббревиатура от green emissions from excited oxygen in sprite top – «зеленое свечение от возбужденного кислорода в вершинах спрайтов», ghost по-английски призрак) появляются после вспышки красных спрайтов в течение нескольких секунд как зелёное послесвечение. Они наблюдались с 2014 г.



*Зелёный призрак 25 мая 2020 года, штат Нью-Мексико, США. Thomas Ashcraft. Спустя мгновение после вспышки мощного спрайта остаётся слабое зелёное свечение. Для большей наглядности увеличена насыщенность кадров*

Хотя природа этих явлений до конца остается неясной, зелёный цвет свечения может быть подсказкой. Он отождествляется с зеленым свечением неба в результате возбуждения атомов кислорода солнечным ветром, космическими лучами, нелинейными плазменно-пылевыми процессами в ионосфере, либо при химических процессах взаимодействия кислорода и других молекул атмосферы. То же самое можно сказать и о зелёных призраках. Мощные спрайты могут вызывать свечение атомов кислорода на высотах около 90-100 км, как раз на уровне, где проявляется зеленое свечение неба. Предполагается, что когда

верхушки мощных спрайтов ударяются о слой, где происходит свечение атмосферы, на высоте 90 км над поверхностью, атомы кислорода могут на короткое время светиться зелёным цветом. На таких высотах плотность атмосферы достаточно низкая, поэтому возбуждённые атомы кислорода способны некоторое время высвечивать. Но поскольку энергия спрайтов относительно низкая, то свечение занимает небольшую по объёму область и очень быстро исчезает. Однако время жизни призраков заметно больше, чем породивших их спрайтов и составляет 100-200 миллисекунд [Thomas Ashcraft, 2020].

### Гномы

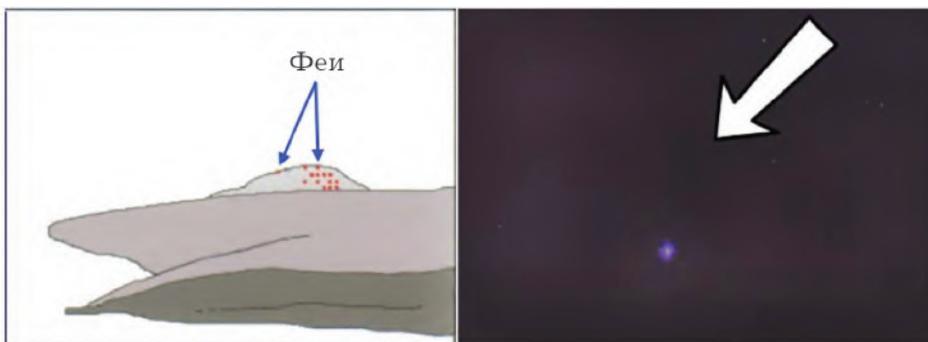
С верхушки кучево-грозового облака можно увидеть такое явление, которое назвали «гномом», – короткий молниевый столб, напоминающий зарождающийся джет или палец. Горизонтальные размеры таких явлений составляют всего 150-200 м, вертикальные – порядка 1 км, а время существования – 33-136 миллисекунд. При этом скорость роста по приблизительным оценкам составляла около  $10^4$  м/с. Они имеют белый цвет и скорее всего являются зародышами голубых стартёров и голубых джетов, но не получают дальнейшего развития по

вертикали [Кибальчич И.А., Загадки грозового электричества. Харьков, 2020].

### Феи

На куполе грозового облака можно также лицезреть фей, или pixies.

Это небольшие (около 100 м в ширину) светящиеся пятна, время жизни которых составляет менее 16 миллисекунд. Они, так же, как и гномы, возникают независимо от разрядов молний в грозовой туче. Оказывается, что при достаточно высокой электроактивности грозового облака можно заметить за одну грозу десятки подобных пятен.



*Схематическое изображение возникновения фей и фото феи во время интенсивной грозы 27 сентября 2019 г. в штате Канзас (справа) – Paul M Smith*

Исследование возмущения состава мезосферы, обусловленного высотными разрядами, кроме фундаментального (поиск дополнительных источников поддержания ионизации нижней ионосферы в ночное время), представляет значительный практический интерес. Так, возмущения ионизации ионосферы влияют на условия распространения волн ОНЧ-диапазона и на корректную

работу радиолокационных приборов и устройств радиосвязи [А. А. Евтушенко, Е. А. Мареев. Моделирование возмущений состава мезосферы под действием высотных молниевых разрядов // Известия вузов. Радиофизика. 2011. Т. LIV, № 2, стр. 123-140.]. Поэтому их исследование важно для понимания явлений в ионосфере и для прикладных научно-технических задач.

### Литература

1. А. Евтушенко и др., Моделирование высотных разрядов на большой плазменной установке. Геомagnetизм и астрономия.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК



**Юрий Валентинович Нестеренко**

Доктор физико-математических наук,  
член-корреспондент РАН, профессор  
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

## О вычислении сумм Эйлера

### Часть I. Эйлер и Коши

В замечательной книге Леонарда Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых»<sup>1</sup> можно найти следующие удивительные равенства<sup>2</sup>:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945},$$

$$\frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$\frac{1}{1^{10}} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \dots = \frac{\pi^{10}}{93555},$$

$$\frac{1}{1^{12}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \dots = \frac{691\pi^{12}}{638512875}.$$

Они означают, что конечные суммы  $\frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \dots + \frac{1}{n^{2m}}$  с ростом количества слагаемых увеличиваются, приближаясь к выписанным справа числам. Числа же, к которым приближаются эти суммы, находятся в рациональном отношении к  $\pi^{2m}$ . Эйлер доводит эти результаты до  $2m = 26$ , вычисляя рациональные множители и указывая на закономерность, позволяющую находить их. Доказательство, приводимое Эйлером, основано на двух бесконечных представлениях для функции  $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Первое представление в виде суммы ряда по степеням переменной  $x$ , а второе – в виде бесконечного произведения множителей

<sup>1</sup> Книга была издана на латинском языке в 1744 г. Перевод на русский язык первого тома был опубликован в 1936 г. А в 1961 г. вышел полный перевод в двух томах. Указанные нами равенства содержатся в гл. X, §168 первого тома.

<sup>2</sup> Первое из этих равенств появилось в 1736 году в письме Эйлера к Даниилу Бернулли.

вида  $1 + \frac{x^2}{\pi^2 k^2}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Второе представление аналогично разложению многочлена в произведение линейных сомножителей, отвечающих его корням.

В настоящее время известно несколько различных доказательств указанных выше равенств Эйлера. Мы приводим в этой статье элементарное доказательство, использующее свойства тригонометрических функций. В случае  $m = 1$  доказательство похоже на доказательство О. Коши<sup>3</sup>, хотя и имеет некоторые отличия. Впрочем, основные идеи, конечно, принадлежат Коши.

Нужно также знакомство с понятием «предел последовательности», хотя для понимания рассуждений достаточно интуитивных представлений о пределах. Комплексные числа и формула Муавра

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha, \quad n \geq 1,$$

справедливая при любом действительном  $a$  и используемая в задаче 5, где выводится формула для синуса кратных углов, конечно, могут быть исключены и заменены рассуждениями по индукции. Отметим, что эти формулы и их вывод с помощью формулы Муавра присутствуют в книге Эйлера «Введение в анализ...». Понадобится также формула Ньютона для биннома

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где так называемые биномиальные коэффициенты  $C_n^k$  имеют значения

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Все рассуждения, нужные для вычислений значений сумм Эйлера, представлены ниже в виде задач и их решений.

### Дзета-функция

**Задача 1.** Докажите, что при каждом действительном  $s > 1$  возрастающая с ростом  $n$  последовательность сумм

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}$$

ограничена и потому имеет предел, обозначаемый

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \tag{1}$$

Функция  $\zeta(s)$  называется дзета-функцией. По историческим причинам её аргумент принято обозначать буквой  $s$ . Такие ряды при различных значениях  $s$  изучал Эйлер. Впоследствии дзета-функция стала рассматриваться, как функция действительного переменного  $s > 1$ . Её свойства тесно связаны со свойствами множества простых чисел. Причиной служит следующее тождество Эйлера:

---

<sup>3</sup> A.L. Cauchy, Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Paris:1821, Note VIII. Эту книгу можно найти в свободном доступе в интернете.

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \cdot \dots = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad (2)$$

справедливое при каждом  $s > 1$ . Произведение в (2) содержит бесконечное количество сомножителей, соответствующих всем простым числам  $p$ . Под значением такого бесконечного произведения понимается предел при  $x$ , стремящемся к бесконечности, конечного произведения

$$P(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

взятого по всем простым числам  $p \leq x$ . Мы не будем здесь доказывать и использовать в дальнейшем тождество Эйлера.

**Решение задачи 1.** При любом  $s > 1$  рассмотрим произведение

$$\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \cdot \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\right) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\right) - 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s}\right).$$

Если раскрыть скобки в правой части полученного равенства, то после приведения подобных членов получим сумму слагаемых вида  $\frac{1}{(2k+1)^s}$ , при  $2k +$

$+1 \leq n$  с коэффициентами 1, сумму слагаемых вида  $\frac{1}{(2k)^s}$  при  $2k \leq n$  с коэф-

фициентами -1, а также сумму слагаемых вида  $\frac{1}{(2k)^s}$ , при  $n < 2k \leq 2n$  с коэффи-

циентами -2. Отбрасывая группу последних слагаемых, заметим, что коэффициенты при них отрицательны, получим число, равное

$$1 - \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) - \left(\frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s}\right) - \dots$$

Это конечное выражение будет заканчиваться членом  $-\left(\frac{1}{(n-1)^s} - \frac{1}{n^s}\right)$ , если

$n$  нечётно, и членом  $-\frac{1}{n^s}$ , если  $n$  чётно. В любом случае указанное произведение будет меньше 1 и, значит

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} < \frac{1}{1 - \frac{2}{2^s}} = \frac{2^s}{2^s - 2}.$$

Это доказывает, что последовательность сумм из условия задачи 1 ограничена. Всякая возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел. В рассматриваемом случае этот предел обозначается  $\zeta(s)$ .

Утверждение задачи 1 можно выразить так:

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\right). \quad (3)$$

В дальнейшем мы заменим при  $s = 2m$  слагаемые вида  $\frac{1}{k^s}$  некоторыми не очень отличающимися от них по величине числами, для которых сумма под знаком предела в (3) может быть точно сосчитана. Это позволит вычислить предел.

**Задача 2.** Пусть  $x$  – любое число из промежутка  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Докажите справедливость следующих неравенств

а)  $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ ,

б)  $0 < \frac{1}{x^{2m}} - \operatorname{ctg}^{2m} x < \frac{4^m}{x^{2m-2}}$  (4)

при каждом целом  $m \geq 1$ .

**Решение.**

а) Нарисуем на плоскости окружность радиуса 1, центр её обозначим буквой  $O$ . Выберем на окружности две точки  $A$  и  $B$  так, что длина дуги  $AB$  равна  $x$ . Через точку  $A$  проведём касательную к окружности, а точку пересечения этой касательной с прямой  $OB$  обозначим буквой  $C$ . Обозначим также буквой  $D$  основание перпендикуляра, опущенного из точки  $B$  на прямую  $OA$ . Из геометрических соображений следуют неравенства для площадей треугольников  $AOB$  и  $AOC$

$$S_{AOB} < S < S_{AOC},$$

где буквой  $S$  обозначена площадь сектора, ограниченного радиусами  $AO$  и  $BO$ . Учитывая, что

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \sin x, \quad S = \frac{1}{2} x, \quad S_{AOC} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

получаем требуемые неравенства.

б) Из неравенства  $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$  следует  $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$ . Возводя их в степень  $2m$ , находим  $\frac{1}{\sin^{2m} x} > \frac{1}{x^{2m}} > \operatorname{ctg}^{2m} x$  и

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{x^{2m}} - \operatorname{ctg}^{2m} x < \frac{1}{\sin^{2m} x} - \operatorname{ctg}^{2m} x &= \frac{1 - \cos^{2m} x}{\sin^{2m} x} = \\ &= \frac{1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots + \cos^{2m-2} x}{\sin^{2m-2} x} \leq \left( \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right)^{2m-2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2}$ , заключаем, что

$$0 < \frac{1}{x^{2m}} - \operatorname{ctg}^{2m} x < \left( \frac{2}{x} \right)^{2m-2} < \frac{4^m}{x^{2m-2}}.$$

**Задача 3.** При каждом  $m \geq 1$  выполняется равенство

$$\zeta(2m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^{2m}}{(2n+1)^{2m}} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg}^{2m} \frac{\pi k}{2n+1}.$$

**Решение.** Обозначим для краткости

$$S_n = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \dots + \frac{1}{n^{2m}},$$

$$T_n = \operatorname{ctg}^{2m} \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^{2m} \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^{2m} \frac{n\pi}{2n+1}.$$

Подставляя в неравенства (4) дробь  $\frac{\pi k}{2n+1}$  вместо  $x$  и складывая почленно получившиеся неравенства при  $k = 1, 2, \dots, n$ , находим

$$0 < \frac{(2n+1)^{2m}}{\pi^{2m}} S_n - T_n < 4^m \frac{(2n+1)^{2m-2}}{\pi^{2m-2}} \left( \frac{1}{1^{2m-2}} + \frac{1}{2^{2m-2}} + \frac{1}{3^{2m-2}} + \dots + \frac{1}{n^{2m-2}} \right)$$

и

$$0 < S_n - \frac{\pi^{2m}}{(2n+1)^{2m}} T_n < 4^m \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} < 4^m \frac{\pi^2}{2n+1}.$$

Из этих неравенств, поскольку  $S_n$  стремится к  $\zeta(2m)$ , следует нужное утверждение.

### Суммы котангенсов

Числа  $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{2n+1}$ ,  $1 \leq k \leq n$  составляют множество корней некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Вычислению этого многочлена и некоторых сумм его корней посвящён настоящий раздел.

**Задача 4.** 1) Докажите тождество

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin^5 \alpha} = 5\operatorname{ctg}^4 \alpha - 10\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1. \quad (5)$$

2) Найдите квадратное уравнение, корнями которого являются числа  $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}$  и  $\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5}$ , и выразите эти числа через радикалы.

**Решение.** 1) Для доказательства тождества достаточно воспользоваться формулами

$$\sin 5\alpha = \sin 2\alpha \cos 3\alpha + \cos 2\alpha \sin 3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha, \quad \sin 3\alpha = 3\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

2) Подставляя в равенство (5)  $\alpha = \frac{\pi}{5}$  и  $\frac{2\pi}{5}$ , убеждаемся, что числа

$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}$  и  $\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5}$  есть корни многочлена  $5x^2 - 10x + 1 = 0$ . Учитывая, что котангенс убывает на промежутке  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , заключаем.

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5} = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}},$$

**Задача 5.** Пусть  $n$  – целое положительное число. Найдите многочлен с целыми коэффициентами степени  $n$ , корнями которого являются числа

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1}, \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1}. \quad (6)$$

**Решение.** По формуле Муавра имеем тождество

$$\cos(2n+1)\alpha + i \sin(2n+1)\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2n+1}.$$

Пользуясь формулой для бинома и сравнивая коэффициенты при  $i$  в левой и правой частях последнего равенства, находим

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)\alpha &= C_{2n+1}^1 \sin \alpha \cos^{2n} \alpha - C_{2n+1}^3 \sin^3 \alpha \cos^{2n-2} \alpha + C_{2n+1}^5 \sin^5 \alpha \cos^{2n-4} \alpha + \dots = \\ &= \sin^{2n+1} \alpha (C_{2n+1}^1 \operatorname{ctg}^{2n} \alpha - C_{2n+1}^3 \operatorname{ctg}^{2n-2} \alpha + C_{2n+1}^5 \operatorname{ctg}^{2n-4} \alpha + \dots). \end{aligned} \quad (7)$$

Левая часть получившегося тождества обращается в нуль при подстановке любого из чисел  $\frac{\pi}{2n+1}, \frac{2\pi}{2n+1}, \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \frac{n\pi}{2n+1}$ , вместо  $\alpha$ . Значит, все числа (6) будут корнями многочлена

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \dots \quad (8)$$

При  $n = 2$ , например, получаем, что числа  $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}, \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5}$  удовлетворяют квадратному уравнению  $5x^2 - 10x + 1 = 0$ . Это было установлено в предыдущей задаче.

А при  $n = 3$  заключаем, что числа  $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7}, \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7}, \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7}$  составляют множество корней многочлена  $7x^3 - 35x^2 + 21x - 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7} &= 5, \\ \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7} &= 3, \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7} &= \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Отметим, что корни уравнения  $7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$  могут быть выражены через радикалы, но в этих выражениях присутствуют комплексные числа. Можно доказать, что ни один из корней – все они действительные числа – не может быть выражен через радикалы от действительных чисел.

**Задача 6.** Вычислите суммы

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1} \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg}^4 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^4 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^4 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^4 \frac{n\pi}{2n+1} \quad (10)$$

**Решение.** Обозначим числа (6) в порядке следования буквами  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Эти числа есть корни многочлена (8), поэтому по формулам Виета находим

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

и так же

$$\begin{aligned} t_1^2 + t_1^2 + \dots + t_n^2 &= (t_1 + t_1 + \dots + t_n)^2 - 2(t_1 t_2 + \dots + t_{n-1} t_n) = \left( \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} \right)^2 - 2 \cdot \frac{C_{2n+1}^5}{C_{2n+1}^1} = \\ &= \left( \frac{n(2n-1)}{3} \right)^2 - \frac{n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{30} = \frac{n(2n-1)(4n^2 + 10n - 9)}{45}. \end{aligned}$$

**Задача 7.** Докажите, что

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Решение.** Пользуясь равенством предыдущей задачи и результатами задачи 3, находим при  $m = 1$

$$\zeta(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left( \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Точно так же при  $m = 2$  находим

$$\zeta(4) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \cdot \frac{n(2n-1)(4n^2 + 10n - 9)}{45} = \frac{\pi^4}{90}.$$

## Часть II. Ньютон и Бернулли

### Формулы Ньютона для степенных сумм

В этом разделе мы установим рекуррентные формулы, позволяющие сравнительно легко вычислять значения  $\zeta(2m)$ .

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  переменные, а многочлены  $s_1, s_2, \dots, s_n$  от этих переменных определены равенствами

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \quad \dots \quad s_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Другими словами, многочлен  $s_k = s_k(x_1, \dots, x_n)$  есть сумма всевозможных произведений вида  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ , с условиями  $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Эти многочлены называются элементарными симметрическими многочленами. Из определения следует, что они не меняются при любой перестановке переменных.

Если  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  многочлен с рациональными коэффициентами и  $t_1, \dots, t_n$  его корни, то по *теореме Виета* выполняются равенства

$$s_1(t_1, \dots, t_n) = -a_1, \quad s_2(t_1, \dots, t_n) = a_2, \dots, \quad s_k(t_1, \dots, t_n) = (-1)^k a_k, \dots, \quad s_n(t_1, \dots, t_n) = (-1)^n a_n.$$

**Задача 8.** Пусть  $t_1, \dots, t_n$  числа (6). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_k(t_1, \dots, t_n)}{(2n)^{2k}} = \frac{1}{(2k+1)!}, \quad k \geq 1.$$

**Решение.** В задаче 5 было доказано, что числа (6) составляют полное множество корней многочлена

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \dots$$

Поэтому

$$s_k(t_1, \dots, t_n) = \frac{C_{2n+1}^{2k+1}}{C_{2n+1}^1} = \frac{(2n-2k+1) \cdot (2n-2k+2) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n}{(2k+1)!}.$$

Так как числитель последней дроби содержит  $2k$  сомножителей, получаем нужное утверждение.

В дальнейшем понадобятся также многочлены

$$p_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, \quad k \geq 1.$$

В решении задачи 6 было использовано тождество  $p_2 = s_1^2 - 2s_2$ . Подобные соотношения верны и в общем случае. Следующая теорема позволяет находить выражения многочленов  $p_k$  через элементарные симметрические многочлены при любом  $k \geq 1^4$ .

**Теорема 1** (Формулы Ньютона). При *любом натуральном  $k$  справедливо соотношение*

$$p_k - p_{k-1}s_1 + \dots + (-1)^{k-1} p_1 s_{k-1} + (-1)^k k s_k = 0, \quad \text{если } 1 \leq k \leq n, \quad (11)$$

$$p_k - p_{k-1}s_1 + \dots + (-1)^{n-1} p_{k-n+1} s_{n-1} + (-1)^k p_{k-n} s_n = 0, \quad \text{если } k > n. \quad (12)$$

Например, при  $k=3$  и  $n > 3$  имеем  $p_3 - p_2 s_1 + p_1 s_2 - 3s_3 = 0$ . Учитывая, что  $p_1 = s_1$  и  $p_2 = s_1^2 - 2s_2$ , находим

$$p_3 = s_1 \left( s_1^2 - 2s_2 \right) - s_2 s_1 + 3s_3 = s_1^2 - 3s_1 s_2 + 3s_3.$$

---

<sup>4</sup> Впервые эти формулы в общем виде были опубликованы И.Ньютоном в 1707 г. в книге «Всеобщая арифметика» и использовались для приближённого вычисления корней многочленов. Перевод на русский язык вышел в 1948 г., Издательство АН СССР. Выражения для степенных сум корней см. стр. 264.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть  $z$  – новая переменная. Для каждого  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , справедливо тождество

$$\frac{1}{1-zx_j} = 1 + zx_j + z^2x_j^2 + \dots$$

Складывая эти тождества при всех  $j = 1, \dots, n$ , находим

$$\frac{1}{1-zx_1} + \frac{1}{1-zx_2} + \dots + \frac{1}{1-zx_n} = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots \quad (13)$$

Здесь мы считаем  $p_0 = n$ .

Имеет место тождество

$$x^n - s_1x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}x + (-1)^n s_n = (x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Дифференцируя его по переменной  $x$ , находим

$$\begin{aligned} & nx^{n-1} - (n-1)s_1x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1} = \\ & = (x-x_2)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) = \\ & = \left( \frac{1}{x-x_1} + \dots + \frac{1}{x-x_n} \right) (x^n - s_1x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}x + (-1)^n s_n). \end{aligned}$$

Подставим в это тождество  $\frac{1}{z}$  вместо  $x$ , умножим результат на  $z^{n-1}$  и воспользуемся тождеством (13). После этих преобразований найдём

$$\begin{aligned} & n - (n-1)s_1z + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}z^{n-1} = \\ & = (p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots) \cdot (1 - s_1z + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}z^{n-1} + (-1)^n s_n z^n). \end{aligned}$$

Сравнивая теперь коэффициенты при  $z^k$  в левой и правой частях получившегося тождества, находим тождества из утверждения теоремы.

Вернёмся к вычислению сумм Эйлера. Как и ранее, будем использовать обозначения  $t_k = \text{ctg}^2 \frac{\pi k}{2n+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**Задача 9.** При каждом  $k \geq 1$  существует предел  $\gamma_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_k(t_1, \dots, t_n)}{(2n)^{2k}}$ .

Числа  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  связаны соотношениями

$$\gamma_k - \frac{\gamma_{k-1}}{3!} + \frac{\gamma_{k-2}}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{\gamma_1}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{k}{(2k+1)!} = 0. \quad (14)$$

**Решение.** Докажем утверждение индукцией по  $k$ . При  $k=1, 2$  согласно задаче 7 имеем  $\gamma_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\gamma_2 = \frac{1}{90}$ . Предположим, что для всех степенных сумм с номерами, меньшими  $k$ , утверждение доказано. При  $n \geq k$  имеет место соотношение (11). Разделив его на  $(2n)^{2k}$ , устремив  $n$  к бесконечности и воспользовавшись индуктивным предположением и результатом задачи 8, получаем существование предела  $\gamma_k$  и соотношение из утверждения задачи 9.

Так, например, используя равенства  $\gamma_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\gamma_2 = \frac{1}{90}$ , находим

$$\gamma_3 = \frac{1}{3!}\gamma_2 - \frac{1}{5!}\gamma_1 + \frac{3}{7!} = \frac{1}{945}.$$

Поэтому  $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ . Точно так же находим

$$\gamma_4 = \frac{1}{945 \cdot 3!} - \frac{1}{90 \cdot 5!} + \frac{1}{6 \cdot 7!} - \frac{4}{9!} = \frac{1}{9450}.$$

Аналогично вычисляются и другие коэффициенты. С помощью формулы из задачи 9 и компьютера легко найти, например, что

$$\zeta(40) = \frac{261082718496449122051}{20080431172289638826798401128390556640625} \cdot \pi^{40}.$$

### Числа Бернулли

Числа Бернулли  $B_m$  определяются рекуррентными соотношениями

$$1 + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k B_k = 0, \quad m \geq 2. \tag{15}$$

При  $m = 2, \dots, 6$  имеем равенства

$$1 + 2B_1 = 0,$$

$$1 + 3B_1 + 3B_2 = 0,$$

$$1 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0,$$

$$1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0,$$

$$1 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4 + 6B_5 = 0,$$

из которых следует  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_5 = 0$ .

С числами Вернулли обычно связывают одно удобное обозначение. Для каждого многочлена  $f(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n$  с действительными коэффициентами символом  $f(B)$  будем обозначать число

$$f(B) = a_0 + a_1B_1 + \dots + a_nB_n.$$

В этих обозначениях равенство (15) можно переписать в виде

$$(B+1)^m - B^m = 0, \quad m \geq 2.$$

**Задача 10.** 1) Докажите, что при любом целом  $n \geq 1$  выполняется тождество

$$(B+x+1)^n - (B+x)^n = nx^{n-1}. \quad (16)$$

2) Пользуясь тождеством (16) при  $x = -\frac{1}{2}$ , докажите, что все числа Бернулли с нечётными номерами, большими 1, равны нулю, т.е.  $B_{2k+1} = 0$  при  $k \geq 1$ .

3) Докажите, что при любом целом  $n \geq 1$  выполняется тождество

$$(x+B)^n - (x-1-B)^n = 0. \quad (17)$$

4) Пользуясь тождеством (17) при  $x = \frac{1}{2}$ , докажите, что при любом целом  $k \geq 0$  выполняется равенство

$$\left(B + \frac{1}{2}\right)^{2k+1} = 0. \quad (18)$$

**Решение.** 1) Справедливы равенства

$$(B+x+1)^n - (B+x)^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{n-k} ((B+1)^k - B^k) = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

2) Докажем равенства  $B_{2k+1}=0$  с помощью индукции по  $k$ . Равенства  $B_3 = B_5 = 0$  уже доказаны. Будем поэтому считать, что  $k \geq 3$  и все числа Бернулли с нечётными номерами от 3 до  $2k-1$  равны нулю. Пользуясь тождеством (16) при  $n = 2k+2$  и  $x = -\frac{1}{2}$ , находим

$$\sum_{j=0}^{2k+1} C_{2k+2}^j B_j \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2-j} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+2-j} \right) = -\frac{2k+2}{2^{2k+1}}. \quad (19)$$

Все слагаемые с четными номерами  $j$  равны нулю, так как в этом случае  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2-j} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+2-j} = 0$ . Слагаемые, отвечающие нечетным  $j$  с  $3 \leq j < 2k+1$  равны нулю по индуктивному предположению. Поэтому равенство (19) может быть переписано в виде

$$(2k+2)B_1 \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \right) + (2k+2)B_{2k+1} \left( \left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) = -\frac{2k+2}{2^{2k+1}}$$

или так 
$$-\frac{2k+2}{2^{2k+1}} + (2k+2)B_{2k+1} = -\frac{2k+2}{2^{2k+1}}.$$

Отсюда следует, что  $B_{2k+1} = 0$ .

3) Справедливы равенства

$$(x+B)^n - (x-1-B)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j x^{n-j} (B^j - (-B-1)^j). \quad (20)$$

При чётном  $j$  согласно (15) имеем  $B^j - (-B-1)^j = B^j - (B+1)^j = 0$ . Если  $j > 1$  нечётно, то по (15) и согласно доказанному в пункте 2) имеем  $B^j - (-B-1)^j =$

$= B^j + (B+1)^j = 2B_j = 0$ . Наконец, при  $j=1$  находим  $B+B+1=2B_1+1=0$ . Итак, все слагаемые в сумме (20) равны нулю. Нужное утверждение доказано.

4) При  $x = \frac{1}{2}$  с помощью тождества (17) находим

$$0 = \left(\frac{1}{2} + B\right)^{2k+1} - \left(-\frac{1}{2} - B\right)^{2k+1} = 2\left(\frac{1}{2} + B\right)^{2k+1},$$

что доказывает нужное равенство.

**Задача 11.** Докажите равенства

$$\gamma_m = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!}, \quad m \geq 1, \tag{21}$$

и, следовательно,

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!} \cdot \pi^{2m}, \quad m \geq 1. \tag{22}$$

**Решение.** Воспользуемся математической индукцией по  $m$ . При  $m = 1, 2$  равенство (21) проверяется непосредственно.

Предположим теперь, что равенство (21) выполняется для всех индексов  $m < k$ . Пользуясь равенством (14) и индуктивным предположением, находим

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{k-m+1} \frac{\gamma_m}{(2k-2m+1)!} + (-1)^{k-1} \frac{k}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^k \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!(2k-2m+1)!} + (-1)^{k-1} \frac{k}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{2 \cdot (2k+1)!} \left( \sum_{j=2}^{2k-1} C_{2k+1}^j 2^j B_j - 2k \right) = \\ &= \frac{(-1)^k}{2 \cdot (2k+1)!} \left( 1 + \sum_{j=1}^{2k-1} C_{2k+1}^j 2^j B_j \right). \end{aligned}$$

Из равенства (18) с учётом того, что  $B_{2k+1} = 0$ , находим

$$1 + \sum_{j=1}^{2k} C_{2k+1}^j 2^j B_j = 2^{2k+1} \left( B + \frac{1}{2} \right)^{2k+1} = 0.$$

Поэтому

$$1 + \sum_{j=1}^{2k-1} C_{2k+1}^j 2^j B_j = -(2k+1) 2^{2k} B_{2k}$$

и

$$\gamma_k = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}.$$

Это завершает доказательство равенства (21).

Любопытно, что числа Бернулли связаны и с задачей суммирования положительных степеней натуральных чисел. Именно в связи с этой задачей они и были введены Я.Бернулли примерно в 1685 г. в работе о теории вероятностей.

Обозначим

$$\varphi_m(x) = \frac{(B+x)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k x^{m+1-k}, \quad m \geq 1.$$

Так,

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2 - x}{2} = \frac{x(x-1)}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{6} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4} = \left( \frac{x(x-1)}{2} \right)^2,$$

$$\varphi_4(x) = \frac{6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x}{30} = \frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2 - 3x - 1)}{30},$$

$$\varphi_5(x) = \frac{2x^6 - 6x^5 + 5x^4 - x^2}{12} = \frac{(x-1)^2 x^2 (2x^2 - 2x - 1)}{12}.$$

**Задача 12.** Докажите, что при любом целом  $m \geq 1$  выполняется равенство

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \varphi_m(n+1).$$

Например,

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^4+2^4+3^4+\dots+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

**Решение задачи 12.** Из тождества (16) следует

$$(m+1)k^m = (B+k+1)^{m+1} - (B+k)^{m+1}.$$

Складывая эти равенства при  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , находим

$$(m+1)(1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m) = (B+n+1)^{m+1} - B^{m+1},$$

откуда и следует нужное утверждение.

### Заключительные замечания

Результаты, обсуждаемые в этой статье, безусловно классические и были получены великими учёными: Я.Бернулли (1654-1705), И.Ньютоном (1643-1727), Л.Эйлером (1707-1783), Б.Риманом (1826-1866).

Так как  $\pi$  – трансцендентное число (Линдеман, 1882), то из формул Эйлера следует иррациональность и трансцендентность значений  $\zeta(2m)$ ,  $m \geq 1$ . Об арифметической природе значений дзета-функции в нечётных точках практически ничего не известно. Доказано, что число  $\zeta(3)$  иррационально (Апери,

1978), что среди чисел  $\zeta(2m+1)$ ,  $m \geq 1$ , имеется бесконечное множество иррациональных (Ривоаль, 2000). Но даже иррациональность  $\zeta(5)$  до сих пор не установлена. Предполагается, что все числа  $\zeta(2m+1)$ ,  $m \geq 1$ , трансцендентны и, более того, все они вместе с числом  $\pi$  алгебраически независимы над полем рациональных чисел. В частности, никаких соотношений, подобных (22), для значений  $\zeta(2m+1)$  существовать не может. Эти гипотезы очень далеки от своего доказательства.

Несмотря на то, что ряд (1) не сходится при  $s < 1$ , дзета-функцию можно определить и при таких значениях аргумента. Например, при  $s > 1$  справедливо тождество

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \tag{23}$$

Можно доказать, что последний ряд сходится при  $s > 0$ . Поскольку множитель  $1 - 2^{1-s}$  отличен от нуля на множестве  $0 < s < 1$ , это равенство можно рассматривать как определение дзета-функции в интервале  $0 < s < 1$ . Более того, ряд, стоящий в правой части равенства (23) сходится при любом комплексном значении переменной  $s$  с положительной действительной частью  $\Re s$ . Равенство (23) можно рассматривать, как определение дзета-функции в комплексной полуплоскости  $\Re s > 0$ .

В 1859 г. Б. Риман определил дзета-функцию во всей комплексной плоскости и установил ряд её глубоких свойств. Он также первым использовал обозначение  $\zeta(s)$  для функции (1), получившей впоследствии название дзета-функция Римана. Дзета-функция обращается в нуль в точках  $s = -2, -4, -6, \dots$ , а, кроме того, имеет бесконечное количество нулей в полосе  $0 < \Re s < 1$ , расположенных симметрично относительно прямой  $\Re s = 1/2$  и вещественной оси. Риман предположил, что все нули  $\zeta(s)$  в полосе  $0 < \Re s < 1$ , т.е. нули функций

$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$  лежат на прямой  $\Re s = 1/2$ . Действительные части четырёх наименьших нулей в самом деле равны  $\frac{1}{2}$ , а мнимые части имеют вид

$$14, 134725142\dots, \quad 21, 022039639\dots, \quad 25, 010857580\dots, \quad 30, 424876126\dots$$

К настоящему времени проверено, что первые  $10^{13}$  нулей  $\zeta(s)$ , расположенные в полосе  $0 < \Re s < 1$ , действительно лежат на прямой  $\Re s = \frac{1}{2}$ . Проверка потребовала очень трудоёмких компьютерных вычислений. Эта гипотеза – знаменитая «гипотеза Римана» не доказана до сих пор.

Наконец, приведём одно элементарное утверждение, эквивалентное гипотезе Римана: для всех  $n > 5040$  должно выполняться неравенство  $\sigma(n) < e^\gamma n \log \log n$ , где  $\sigma(n)$  – сумма делителей числа  $n$ , а  $\gamma$  – постоянная Эйлера

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,5772156649\dots$$



**Михаил Юрьевич Замятин**

Тьютор лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ, член центральной предметно-методической комиссии по физике, почетный работник общего образования РФ



**Антон Юрьевич Вергунов**

Преподаватель физики «Физтех-лицея» им. П.Л.Капицы

## Вариационные принципы механики. Метод виртуальных перемещений

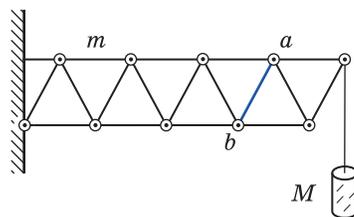
Энергетическими методами, рассматриваемыми в статье, можно существенно упростить решения задач статики, гидростатики, динамики и электростатики.

Обычно при исследовании равновесия систем пользуются двумя типами уравнений – равенством нулю векторной суммы сил, действующих на тела, которые входят в систему, и правилом моментов сил.

Это так называемый **силовой (невариационный) подход**. Чтобы записывать условия равновесия частей системы, приходится вводить внутренние силы (силы реакции связей). Чем больше таких связей в системе (нитей, стержней, блоков или шарниров), тем сложнее следить за возникающими в них силами.

Например, в изображенной на рисунке конструкции, состоящей из стержней массы  $m$ , совсем не просто определить даже направления

сил, действующих со стороны шарниров на выделенный цветом стержень  $ab$ , и еще сложнее найти их величины.



Итак, силовой подход неудобен, если неизвестны или неочевидны внутренние силы. Другим его недостатком порой становится необходимость решать систему из большого числа уравнений, а иногда и неизбежность применения сложного математического аппарата.

В подобных случаях на выручку приходят **энергетические (вариационные) принципы** (в частности метод виртуальных перемещений), преимущество которых в том, что они позволяют получать решения без учета внутренних сил, попросту не входящих в уравнения. Решения становятся

простыми, а иногда и очень изящными.

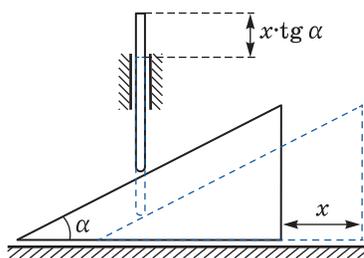
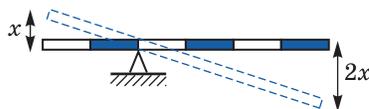
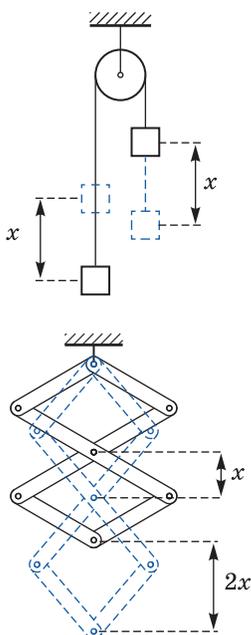
Идея энергетического подхода была сформулирована Иоганном Бернулли в 1717 г. в качестве нового способа решения статических задач. В дальнейшем вариационные принципы получили развитие в работах Даламбера и Лагранжа.

### Работа внутренних сил

**Связями** называют ограничения, которые наложены на положение отдельных частей системы или на возможности их перемещения (нити, удерживающие груз; шарниры, соединяющие отдельные части меха-

низма; плоскости, на которых находятся тела системы, и т. п.).

Примеры систем со связями с указанием соотношений перемещений отдельных их частей приведены на рисунках:



В основе энергетического метода лежит замечательное свойство сил реакций связей – **их суммарная работа при малом смещении системы от положения равновесия равна нулю.**

Заметим, что это свойство выполняется только если внутри связей не действуют силы трения, то есть связи идеальные.

Уточним, что подразумевается под «малым отклонением» системы от положения равновесия.

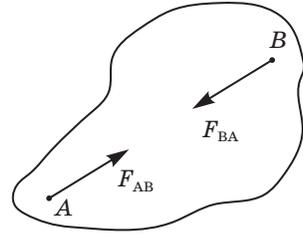
- Прежде всего перемещения не должны нарушать сами связи (нити не должны рваться, шарниры – ломаться и т.п.).

- Малость перемещений нужна для того, чтобы силы реакции можно было считать неизменными и чтобы существенно не изменялись углы, под которыми действуют силы реакции.

Такие перемещения называют возможными, или виртуальными. Их следует отличать от истинных перемещений, совершаемых под действием приложенных сил. Виртуальные перемещения не имеют отношения к процессу движения системы – они вводятся лишь для того, чтобы найти соотношения между силами и вывести условия равновесия.

Рассмотрим, какую работу выполняют силы идеальных связей на примере системы точек, образующих абсолютно твердое тело. Выделим какие-либо две точки  $A$  и  $B$  и обозначим силы реакции, действующие между ними, через  $\vec{F}_{AB}$  и  $\vec{F}_{BA}$  (первая из них приложена к точке  $A$ , вторая – к  $B$ ).

Забудем на время обо всех остальных точках тела, кроме двух



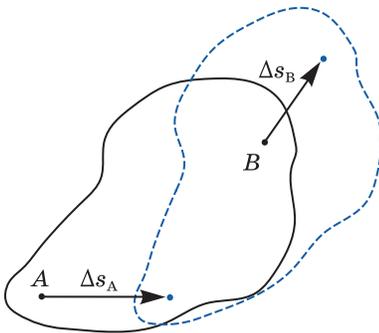
выделенных. Тогда у нас остается система двух материальных точек, соединенных невесомым жестким стержнем. По третьему закону Ньютона,  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ .

Мысленно сместим эти точки на  $\Delta\vec{s}_A$  и  $\Delta\vec{s}_B$  (см. рисунок а). Так как точка  $A$  не приближается и не удаляется от  $B$ , то можно считать, что  $\Delta\vec{s}_A$  – общее для обеих точек поступательное перемещение твердого тела как целого, а  $\Delta\vec{s}_B = \Delta\vec{s}_A + \Delta\vec{s}$ , где  $\Delta\vec{s}$  – перемещение, совершаемое при вращении точки  $B$  относительно точки  $A$  (см. рисунок б).

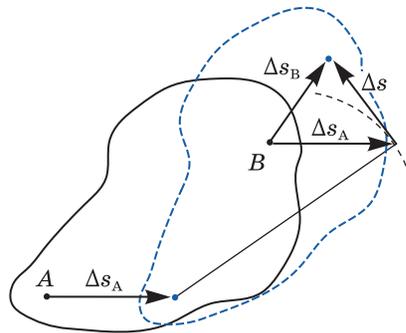
Полная работа сил реакции при этих виртуальных перемещениях равна:

$$A = (\vec{F}_{AB} \cdot \Delta\vec{s}_A) + (\vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{s}_B) =$$

$$= ((\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA}) \cdot \Delta\vec{s}_A) + (\vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{s}).$$



а



б

Первое слагаемое в правой части равенства равно нулю в силу третьего закона Ньютона. Равным нулю оказывается и второе слагаемое, так как перемещение  $\Delta\vec{s}$ , соответствующее вращению точки  $B$  относительно точки  $A$ , перпендикулярно силе  $\vec{F}_{BA}$ , направленной вдоль прямой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

## Работа внешних сил

Чтобы окончательно сформулировать энергетический принцип равновесия, остается рассмотреть виртуальную работу внешних сил. Заметим, что каждая приложенная к находящейся в равновесии системе внешняя сила должна уравновешиваться силой реакции, вызванной ею. Поэтому, если вычислить суммарную работу, совершаемую внешними силами и соответствующими им силами реакции связей при любом виртуальном перемещении, то она окажется равной нулю. Но внутренние силы реакции, как было показано выше, полной работы не совершают. Следовательно, при любом виртуальном перемещении полная работа внешних сил также должна быть равна нулю.

## Применение метода виртуальных перемещений

Существуют некоторые признаки, которые указывают на то, что метод может упростить решение задачи:

- в системе возникает много внутренних сил;
- характер внутренних взаимодействий сложен или вообще неизвестен;
- легко устанавливается связь между работой внешних сил и изме-

Аналогично равна нулю работа сил реакции и для любых других точек твердого тела. Таким образом, при виртуальном перемещении системы с идеальными связями полная работа всех внутренних сил оказывается равно нулю.

Итак, условие равновесия механической системы может быть сформулировано в виде (принцип виртуальных перемещений):

**для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех действующих на систему внешних сил при любых виртуальных перемещениях системы была равна нулю.**

Благодаря этому принципу для нахождения условий равновесия нет необходимости рассматривать большое число внутренних сил реакций связей. Достаточно выбрать удобные виртуальные перемещения, вычислить соответствующую им суммарную работу только внешних сил и приравнять ее нулю.

нением потенциальной энергии системы, вызванной этой работой, при малом смещении системы из положения равновесия.

Как метод применяется на практике?

1. Сначала определяем внешние силы, способные удерживать систему/часть системы в положении равновесия.

2. Допускаем, что внешние силы незначительно смещают систему/часть системы, и рассчитываем работу (возможно, суммарную работу) внешних сил.

3. Приравниваем найденную работу изменению энергии системы. Так как внешние силы не разгоняют систему, то учитываем лишь изменение потенциальной энергии и записываем закон сохранения энергии:

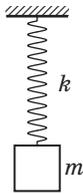
$$A_{\text{внеш}} + W_{\text{сист}1} = W_{\text{сист}2}$$

4. Сокращаем величину виртуального перемещения и находим внешние силы.

Проиллюстрируем применение метода виртуальных перемещений на примерах.

### Задача 1

Найдите силу упругости пружины, к которой подвешен груз массой  $m$ .



К грузу приложены две внешние силы – сила упругости пружины  $F$  и сила тяжести  $mg$ . Мысленно сместим груз, находящийся в равновесии, на малую величину  $\delta x$  вниз. Значком  $\delta$  (строчная буква дельта) здесь и далее будем обозначать малое виртуальное изменение какой-либо величины и элементарные виртуальные работы.

Работа силы тяжести положительная и равна:  $\delta A_1 = mg\delta x$ , а работа силы упругости отрицательная:  $\delta A_2 = -F\delta x$ .

По принципу виртуальных перемещений, сумма работ обеих сил равна нулю:

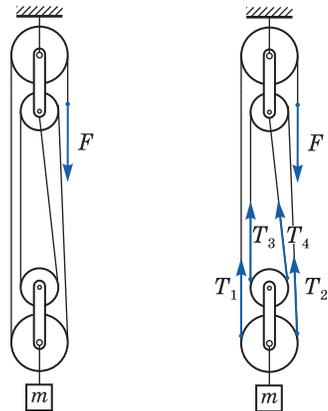
$$\delta A_1 + \delta A_2 = mg\delta x - F\delta x = 0,$$

откуда, сокращая  $\delta x$ , получаем ответ:  $F = mg$ .

Эту задачу, разумеется, проще решить обычным способом — используя условие равновесия тела, но на этом простом примере мы лишь демонстрируем суть метода.

### Задача 2 (Лагранжа).

В системе, изображенной на рисунке, к нижнему блоку подвешен груз массой  $m$ . Какую минимальную силу надо приложить к свободному концу нити, чтобы удержать систему в равновесии? Нити нерастяжимы, блоки невесомы. Нити между блоками можно считать параллельными.



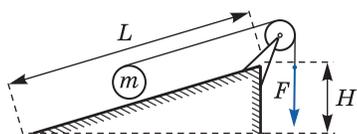
Пусть груз массой  $m$  переместится вертикально вверх на расстояние  $\delta h$ . При этом из-за нерастяжимости нити точка приложения силы  $F$  сместится вниз на расстояние  $\delta H = 4\delta h$ .

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 0; F\delta H - mg\delta h = 0.$$

Следовательно,  $F = mg/4$ .

### Задача 3

На поверхности клина лежит однородный цилиндр массой  $m$ , на который намотана нить, перекинутая через блок (см. рисунок). Какую силу  $F$  следует прикладывать к нити для того, чтобы удерживать цилиндр? Длина наклонной поверхности клина равна  $L$ , а высота  $H$ . Проскальзывания между цилиндром и клином нет.



При смещении конца нити на  $\delta x$  центр цилиндра смещается на  $\delta x/2$  (так как при движении без проскальзывания скорость верхней точки цилиндра всегда в два раза больше скорости его центра). Поэтому при смещении цилиндра на  $L$  конец нити опустится на  $2L$ . Центр цилиндра поднимется при этом на  $H$ . Запишем закон сохранения энергии для цилиндра:

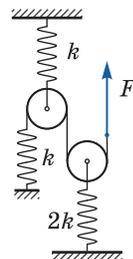
$$F2L = mgH, \text{ откуда } F = \frac{mgH}{2L}.$$

Заметим, что в решении не используются тригонометрические функции, и задача становится доступной для учеников 7 – 8-х классов.

Метод виртуальных перемещений можно применять не только для поиска сил, но и для расчета эквивалентной жесткости систем.

### Задача 4

Нить, перекинутая через блок, изначально не натянута. К свободному концу нити прикладывают силу  $F$ . Определите эквивалентный коэффициент жесткости системы.



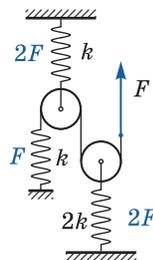
Жесткости отдельных пружин известны и указаны на рисунке.

В этой задаче легко проследить силы, действующие на разных участках системы. Приложим к концу нити силу  $F$  и тем самым увеличим энергию системы на величину  $\frac{F^2}{2k_0}$ .

Силы, возникающие в пружинах, найдем из условия равновесия элементов системы с учетом невесомости пружин, нитей и блоков (см. рисунок). Добавленная энергия запасется в пружинах, поэтому справедливо равенство:

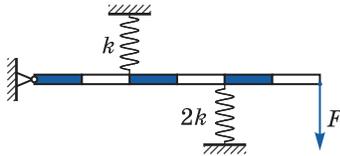
$$\frac{F^2}{2k_0} = \frac{4F^2}{4k} + \frac{4F^2}{2k} + \frac{F^2}{2k}.$$

Откуда  $k_0 = k/7$ .



### Задача 5

Найдите эквивалентную жесткость системы. Внешняя сила прикладывается к ней в месте, обозначенном на рисунке стрелкой.



В отличие от предыдущего примера в данной системе легче найти связь смещений точек крепления пружин и точки приложения внешней виртуальной силы  $F$ . Пусть точка крепления верхней пружины при воздействии на систему опустится на  $x$ . Тогда из-за жесткости рычага точка крепления нижней пружины опустится на  $2x$ , а точка приложения силы  $F$  на  $3x$ .

Энергия, запасенная в системе, распределится в пружинах и будет справедливо равенство:

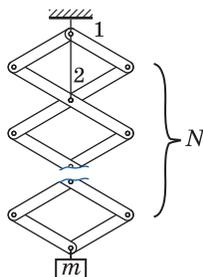
$$\frac{k_0(3x)^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{2k(2x)^2}{2}.$$

Откуда  $k_0 = k$ .

Из двух приведенных выше примеров видно, что в зависимости от ситуации для упрощения решения целесообразно применять разные формы записи энергии пружин.

### Задача 6

Цепочка содержит  $N$  одинаковых невесомых звеньев из скрепленных шарнирно легких реек (см. рисунок). Пренебрегая трением, определите, какое натяжение должна выдерживать нить, соединяющая точки 1 и 2, если к цепочке подвесить груз массой  $m$ .



Пусть груз массой  $m$  опустился на  $\delta H$ . Работа силы тяжести будет равна:  $\delta A_1 = mg\delta H$ .

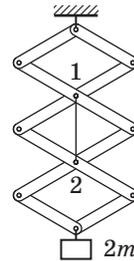
Работа силы натяжения:

$$\delta A_2 = -T\delta h.$$

Величину  $\delta H$  найдем из соображений симметрии. Вертикальная диагональ каждого из звеньев удлинилась на  $\delta h$ , что равно виртуальному перемещению точки 2. Поэтому  $mgN\delta h - T\delta h = 0$ , или  $T = Nm g$ .

### Задача 7

Система из трех одинаковых звеньев массой  $m$  каждое состоит из однородных стержней, соединенных шарнирно (см. рисунок). Пренебрегая трением, определите, какое натяжение должна выдерживать нить, соединяющая точки 1 и 2, если к системе подвесить груз массой  $2m$ .



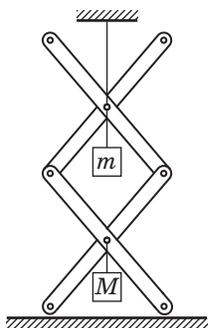
Мысленно разрежем удерживающую систему нить и к получившимся ее частям приложим силы  $T$ . Смещая концы разрезанной нити, уменьшим высоту верхнего ромба на  $\delta x$ . Тогда и остальные ромбы уменьшатся по высоте на  $\delta x$ . В результате груз поднимется на  $3\delta x$ , а центр масс конструкции на  $3\delta x/2$ . Запишем работу каждой из сил  $T$  и приравняем их сумму изменению потенциальной энергии груза:

$$\begin{aligned} -T\delta x + T2\delta x &= \\ &= 2mg3\delta x + 3mg3\delta x/2. \end{aligned}$$

Окончательно  $T = 21mg/2$ .

### Задача 8

Шарнирная конструкция, состоящая из четырех легких одинаковых стержней, удерживается нитью, привязанной к потолку, и опирается на гладкую горизонтальную поверхность. Если к шарнирам, соединяющим центры стержней, подвесить грузы массами  $m$  и  $M$ , сила натяжения верхней нити окажется равной  $T_1 = 30$  Н. При уменьшении массы верхнего груза вдвое сила натяжения нити уменьшится до  $T_2 = 20$  Н. Определите массы грузов  $m$  и  $M$  и силы реакции  $N$ , действующие на конструкцию со стороны горизонтальной поверхности.



Применим метод виртуальных перемещений. Заметим, что точка крепления верхнего груза расположена на высоте втрое большей, чем точка крепления нижнего. Поэтому, если переместить нижний груз на  $\delta x$ , верхний переместится на  $3\delta x$ . При равновесии системы сумма работ внешних сил при любых малых перемещениях системы равна нулю. Тогда  $3T\delta x - 3mg\delta x - Mg\delta x = 0$ .

Преобразуем это уравнение

$$T_1 = mg + Mg/3.$$

Если изменить массу верхнего груза, получим

$$T_2 = mg/2 + Mg/3.$$

Решая систему, получим  $m = 2$  кг,  $M = 3$  кг.

Равновесие системы возможно, если

$$Mg + mg = T + 2N,$$

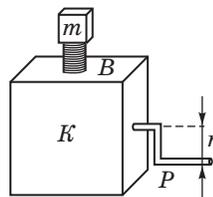
откуда

$$N = \frac{Mg + mg - T}{2} = \frac{30 + 20 - 30}{2} = 10 \text{ Н.}$$

В роли виртуального перемещения может выступать и угол.

### Задача 9

В коробке  $K$  скрыт передающий механизм неизвестной конструкции (см. рисунок). При повороте ручки  $P$  вертикальный винт  $B$  плавно поднимает груз массой  $m$ . При одном полном обороте (радиус ручки  $r$ ) винт поднимается на высоту  $h$ . Какую силу надо прикладывать к ручке, чтобы удерживать систему в равновесии?



Пусть искомая сила  $F$  при малом повороте на угол  $\delta\phi$  совершает работу

$$\delta A_1 = F\delta l = Fr\delta\phi.$$

При этом груз массой  $m$  поднимается на высоту  $\delta h = h\delta\phi/(2\pi)$  и работа силы тяжести равна

$$\delta A_2 = -mgh\delta\phi/(2\pi).$$

Тогда  $\delta A_1 + \delta A_2 = 0$ , или  $F = mgh/(2\pi r)$ .

Можно рассуждать немного иначе. Пусть рукоятка сделает полный оборот – груз при этом поднимется

на высоту  $h$ . Тогда будут совершены работы:

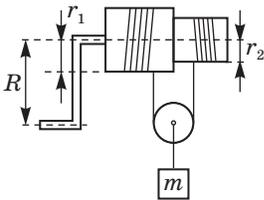
$$A_1 = 2\pi r \cdot F \text{ и } A_2 = -mgh,$$

откуда  $F = mgh / (2\pi r)$ .

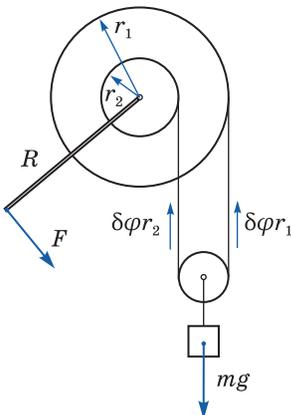
Заметим, что обычными силовыми методами задача вообще решена быть не может, так как ничего не известно о скрытом механизме передачи.

### Задача 10

На рисунке изображен дифференциальный ворот. Определите, какую силу  $F$  нужно прикладывать к рукоятке, чтобы груз массой  $m$  оставался в равновесии. Вал имеет радиусы  $r_1$  и  $r_2$ , а рукоятка –  $R$ .



Рассмотрим перемещение на малый угол (поворачиваем на  $\delta\varphi$  рукоятку, ворот поворачивается на такой же угол).



При этом перемещение конца рукоятки составит  $\delta\varphi \cdot R$ , левая нить укоротится на  $\delta\varphi \cdot r_2$ , правая – на  $\delta\varphi r_1$ .

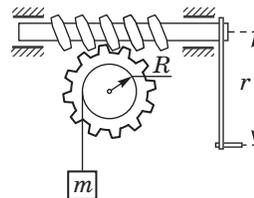
Тогда работа по перемещению рукоятки равна работе по подъему груза:

$$F \cdot \delta\varphi \cdot R = 0,5mg (\delta\varphi \cdot (r_1 + r_2)),$$

откуда:  $F = mg \cdot (r_1 + r_2) / (2R)$ .

### Задача 11

Определите, какую силу  $F$  необходимо прикладывать к рукоятке, чтобы удержать систему в равновесии. Масса груза равна  $m$ . Радиус вала, на который намотан трос, и радиус рукоятки равны  $R$  и  $r$  соответственно.

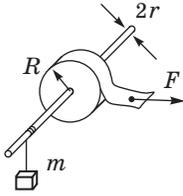


У шестеренки на рисунке 12 зубьев. Повернув ручку на полный оборот, мы повернем шестеренку на 1/12 оборота – на один зуб. Тогда

$$F \cdot 2\pi r = mg \cdot \frac{2\pi R}{12}, \text{ и } F = mg \cdot \frac{R}{12r}.$$

### Задача 12

На вал радиусом  $r$  прочно насажен моток скотча радиусом  $R$ . На этом же валу на нити висит груз массой  $m$  (см. рисунок). Если тянуть скотч с силой  $F$ , то груз будет подниматься с постоянной скоростью. С какой силой  $F_1$  надо тянуть скотч, чтобы с той же скоростью поднимать груз массой  $2m$ ?



Силы, возникающие в липком слое между витками ленты, с трудом поддаются описанию уравнениями статики. Поэтому применим энергетический подход. Действуя на скотч силой  $F$ , оторвем небольшой фрагмент длиной  $x$ . При этом работа силы  $F$  пойдет как на отрыв этого участка, так и на подъем груза на высоту  $h$ , которая находится из кинематической связи  $x/R = h/r$ . Т.е. справедливо равенство:

$Fx = \sigma x + mgh = \sigma x + mgxr/R$ , здесь  $\sigma$  – работа, необходимая для отрыва единицы длины скотча.

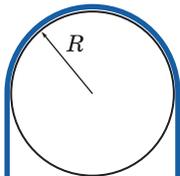
Запишем аналогичное уравнение для груза  $2m$ .

$$F_1 x = \sigma x + 2mgxr/R.$$

Вычитая из одного уравнения другое, получим  $F_1 = F + mgr/R$ .

### Задача 13

На гладком блоке радиусом  $R$  висит однородный гибкий канат массой  $m$  и длиной  $l$ . Найдите максимальную силу натяжения каната.



Чем выше расположена точка каната, тем сильнее в ней натяжение так как канат весомый. Применим метод виртуальных перемещений.

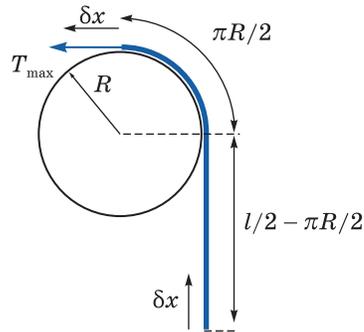
Для этого возьмем половину каната и сместим ее на малую величину  $\delta x$ .

Такое перемещение эквивалентно тому, как если бы мы взяли фрагмент длиной  $\delta x$ , отрезали его от каната снизу и переставили его к верхней части. Работа по такому перемещению фрагмента  $\delta x$  равна:

$$T_{\max} \cdot \delta x = \delta mg \cdot \left( \frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} + R \right).$$

Здесь  $\delta m$  – масса малого перемещаемого фрагмента,  $\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} + R$  – высота, на которую он переместился.

$$T_{\max} = \frac{\delta mg}{\delta x} \left( \frac{l}{2} - R \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right).$$



Так как канат однородный,  $\frac{\delta m}{\delta x} = \frac{m}{l}$ .

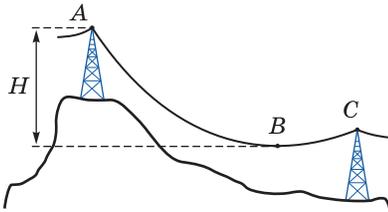
Поэтому

$$T_{\max} = \frac{mg}{l} \left( \frac{l}{2} - R \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right).$$

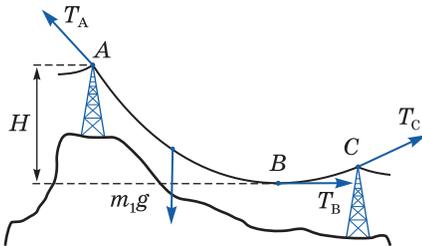
Заметим, что каждый малый фрагмент перемещается по дуге окружности, а силы реакции направлены по радиусам, то есть перпендикулярно перемещению фрагментов, и их работы равны нулю.

### Задача 14

В горах проведена линия электропередачи. Масса провода между двумя опорами  $m$ , его длина  $L$ . Расстояние по вертикали между нижней точкой  $B$  провода и местом крепления его к верхней опоре в точке  $A$  равно  $H$ . Длина участка  $AB$  провода равна  $l$ . Найдите максимальную силу натяжения провода.



Опоры расположены не на одинаковой высоте, поэтому длина провода между точкой крепления к верхней опоре и нижней точкой не равна половине длины провода, но известна и равна  $l$ .



Возьмем малый фрагмент провода массой  $\delta m$

$$\delta m = \frac{m}{L} \cdot \delta x$$

и переместим его из точки  $B$  в точку  $A$ .

Работа, которую мы совершим, равна изменению потенциальной энергии фрагмента:

$$\delta W = \delta m g \cdot (H_A - H_B) = mgH \delta x / L.$$

Эта же работа равна

$$T_A \delta x - T_B \delta x = (T_A - T_B) \delta x$$

$$mgH \delta x / L = (T_A - T_B) \delta x$$

$$T_A - T_B = mgH / L. \quad (*)$$

Силы  $T_A$  и  $T_B$  уравниваются силой  $m_1 g = mgl / L$  (здесь  $m_1$  – масса фрагмента  $AB$ ). Следовательно, образуется прямоугольный треугольник сил и для него можно записать

$$T_A^2 - T_B^2 = \left( \frac{mgl}{L} \right)^2.$$

Перепишем:

$$(T_A - T_B)(T_A + T_B) = \left( \frac{mgl}{L} \right)^2.$$

Подставим разность сил:

$$\frac{mgH}{L} (T_A + T_B) = \left( \frac{mgl}{L} \right)^2.$$

Откуда

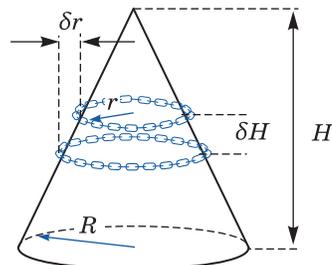
$$T_A + T_B = \frac{mgl^2}{HL}.$$

Складывая данное уравнение с

$$(*), \text{ получим: } T_A = \frac{mg}{2HL} (H^2 + l^2).$$

### Задача 15

Петля из гибкой тяжелой цепи массой  $m$  надета на гладкий конус, высота которого  $H$ , а радиус основания  $R$  (см. рисунок). Цепь покоится в горизонтальной плоскости. Найдите силу  $T$  натяжения цепи.



Пусть радиус окружности, образованной цепью, равен  $r$ . Виртуально сместим цепь как единое целое вертикально вниз на расстояние  $\delta H$ . Уменьшение потенциальной энергии цепи при этом окажется равным  $mg\delta H$ . Радиус цепи при таком перемещении увеличился на  $\delta r$ . Увеличение радиуса цепи и ее смещение связаны соотношением:

$$\delta r / \delta H = R / H$$

Работа сил натяжения  $T$  при рассматриваемом виртуальном перемещении цепи равна:

$$\delta A_1 = -(2\pi(r + \delta r) - 2\pi r)T = -2\pi \cdot \delta r T.$$

Сила тяжести при этом совершит работу:

$$\delta A_2 = mg \cdot \delta H.$$

Из принципа виртуальных перемещений

$$\delta A_1 + \delta A_2 = -2\pi \cdot \delta r T + mg \cdot \delta H = 0.$$

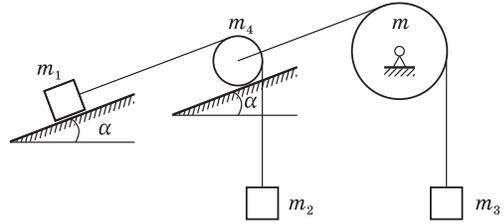
Находим

$$T = \frac{mg}{2\pi} \frac{\delta H}{\delta r} = \frac{mgH}{2\pi R}.$$

### Задача 16

Через блок массой  $m$  переброшена нить, к концам которой привязаны груз массой  $m_3$  и гладкий массивный цилиндр массой  $m_4$ , лежащий на гладкой наклонной плоскости (см. рисунок). Через цилиндр переброшена нить, к концам которой привязаны груз массой  $m_2$  и груз массой  $m_1$ , лежащий на параллельной гладкой плоскости. Определите массу груза  $m_3$  и угол  $\alpha$  наклона плоскости с горизонтом, если система находится в равновесии. Нити считайте невесомыми и нерастяжимыми.

Для нахождения угла наклона плоскости  $\alpha$  сместим груз  $m_2$  на малое расстояние  $\delta r_2$  вниз. При этом



груз  $m_3$  и цилиндр  $m_4$  останутся на месте, а груз  $m_1$  переместится на расстояние  $\delta r_1$  параллельно наклонной плоскости вверх.

Воспользуемся методом виртуальных перемещений:

$$m_2 g \delta r_2 - m_1 g \delta r_1 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{m_2}{m_1}.$$

Для нахождения массы груза  $m_3$  сместим груз  $m_3$  на малое расстояние  $\delta r_3$  вниз. При этом грузы  $m_2$  и  $m_1$  по отношению к цилиндру останутся в покое, а цилиндр вместе с прикрепленными к нему грузами переместится на расстояние  $\delta r_3$  параллельно наклонной плоскости вверх.

Воспользуемся методом виртуальных перемещений:

$$m_2 g \delta r_3 - m_4 g \delta r_3 \sin \alpha - m_2 g \delta r_3 \sin \alpha - m_1 g \delta r_3 \sin \alpha = 0,$$

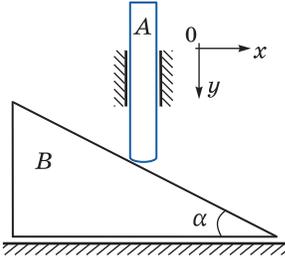
откуда

$$m_3 = (m_1 + m_2 + m_4) \sin \alpha = (m_1 + m_2 + m_4) \frac{m_2}{m_1}.$$

### Задача 17

Штифт  $A$  массой  $m$  может скользить в гладких вертикальных направляющих, опираясь своим нижним концом на гладкую поверхность

клина  $B$ , составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом. Клин может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Масса клина  $M$ . Найдите его ускорение.



Штифт и клин движутся поступательно. Между их перемещениями  $\delta x$  и  $\delta y$ , скоростями и ускорениями  $a_x$  и  $a_y$  существуют соотношения:

$$\delta y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta x, \quad v_y = \operatorname{tg} \alpha \cdot v_x, \\ a_y = \operatorname{tg} \alpha \cdot a_x.$$

Приравняем нулю сумму работ всех сил на виртуальном перемещении клина  $\delta x$  и получим:

$$N_y \delta y - N_x \delta x = 0,$$

где по второму закону Ньютона

$$N_y = mg - ma_y; \quad N_x = Ma_x.$$

$$\text{Тогда } (mg - ma_y) \delta y - Ma_x \delta x = 0,$$

$$\text{или } (mg - m \operatorname{tg} \alpha \cdot a_x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta x - Ma_x \delta x = 0.$$

Откуда

$$a_x = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Метод виртуальных перемещений успешно применяется не только в механике, но и при решении задач молекулярной физики и электростатики.

### Задача 18

Чему равно избыточное давление внутри сферического мыльного

пузыря радиусом  $r$ , если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен  $\sigma$ ?

Пусть мыльный пузырь радиусом  $r$  находится в равновесии. Мысленно увеличим его радиус на  $\delta r$ . Тогда суммарная виртуальная работа сил избыточного давления будет равна  $\delta A_1 = 4\pi r^2 p_{\text{изб}} \delta r$  (сила избыточного давления на каждом участке направлена по нормали к поверхности пузыря).

С другой стороны, виртуальная работа сил поверхностного натяжения равна изменению поверхностной энергии:

$$\delta A_2 = 2\sigma \cdot 4\pi(r^2 - (r + \delta r)^2) = -16\pi\sigma r \delta r$$

(здесь учтено, что у мыльного пузыря две поверхности и сделано пренебрежение квадратом малой величины  $\delta r$ ).

По принципу виртуальных перемещений:

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 4\pi r^2 p_{\text{изб}} \delta r - 16\pi\sigma r \delta r = 0.$$

$$\text{Откуда } p_{\text{изб}} = \frac{4\sigma}{r}.$$

### Задача 19

Электрический заряд  $Q$  равномерно распределен по тонкой жесткой металлической сфере радиусом  $R$ . Какая сила  $F$  действует на единицу площади поверхности со стороны остального заряда?

По условию сфера жесткая, поэтому ее радиус  $R$  изменяться не может. Однако представим себе, что в результате отталкивания одноименных электрических зарядов радиус сферы чуть-чуть увеличился на бесконечно малую величину  $\delta R$ , и каждая точка сферы совершила бесконечно малое перемещение  $\delta R$  в

направлении, перпендикулярном поверхности.

Потенциал поверхности сферы связан с ее зарядом соотношением  $\varphi = Q / 4\pi\epsilon_0\epsilon R$ . С другой стороны, согласно определению емкости  $\varphi = Q / C$ . Поэтому для заряженной сферы емкость равна  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$ , а энергия  $W = Q^2 / 2C = Q^2 / 8\pi\epsilon_0\epsilon R$ .

При увеличении радиуса энергия уменьшается до

$$W' = Q^2 / 8\pi\epsilon_0\epsilon(R + \delta R).$$

Таким образом, изменение энергии оказывается равным

$$\Delta W = W - W' = \frac{Q^2 \cdot \delta R}{8\pi\epsilon_0\epsilon R(R + \delta R)}.$$

По закону сохранения энергии, это изменение равно суммарной работе  $\delta A$  сил электростатического отталкивания, действующих между отдельными элементами заряженной поверхности.

Если  $F$  – сила, действующая на единицу площади сферы, то  $\delta A = 4\pi R^2 F \cdot \delta R$ . Следовательно,

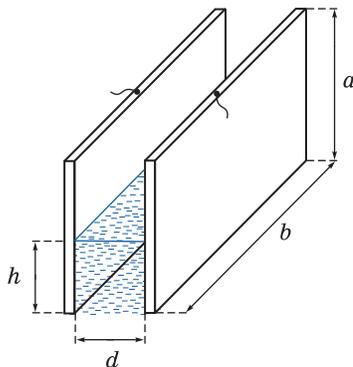
$$4\pi R^2 F \cdot \delta R = \frac{Q^2 \cdot \delta R}{8\pi\epsilon_0\epsilon R(R + \delta R)}.$$

Учитывая, что  $\delta R \ll R$ , находим

$$F = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 \epsilon R^4}.$$

### Задача 20

Жидкость плотностью  $\rho$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  налита в большой сосуд. Две расположенные вертикально параллельные пластины касаются ее поверхности (см. рисунок). Расстояние между пластинами  $d$ . Найдите установившуюся равновесную высоту  $h$  столба жидкости между пластинами



после того, как их подсоединят к источнику с разностью потенциалов  $U$ .

Рассмотрим систему в состоянии равновесия. Пусть размеры пластин  $a$  и  $b$ . Предположим, что столб жидкости виртуально смещается по высоте вверх на  $\delta h$ . Тогда работа силы тяжести  $\delta A_1 = -mg \cdot \frac{\delta h}{2} = -\rho g h b d \cdot \frac{\delta h}{2}$ .

Изменением массы столба жидкости из-за «втягивания» жидкости из сосуда в пространство между пластинами мы пренебрегаем, поскольку соответствующая работа силы тяжести по поднятию этой массы на высоту  $\delta h$  пропорциональна  $(\delta h)^2$ .

Работа сил электрического поля равна изменению энергии  $\delta W$  конденсатора, образованного пластинами, при виртуальном изменении высоты столба жидкости на  $\delta h$ :

$$\delta A_2 = \delta W = \delta \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2} \cdot \delta C \quad (\text{так как } U = \text{const}).$$

Рассматривая заполненную и не заполненную части конденсатора как два конденсатора, соединенных параллельно, получим выражение:

$$C = \frac{\epsilon_0 S_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon S_2}{d} = \frac{\epsilon_0 (a-h)b}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon h b}{d} = \frac{\epsilon_0 a b}{d} + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) h b}{d}.$$

Следовательно,

$$\delta C = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)b \cdot \delta h}{d}.$$

Таким образом,

$$\delta A_2 = \frac{\epsilon_0 U^2(\epsilon - 1)b \cdot \delta h}{2d}.$$

Применяя принцип виртуальных перемещений, получим:

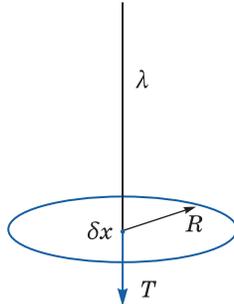
$$\frac{\epsilon_0 U^2(\epsilon - 1)b \cdot \delta h}{2d} - \rho g h d b \cdot \frac{\delta h}{2} = 0.$$

Откуда

$$h = \frac{\epsilon_0 U^2(\epsilon - 1)}{\rho g d^2}.$$

### Задача 21

Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиусом  $R$  и очень длинной равномерно заряженной нити, которая удерживается вдоль оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее обладает



зарядом  $Q$ . На единицу длины нити приходится заряд  $\lambda$ . Найдите силу взаимодействия кольца и нити.

Пусть к нижнему концу нити приложена сила  $T$ , удерживающая ее в равновесии. Эта сила равна силе, с которой нить отталкивается от кольца. Виртуально сместим нить вниз вдоль оси кольца на небольшое расстояние  $\delta x$ . Работа по этому перемещению будет равна изменению потенциальной энергии взаимодействия нити и кольца:  $T \cdot \delta x = \delta W_{\text{п}}$ .

Можно считать, что в целом нить не изменила своего положения в пространстве, но из бесконечности к центру кольца переместился небольшой фрагмент нити с зарядом  $\delta q = \lambda \delta x$ .

Тогда изменение потенциальной энергии системы равно  $\delta W_{\text{п}} = \delta q \frac{kQ}{R} = \frac{kQ\lambda \delta x}{R}$ , откуда сила взаимодействия равна:

$$T = \frac{kQ\lambda}{R}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

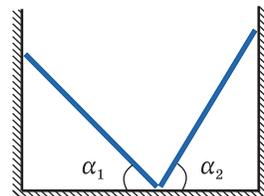
### Задача 22

Решите задачу 6, считая, что все рейки однородные и масса самой конструкции так же равна  $m$ .

### Задача 23

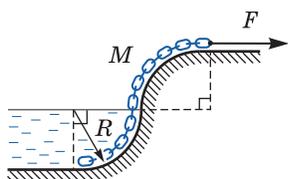
Два однородных стержня массами  $m_1$  и  $m_2$  опираются на гладкие вертикальные стенки и гладкую горизонтальную поверхность (см. рисунок). Найдите соотношение

между углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при равновесии системы.



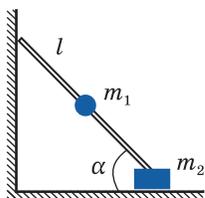
### Задача 24

На гладкой поверхности лежит тонкая массивная цепочка массой  $M$  (см. рисунок). Нижняя половина цепочки находится в жидкости с плотностью втрое меньше плотности материала цепочки. Поверхность состоит из двух частей, представляющих из себя четверти окружности одинакового радиуса. Какую силу  $F$  необходимо прикладывать к верхнему концу цепочки, чтобы она не скользила?



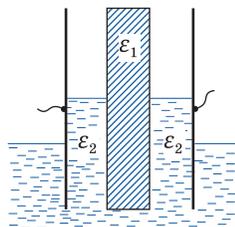
### Задача 25

Легкий стержень, на середине которого закреплен груз массой  $m_1$ , одним концом скользит по вертикальной стене, а другим прикреплен шарнирно к ползуну массой  $m_2$ , движущемуся горизонтально (см. рисунок). Найдите ускорение ползуна в начальный момент, когда стержень составляет угол  $\alpha$  с горизонтом.



### Задача 26

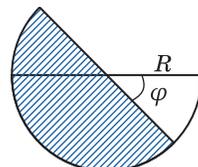
Между пластинами плоского воздушного конденсатора помещена диэлектрическая пластина толщи-



ной  $l_2$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  (см. рисунок). Конденсатор частично погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  и плотностью  $\rho$ . Пренебрегая капиллярными явлениями, найдите высоту  $h$  уровня жидкости в конденсаторе, если между его обкладками поддерживается разность потенциалов  $U$ . Суммарная ширина столбов жидкости в конденсаторе равна  $l_1$ .

### Задача 27

Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входит в зазор между неподвижными (см. рисунок). Все пластины имеют форму полукруга радиусом  $R$ , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с  $d$ . Найдите силу  $F$ , действующую на подвижную пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор подключен к источнику с разностью потенциалов  $U$ . Диэлектрическая проницаемость подвижной пластины  $\epsilon$



## Ответы

$$22. T = \frac{3}{2} Nmg;$$

$$23. \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{m_1}{m_2};$$

$$24. F = \frac{7}{3\pi} Mg;$$

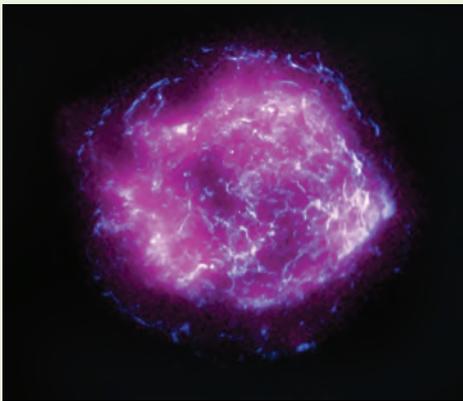
$$25. a = \frac{m_1 g \sin 2\alpha}{m_1 + 4m_2 \sin^2 \alpha};$$

$$26. h = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 - 1) U^2}{\rho g (\varepsilon_1 l_1 + l_2) (\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2)};$$

$$27. F = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U^2 R}{2d}.$$

## НОВОСТИ

### Рентгеновский космический телескоп IXPE прислал первый снимок



*Рентгеновское изображение Кассиопеи А по данным телескопов IXPE (пурпурный цвет) и «Чандра» (синий цвет)*  
NASA / CXC / SAO / IXPE

Новая рентгеновская космическая обсерватория IXPE передала на Землю первые научные данные, благодаря которым астрономы построили карту интенсивности рентгеновского излучения от остатка сверхновой Кассиопея А. Ожидается, что вскоре ученые впервые создадут благодаря телескопу карту поляризации рентгеновского излучения от туманности, сообщается на сайте NASA.

IXPE (Imaging X-ray Polarimetry Explorer) была запущена в космос в конце прошлого года и работает на околоземной орбите высотой 600 километров. Задачей обсерватории является измерения поляризации рентгеновского излучения от пульсаров, магнитаров, плерионов, двойных систем с черными дырами, активных

ядер галактик, квазаров и остатков сверхновых. Таким образом, астрофизики хотят узнать больше о процессах, связанных с подобными объектами.

Первой целью наблюдений IXPE стала Кассиопея А — остаток от взрыва массивной звезды (примерно в 16 раз тяжелее Солнца), который находится на расстоянии в 11 тысяч световых лет от Земли. Свет от взрыва дошел до нас около 325 лет назад. Размер расширяющейся туманности на сегодняшний день оценивается в десять световых лет, в ее центре находится нейтронная звезда. Кстати, Кассиопея А была и первой целью для рентгеновского телескопа «Чандра».

*Продолжение:* <https://nplus1.ru/news/2022/02/15/ixpe-first-photo>

**Александр Иннокентьевич Киркинский**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики, заслуженный преподаватель МФТИ, почётный работник ВПО РФ



## О некоторых физических понятиях и законах

В журнале «Потенциал» (2010, №12) напечатана статья профессора кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ) Д. В. Беклемишева «Об определениях и не только о них...». Статья эта очень важна, так как в ней речь идёт о введении начальных математических понятий — определений, различных видах определений, их значении для дальнейшего построения математических теорий. «Часто определение стоит в начале математических рассуждений: определяется новый объект и затем изучаются его свойства... С более близкой нам позиции человека, обучающегося математике (от себя добавим — и физике) всё сказанное означает, что нужно выработать в себе привычку твёрдо и точно помнить определения всех изучаемых понятий. Чтобы рассуждать уверенно, недостаточно «в общем-то представлять себе», что это такое. Приблизительное знание часто является источником ошибок». В своё время при изучении математики и физики в школе знанию определений придавалось очень большое значение. Это продолжалось и при учебе в МФТИ. Преподаватели предупреждали, что незнание определений сразу влечёт за собой неудовлетворительную оценку на экзамене. При этом подчёркивалось, что запоминание (и, следовательно, знание) определений должно основываться не на зазубривании соответствующих формул, а на понимании смысла вводимых понятий, необходимости их введения в нужном месте и применения их в дальнейшем.

В математике сложность введения определений связана ещё и с тем, что: «От объектов реального мира «математические» объекты отличаются тем, что органам чувств они недоступны ни непосредственно, ни с помощью каких-либо экспериментов. Всё, что мы можем узнать о таком объекте, основывается на его определении».

## О физических понятиях

Математика является аппаратом (как говорят, «языком») физики. Поэтому и в физике существуют аналогичные проблемы введения новых физических понятий, особенно если речь идёт о начальных понятиях, для которых нельзя ввести определения через известные предыдущие. Однако в физике мы имеем дело как раз с «осязаемыми», измеряемыми прямо или косвенно физическими величинами и, в принципе, можно определить (дать определение) физическое понятие, описав процедуру его измерения. Например, температура – одно из сложных физических понятий. В термодинамике её можно ввести как величину, определяющую направление теплообмена (при этом необходимо использовать физический закон – второе начало термодинамики), в молекулярно-кинетической теории – как величину, пропорциональную средней кинетической энергии поступательного хаотического движения молекул и т. д. Если спросить врача, что такое температура, то он может ответить так: «То, что показывает градусник (медицинский термометр), – это и есть температура». Можно считать, что для врача это неплохой ответ, так как температура здесь опреде-

ляется через способ измерения с помощью довольно точного («эталонного») измерительного прибора, и другие врачи однозначно поймут, о чем идёт речь.

Бывает так, что процедура измерения физической величины сама основывается на физическом законе, в который эта величина входит. Например, в электростатике точечные заряды взаимодействуют друг с другом с силой, пропорциональной произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними (закон Кулона). Но как мы можем это установить, если единицы измерения заряда сами вводятся на основании закона Кулона? Для этого нужно привлекать дополнительно ещё какие-то экспериментально подтверждаемые свойства зарядов. Например, что если имеются два одинаковых проводящих шарика, один из которых заряжен, а другой – нет, то при их соприкосновении заряды шариков станут одинаковыми, равными половине начального заряда первого шарика. В результате должна получиться непротиворечивая система «определение – закон», следствия из которой проверяются в дальнейших теориях и экспериментах.

## О понятии силы

В классической (нерелятивистской) механике одним из основных физических понятий является понятие силы. Это понятие было известно более чем за 2000 лет до механики И. Ньютона и использовалось, например, Аристотелем в его механике, Архимедом.

Сила определяется как физическая величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия тел, в результате которого происходит изменение движения тел или изменение их размеров и формы (деформация).

Здесь пока нет конструктивного определения силы, а говорится о том, для чего это понятие вводится, и содержатся указания, на основе чего её можно измерять: по изменению движения тел или их деформации. Выберем второй путь и будем измерять силу по удлинению «эталонной пружины» (динамометра), при этом нужны дополнительные предположения о свойствах этого динамометра, например, пропорциональность удлинения приложенной силе (закон Гука для пружины, в который входит понятие силы). Да-

лее необходимо сослаться на опытные факты, говорящие о том, что результат действия силы зависит не только от величины удлинения эталонной пружины, но и от её ориентации в пространстве, т. е. сила – вектор, и применимы соответствующие правила действий над векторами.

Если такого определения силы недостаточно, то можно обратиться к применению известного в математике аксиоматического метода определения понятия (см. статью Д. В. Беклемишева).

## Второй закон Ньютона. Масса

В классической механике в инерциальной системе отсчета для материальной точки имеет место II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

где  $\vec{a}$  – ускорение точки массой  $m$ ,  $\vec{F}$  – сила (или сумма сил), приложенная к этой точке. Строго говоря, пока написана только эта формула – это ещё не закон. Законом это становится тогда, когда мы пишем, говорим или хотя бы подразумеваем, что величина  $m$  – постоянная!

Фактически содержание второго закона Ньютона сводится к двум утверждениям:

- 1)  $\vec{a} \sim \vec{F}$ ;
- 2)  $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$ .

Первое утверждение устанавливает функциональную связь между ускорением и силой: ускорение прямо пропорционально силе. Второе утверждение является определением величины  $m$  как коэффициента пропорциональности между  $\vec{a}$  и  $\vec{F}$

во втором законе Ньютона. Из этих двух утверждений следует, что величина  $m$  является характеристикой тела, причем, чтобы сообщить определённое ускорение телу большей массы, к нему нужно приложить большую силу, т. е. изменить движение тела большей массы труднее. Поэтому величину  $m$  называют инертной массой, т. е. величиной, характеризующей инертные свойства тела, его способности сохранять состояние покоя или прямолинейного равномерного движения и препятствовать изменению этого состояния. Масса, как выясняется другими физическими законами, может характеризовать и другие физические свойства, но впервые встречающаяся в механике инертная масса – это коэффициент пропорциональности во II законе Ньютона.

В школьном курсе физики мы имеем дело, как правило, с постоянными силами и движениями с постоянным (в частности, равным нулю) ускорением. Однако II закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

справедлив, конечно, и тогда, когда сила — переменная величина, например, зависящая от времени. Тогда этот закон применим в каждый момент времени и связывает ускорение и силу в этот момент времени:

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(t).$$

Поскольку этот закон «локален» по времени, то возникает более сложный вопрос: может ли масса  $m$  зависеть от времени. При обсуждении второго закона Ньютона в виде  $m\vec{a} = \vec{F}$  мы указали, что масса может быть **только постоянной**. Существует точка зрения, что закон Ньютона в виде  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , как записывал его сам Ньютон, применимо и для описания движения тел с переменной массой. Приводятся примеры задач, которые, исходя из этого, решаются правильно. Вообще говоря,

## Другие примеры

Приведём ещё примеры физических законов, которые можно формулировать по принципу двух утверждений «закон — определение».

При рассмотрении так называемого сухого трения скольжения мы используем следующую самую простую модель:

- 1)  $F_{\text{тр ск}} \sim N$ ;
- 2)  $F_{\text{тр ск}} = \mu N$ .

Первое условие утверждает, что величина силы трения скольжения  $F_{\text{тр ск}}$  пропорциональна величине нормальной силы реакции опоры  $N$ , которая, по третьему закону Ньютона, равна нормальной «прижимаю-

это неверно. Действительно, распишем производную от импульса

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = \vec{F}.$$

Второе слагаемое содержит скорость, которая различна в разных ИСО, т. е. не выполняется принцип относительности Галилея.

Естественно, возникает вопрос, как правильно описывать движение тела с переменной массой. Ответ на него выходит за рамки обсуждаемой темы. Его даёт уравнение Мещерского, вывод которого, следствия и некоторые примеры применения предполагается рассмотреть в отдельной статье.

Говоря о втором законе Ньютона, отметим ещё, что вопрос о природе сил в правой части уравнения не связан с самим этим законом. Сам Ньютон, построив пример нахождения этой силы (закон всемирного тяготения), понимал это.

щей» силе, действующей на поверхность, по которой движется тело. Второе является определением коэффициента пропорциональности между  $F_{\text{тр ск}}$  и  $N$ . Из обоих условий следует, что в этой модели  $\mu = \text{const}$ .

В более сложных моделях сухого трения оказывается, что первое условие ( $F_{\text{тр ск}} \sim N$ ) не выполняется, второе же можно оставить только как определение коэффициента трения  $\mu$ . Законом же в этом случае становится получаемая теоретически или экспериментально зависимость

$$\mu = \varphi(v_{\text{отн}}),$$

где  $v_{\text{отн}}$  – относительная скорость перемещения одного тела вдоль поверхности другого.

Закон Ома для однородного (не содержащего ЭДС) участка цепи также можно сформулировать в виде двух утверждений:

- 1)  $I \sim U$ ;
- 2)  $I = \frac{1}{R}U$ .

Первое: сила тока  $I$  пропорциональна напряжению на этом участке  $U$ ; второе: определение сопротивления  $R$  как коэффициента пропорциональности между  $I$  и  $U$ . Из этого следует, что  $R = \text{const}$  (не зависит от  $I$ ,  $U$ ).

Электрические элементы (резисторы), для которых выполняется закон Ома в таком виде, называются линейными. При некоторых услови-

ях оказывается, что сопротивление резистора  $R$  само начинает зависеть от силы тока  $I$ . Тогда первое условие ( $I \sim U$ ) перестаёт выполняться, а равенство

$$R = \frac{U}{I}$$

можно использовать лишь как определение сопротивления теперь уже «нелинейного» резистора. Законом же здесь должна стать, например, зависимость  $R = R(I)$ , задаваемая аналитически или графически.

В заключение ещё раз обратим внимание на важность хорошего понимания и знания основных физических понятий, понимания содержания и смысла основных физических законов и на этой основе правильного их применения к решению различных физических задач.

## ЮМОР

### Эмоциональная формула

Рассказывают, как однажды на экзамене абитуриента попросили привести выражение для биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Заглянув в шпаргалку и набрав побольше воздуха, абитуриент закричал:

- Эн! Разделить на Ка! И на Эн минус Ка!
- Тише, почему вы так кричите? – изумился экзаменатор.
- Ну как же, здесь же расставлены восклицательные знаки...

(Цит. по книге: Жуков А. В. Вездесущее число «пи». М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»/URSS, 2009.)



**Владислав Сергеевич Попов**

Учитель информатики ГБОУ Цифровая школа,  
старший преподаватель кафедры «Информационные системы  
и телекоммуникации» МГТУ им. Н. Э. Баумана

## Переводим псевдокод, или Решение задачи № 12 ЕГЭ по информатике на обработку строк

Решим задание № 12 демонстрационного варианта ЕГЭ по информатике с помощью программ на языках программирования Python, C++, Pascal. Сокращённая формулировка задания:

*Какая строка получится в результате применения приведённой ниже программы к строке, состоящей из 70 идущих подряд цифр 8? В ответе запишите полученную строку.*

**НАЧАЛО**

**ПОКА** нашлось (2222) **ИЛИ** нашлось (8888)

**ЕСЛИ** нашлось (2222)

**ТО** заменить (2222, 88)

**ИНАЧЕ** заменить (8888, 22)

**КОНЕЦ ЕСЛИ**

**КОНЕЦ ПОКА**

**КОНЕЦ**

Ответ: 22.

## Решение задания на языке программирования Python

```
s = '8' * 70
while '2222' in s or '8888' in s:
    if '2222' in s:
        s = s.replace('2222', '88', 1)
    else:
        s = s.replace('8888', '22', 1)
print(s)
```

В первой строке программы при помощи умножения строки '8' на число 70 создана строка из 70 цифр «8».

Для проверки наличия подстроки в строке s применяется оператор in, но также можно применить метод find, который возвращает индекс начала подстроки или -1, если подстрока не найдена. Таким образом более простую запись условия '2222' in s можно заменить на s.find('2222') != -1:

```
s = '8' * 70
while s.find('2222') != -1 or s.find('8888') != -1:
    if s.find('2222') != -1:
        s = s.replace('2222', '88', 1)
    else:
        s = s.replace('8888', '22', 1)
print(s)
```

Замена строки s выполняется с помощью присваивания в строку s результата работы метода replace. Запись s = s.replace('2222', '88', 1) заменяет в строке s первое слева вхождение подстроки «2222» на подстроку «88» один раз. При работе с методом replace необходимо использовать оператор присваивания для изменения строки и указать третий аргумент метода – количество производимых замен в строке – равным 1.

В последней строке программы по завершении цикла while, работающего, пока его условие истинно, выполняется печать изменённой строки s.

## Решение задания на языке программирования C++

```
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;
int main()
{
```

```

string s(70, '8');
while (s.find("2222") != string::npos ||
      s.find("8888") != string::npos){
    if (s.find("2222") != string::npos){
        s.replace(s.find("2222"), 4, "88");
    }
    else{
        s.replace(s.find("8888"), 4, "22");
    }
}
cout << s << endl;
}

```

В первой строке функции main создаётся строка типа `string` с помощью конструктора, принимающего два параметра: первый – количество повторений символа, а второй – сам символ. Таким образом, при помощи вызова конструктора `string s(70, '8')` будет создана строка `s`, состоящая из 70 символов «8». Напомним, что символы в языке C++ указываются в апострофах (одинарных кавычках), а строки – в кавычках.

Для нахождения подстроки в строке применяется метод `find`, который возвращает индекс первого слева вхождения подстроки или константу `string::npos` (обычно равную -1), если подстрока не была найдена. Для замен в строке применяется метод `replace`, принимающий в качестве трёх аргументов индекс подстроки для замены, длину подстроки для замены и новую подстроку для вставки: например, вызов метода `s.replace(s.find("8888"), 4, "22")` заменит первое слева вхождение подстроки «8888» из 4 символов на подстроку «22».

## Решение задания на языке программирования Pascal

Решение с использованием подпрограмм для работы со строками в среде PascalABC.NET:

```

var
    s: string;
    p: integer;
begin
    s := '8' * 70;
    while (pos('2222', s) <> 0) or (pos('8888', s) <> 0) do
    begin
        if pos('2222', s) <> 0 then
        begin
            p := pos('2222', s);
            delete(s, p, 4);
            insert('88', s, p);
        end
    end
end

```

```
end
else
begin
    p := pos('8888', s);
    delete(s, p, 4);
    insert('22', s, p);
end;
end;
writeln(s);
end.
```

В данном решении были использованы следующие подпрограммы: pos (подстрока, строка) для поиска позиции первого вхождения подстроки в строке, если подстрока не найдена, функция pos возвращает значение 0, значение позиции первого символа в строке принято за 1; delete (строка, позиция, количество) для удаления заданного количества символов из строки, начиная с заданной позиции; insert (подстрока, строка, позиция) для вставки заданной подстроки в строку, начиная с заданной позиции. Совмещение функций delete и insert потребовалось ввиду отсутствия функции замены (replace) для строк в языке программирования Pascal, данная функция присутствует лишь в некоторых его диалектах.

Следует отметить, что оператор умножения для строк и чисел перегружен в PascalABC.NET, но не является перегруженным и не может быть применён во множестве других компиляторов. В случае использования другого компилятора для инициализации элементов строки можно воспользоваться циклом for. Будьте осторожны: размер строк типа string в некоторых компиляторах существенно ограничен и может быть меньше, чем требуемый в задании.

Также возможно решить данную задачу с использованием методов класса String в среде PascalABC.NET, при этом решение получится более простым:

```
var
    s: string;
begin
    s := '8' * 70;
    while s.Contains('2222') or s.Contains('8888') do
    begin
        if s.Contains('2222') then
            s := s.Replace('2222', '88', 1)
        else
            s := s.Replace('8888', '22', 1);
        end;
    writeln(s);
end.
```

Метод `Contains` возвращает значение `True`, если искомая подстрока входит в строку, метод `Replace` возвращает строку, полученную из исходной строки заменой указанного в третьем аргументе количества вхождений первого аргумента на второй аргумент. Метод `Contains` может быть заменён на метод нахождения индекса первого вхождения подстроки в строку: `s.Contains('2222')` можно заменить на `(s.IndexOf('2222') <> -1)`. Как и при решении задания на языке программирования Python, при вызове метода `Replace` необходимо не забыть указать количество замен равным 1 и присвоить возвращённое методом значение в строку – иначе строка не изменится.

Универсальный совет, подходящий для любого из рассмотренных решений: если выводить строку `s` после каждого изменения в теле цикла, то можно увидеть, каким образом будет работать алгоритм из задания, а также найти и исправить ошибки в написанном коде. Для этого оператор/функцию вывода нужно поместить в качестве последней инструкции в теле цикла.

В статье был рассмотрен простой способ решения задачи № 12 ЕГЭ по информатике на языках программирования Python, C++, Pascal, однако даже опытные программисты могут ошибаться, поэтому для контроля правильности ответа в первую очередь следует решить задачу самостоятельно, и только потом проверить полученный ответ на компьютере.

## МУДРЫЕ МЫСЛИ

Нельзя быть настоящим математиком, не будучи немного поэтом.

\*\*\*

...Между математикой и естественными науками должны быть установлены более глубокие взаимоотношения, чем те, которые имели бы место, если бы, например, физика видела в математике лишь вспомогательную дисциплину, пусть даже необходимую, а математика рассматривала вопросы, выдвигаемые физиками, только как обильное собрание примеров для своих методов.

\*\*\*

На вопрос: «Можно ли действительно получить что-либо непосредственно применимое из тех абстрактных теорий, которыми предпочтительно занимаются теперешние математики?» – я могу ответить, что греческие математики изучили свойства конических сечений чисто умозрительным путём задолго до того, как кто-либо мог предугадать, что эти кривые представляют собой пути, по которым движутся планеты, и я верю, что будет найдено ещё много функций с такими свойствами, как, например, знаменитые тета-функции Якоби, с помощью которых можно, с одной стороны, узнать, на сколько квадратов разлагается любое заданное число, которые позволяют спрямить дугу эллипса, и, с другой стороны, дают возможность найти истинный закон колебаний маятника.

*Карл Вейерштрасс, немецкий математик*



**Елена Тимофеевна Вовк**  
Зам. директора Учебного центра  
факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

## Методы скрытия данных в Excel

Достаточно часто при работе в MS Excel возникает ситуация, когда необходимо спрятать часть данных, содержащихся в таблице, не удаляя их. Это может быть конфиденциальная информация или данные, которые не влияют на анализ результатов. Иногда бывает необходимо защитить свой документ от случайного постороннего взгляда. В статье мы рассмотрим основные приемы, которые помогут читателю достичь описанных целей.

### Скрытие содержимого ячейки

- 1) Выделите ячейку или группу ячеек.
- 2) Щелкните по выделенному правой кнопкой мыши и выберите *Формат ячеек/Число*.
- 3) В открывшемся окне выберите вариант *все форматы*. В правой половине окна под заголовком *Тип* введите три подряд идущих символа «точка с запятой»: ;;; (рис. 1). Внутри ячейки ее содержимое пропадет, зато оно продолжит высвечиваться в строке формул.

Чтобы вновь отобразить данные в ячейке, назначьте им их первоначальный тип.

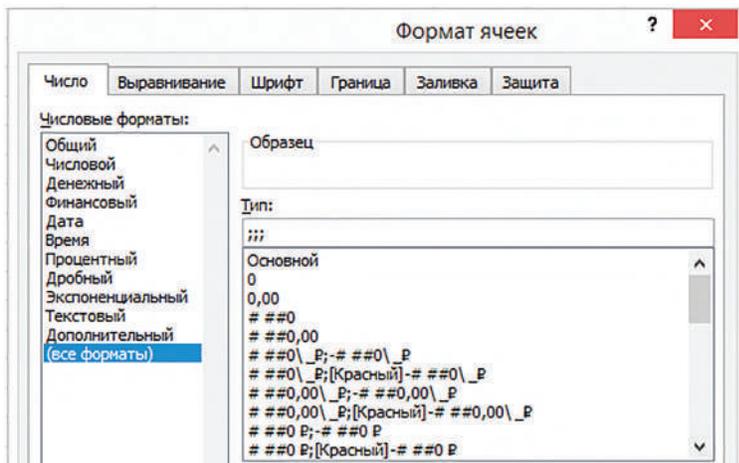


Рис. 1

## Скрытие строк/столбцов

1) Выделите строки/столбцы, которые хотите скрыть (рис. 2, а). Если строки/столбцы идут не подряд, выполняйте выделение щелчками при нажатой клавише <Ctrl>.

2) Щелкните по заголовку выделенных строк/столбцов правой кнопкой мыши и в открывшемся меню выберите *Скрыть* (рис. 2, б). Признак сокрытия строк/столбцов – нарушение их нумерации в столбце/строке заголовков (рис. 2, в).

	A	B	C
3			
4	Наименование	Кол-во	
5	Альбомы	10	
6	Карандаши	43	
7	Бумага	21	
8	Фломастеры	50	
9	Краски	18	
10	Линейки	15	

Рис. 2 а)

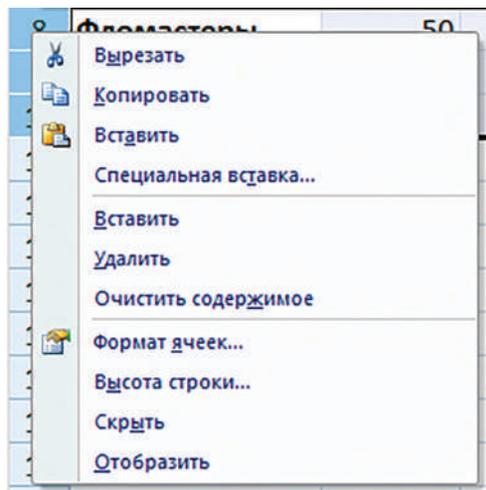


Рис. 2 б)

	A	B	C
3			
4	Наименование	Кол-во	
5	Альбомы	10	
6	Карандаши	43	
7	Бумага	21	
11			

Рис. 2 в)

Чтобы вернуть скрытые строки/столбцы на экран, выделите диапазон строк, где нарушена нумерация (минимум две строки), и, щелкнув правой кнопкой мыши по выделенному, выберите команду *Отобразить*.

## Скрытие перемещением границ

Предположим, вы хотите убрать с экрана столбец В.

Установите курсор на правую границу столбца в строке заголовков (курсор превратится в двунаправленную стрелку). Нажмите кнопку мыши и, не отпуская ее, переместите границу налево практически до совмещения с левой границей колонки (рис.3).

	A	B	C
3			
4	Наименование	Кол-во	
5	Альбомы	10	
6	Карандаши	43	
7	Бумага	21	
8	Фломастеры	50	
9	Краски	18	
10	Линейки	15	

Рис. 3

Столбец В исчез. О его присутствии говорит нарушение последовательного именования столбцов: вместо А В С D в заголовке столбцов идет А С D.

Чтобы содержимое столбца вновь появилось на экране, правую границу придется вернуть на прежнее место или воспользоваться способом, описанным в предыдущем разделе (команда *Отобразить* из контекстного меню).

Скрытие строк выполняется аналогичными действиями в столбце заголовков строк.

## Скрытие строк/столбцов группировкой

Предположим, вы хотите убрать с экрана строки 8, 9, 10.

- 1) Выделите строки, которые надо скрыть.
- 2) Переключитесь на вкладку *Данные*. В группе *Структура* выберите команду *Группировать*.
- 3) Слева от столбца заголовков высветились вертикальные линии со знаками «+» или «-». Щелчок по значку «-» скроет сгруппированные строки, щелчок по значку «+» вернет строки на экран (рис. 4).

Аналогичного результата можно добиться, если воспользоваться двумя кнопками , которые появились в левом верхнем углу после выполнения команды *Группировать*.

1 2		А	В
	3		
	4	Наименование	Кол-во
	5	Альбомы	10
	6	Карандаши	43
	7	Бумага	21
	8	Фломастеры	50
	9	Краски	18
	10	Линейки	15
	11		

Рис. 4 а)

1 2		А	В
	3		
	4	Наименование	Кол-во
	5	Альбомы	10
	6	Карандаши	43
	7	Бумага	21
	11		

Рис. 4 б)

Действия по группировке столбцов производятся по той же схеме.

Чтобы привести таблицу к первоначальному виду, выделите сгруппированные строки и выполните команду *Разгруппировать* в группе *Структура*.

**Замечание.** Если перед выполнением команды группировки вы выделите строки/столбцы не целиком, а частично (интервал ячеек), на экран будет выведено дополнительное окно (рис. 5) с вопросом, что вы хотите сгруппировать – строки или столбцы?

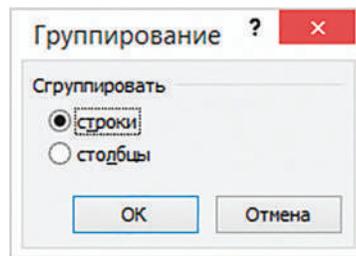


Рис. 5

## Использование фильтров для скрытия данных

С помощью фильтров вы можете оставить высвечиваться на листе только те данные, которые удовлетворяют определенным условиям. Этот метод может быть применен только к тем таблицам, которые имеют заголовки столбцов.

1) Установите курсор в одной из ячеек таблицы.

2) На вкладке *Данные* в группе команд *Сортировка и фильтр* щелкните по кнопке *Фильтр*.



3) В заголовках столбцов таблицы появятся изображения кнопок со стрелками. Если щелкнуть по такой кнопке, откроется список всех возможных критериев отбора записей.

Рассмотрим пример на рис. 6. В столбце «Наименование», оставив пометку у вариантов «Бумага» и «Краски» (рис. 7), вы отобразите на экране строки, относящиеся к этим категориям. Все остальные строки исчезнут (рис. 8).

	Наименование	Кол-во	Цена за шт. (руб.)
4	Альбомы	10	210
5	Карандаши	43	55
6	Бумага	21	230
7	Фломастеры	50	120
8	Краски	18	344
9	Линейки	15	145

Рис. 6

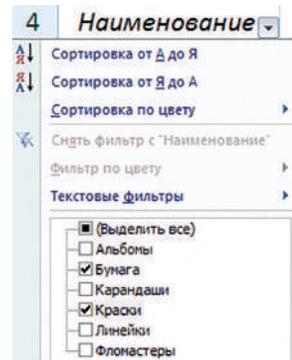


Рис. 7

	Наименование	Кол-во	Цена за шт. (руб.)
7	Бумага	21	230
9	Краски	18	344

Рис. 8

В столбце «Количество» воспользуемся числовым фильтром, а именно – выберем данные, которые превышают значение 20 (рис. 9).

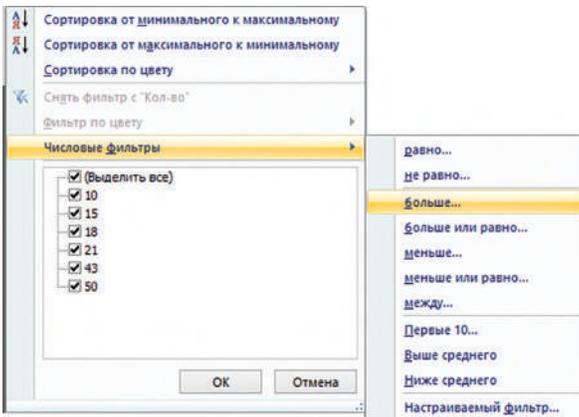


Рис. 9 а)

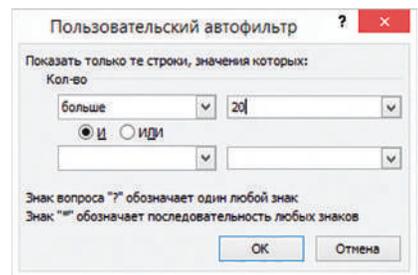


Рис. 9 б)

Результат отбора показан на рис. 10.

Чтобы вернуть на лист скрытые данные, надо пометить вариант *Выделить все*.

	Наименование	Кол-во	Цена за шт. (руб.)
4			
6	Карандаши	43	55
7	Бумага	21	230
8	Фломастеры	50	120
11			

Рис. 10

### Скрытие цветом фона

Мы совсем забыли про самый простой способ скрыть текст – покрасить символы в цвет фона. Обычно это белый цвет.

### Скрытие листа

Щелкните по ярлычку листа у нижней границы окна правой кнопкой и в открывшемся списке команд выберите *Скрыть*.

Чтобы отобразить лист, щелкните по ярлычку любого листа, выберите *Отобразить*, а затем имя листа, который надо высветить на экране.

Наименование	Кол-во	Цена за шт. (руб.)	Стоимость
Альбомы	10	210	2100
Карандаши	43	55	2365
Бумага	21	230	4830
Фломастеры	50	120	6000
Краски	18	344	6192
Линейки	15	145	2175
<b>Итого:</b>			23662

а)

### Трассировка данных в формулах при использовании скрытых ячеек

Скрытие ячеек никак не влияет на результат выполнения операций над ними. На рис. 11 вы видите процесс преобразования таблицы, в которой подсчитан столбец «Стоимость» как результат умножения «количества» на «цену».

а – исходная таблица.

б – столбец «Количество» скрыт; данные в столбце «Стоимость» не изменились.

в – стрелка указывает, какие ячейки влияют на результат в столбце «Стоимость». Это результат выполнения команды «Влияющие ячейки» из вкладки *Формулы*, области *Зависимости формул* для значения в третьей строке столбца «Стоимость».

Наименование	Кол-во	Цена за шт. (руб.)	Стоимость
Альбомы		210	2100
Карандаши		55	2365
Бумага		230	4830
Фломастеры		120	6000
Краски		344	6192
Линейки		145	2175
<b>Итого:</b>			23662

б)

Наименование	Кол-во	Цена за шт. (руб.)	Стоимость
Альбомы		210	2100
Карандаши		55	2365
Бумага		230	4830
Фломастеры		120	6000
Краски		344	6192
Линейки		145	2175
<b>Итого:</b>			23662

Рис. 11 в)

## Скрытие комментариев

При вставке комментария к ячейке по умолчанию сам комментарий «гаснет», но в ячейке остается индикатор комментария в виде красного треугольника, как в столбце «Стоимость» на рис. 12.

Для любого комментария можно задать режим постоянного отображения на листе с помощью контекстного меню ячейки с комментарием. Если необходимо вывести на экран все комментарии (рис. 13), удобнее пользоваться командой *Показать все комментарии* во вкладке *Рецензирование*, группе *Примечания*.

Наименование	Кол-во	Цена за шт. (руб.)	Стоимость
Альбомы	10	210	2100
Карандаши	43	55	2365
Бумага	21	230	4830
Фломастеры	50	120	6000
Краски	18	344	6192
Линейки	15	145	2175
Итого:			23662

Рис. 12

Наименование	Кол-во	Цена за шт. (руб.)	Стоимость
Альбомы	10	210	2100
Карандаши	43	55	2365
Бумага	21	230	4830
Фломастеры	50	120	6000
Краски	18	344	6192
Линейки	15	145	2175
Итого:			23662

Рис. 13

Чтобы «уничтожить» все следы комментария на листе, надо уметь скрывать индикаторы примечания – красные треугольники. За их отображение на листе отвечают параметры программы Excel.

Нажмите кнопку *Файл* (или войдите в меню *Файл*) и выйдите на *Параметры Excel*. В разных версиях MS Office это делается по-разному.

Найдите раздел *Дополнительно*, а затем список параметров, относящихся к экрану (рис. 14). Под заголовком «Для ячеек с примечаниями показывать» находятся необходимые настройки.

Помечаете переключатель *ни примечания, ни индикаторы*, и от комментариев в книге не остается и следа.

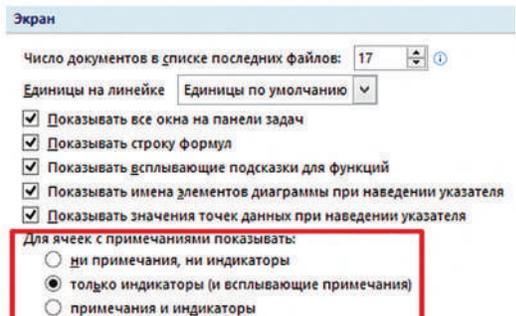


Рис. 14

# ДЕМОНСТРАЦИИ И ОПЫТЫ

**Валерий Вильгельмович Майер**

Доктор педагогических наук, профессор,  
заведующий кафедрой физики и дидактики  
физики Глазовского государственного  
педагогического института



**Екатерина Ивановна Вараксина**

Кандидат педагогических наук, доцент  
кафедры физики и дидактики физики  
Глазовского государственного  
педагогического института



## Развиваем физическое мышление свое и своих одноклассников

На примере изучения силы Ампера по учебнику 11 класса показано, что простые демонстрационные опыты обеспечивают развитие физического мышления обучающихся.

### Введение

Физическое мышление развивается при изучении физической теории и решении относящихся к ней физических задач. Спорить с этим утверждением не имеет смысла хотя бы потому, что оно верно. Но тогда почему выпускники школы умеют *быстро решать* физические задачи, но испытывают трудности при объяснении физических явлений, к которым эти задачи относятся? Можно предположить, что достигнутый к настоящему времени теоретический уровень школьного курса не вполне способствует формированию и развитию физического мышления, так как он недостаточно опирается на физический эксперимент. В самом деле, как можно рассуж-

дать о теории явления, если в голове нет мысленного образа этого явления? Но его нет просто потому, что большинство обучающихся никогда не видели того, что они пытаются понять, выразив это формулами.

В школе, особенно в старших классах, на каждом уроке физики должны быть опыты, причем не в качестве иллюстрации изучаемой теории, а как основные этапы научного познания изучаемого явления, имеющие статус *экспериментальных доказательств*. Поэтому здесь мы предлагаем на конкретном примере изучения силы Ампера разобраться, что такое физическое мышление и как его можно развивать дома и в школе, у себя и своих одноклассников.

## Сила Ампера в школьном учебнике

Раскроем учебник физики для 11 класса и познакомимся с содержанием параграфа, в котором речь идет о модуле вектора магнитной индукции и силе Ампера [1, с. 11–16].

### Экспериментальная установка.

Начинается параграф с описания экспериментальной установки, схематически изображенной на рис. 1.

Между полюсами подковообразного магнита расположен проводник в виде металлического стержня, подвешенного горизонтально на двух нитях. Концы этого проводника

через амперметр и ключ изолированными проводами соединены с источником тока. Сила Ампера  $\vec{F}$ , действующая в магнитном поле на проводник с током, «измеряется с помощью весов, связанных с проводником двумя стерженьками». На рисунке ни весы, ни стерженьки не показаны. Тем не менее утверждается, что эта сила действительно существует, причем «направлена горизонтально, перпендикулярно проводнику и линиям магнитной индукции».

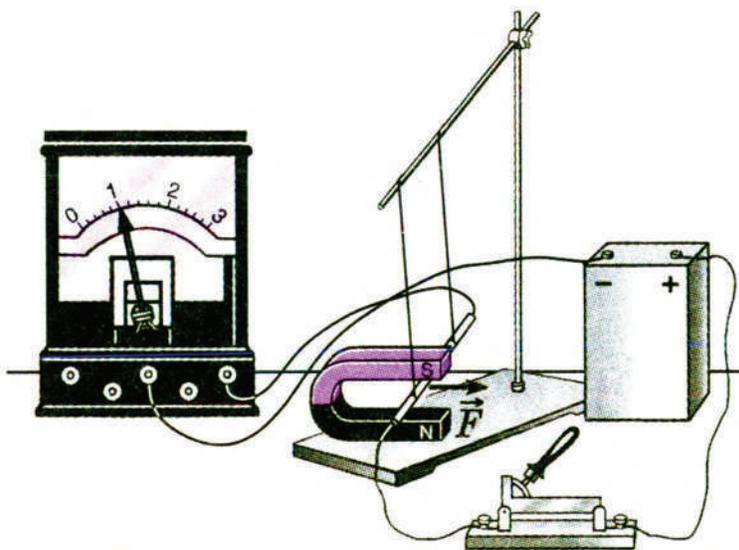


Рис. 1

**Вывод.** В учебнике описана установка, внешне похожая на такую, которую нетрудно собрать из имеющегося в школьном кабинете физики учебного оборудования и затем с ее помощью измерить силу, действующую в магнитном поле на проводник с током. В действительности сделать

это невозможно: учебник просто лукавит. Поэтому ничем не обоснованы его утверждения о существовании и направлении этой силы.

### Умозрительные эксперименты.

Далее в учебнике говорится, что сначала силу тока  $I$  в проводнике увеличивают в 2 раза, затем также в

2 раза увеличивают длину участка проводника  $\Delta l$ , на который действует магнитное поле. При этом обнаруживают, что в каждом из этих опытов сила, действующая на проводник с током, увеличивается также в 2 раза. В следующем воображаемом опыте, изменяют наклон подставки, «на которой находятся магниты», забывая, что на установке (рис. 1) сделать это невозможно. Тем не менее приходят к заключению, что действующая на проводник «сила достигает максимального значения  $\vec{F}_m$ , когда вектор магнитной индукции перпендикулярен проводни-

ку», причем максимальная сила Ампера «прямо пропорциональна произведению силы тока  $I$  на длину участка  $\Delta l$  проводника:  $F_m \sim I \cdot \Delta l$ ».

**Вывод.** Описанные в учебнике умозрительные опыты не имеют доказательной силы и не создают наглядных образов реальных физических явлений, а приведенные количественные соотношения ничем не обоснованы. Таким образом, учебник в этом параграфе развивает тот стиль мышления, который характеризуется слепой верой в авторитеты. В физике, конечно, авторитеты есть, но вот веры в них нет.

## Несколько слов о физическом мышлении

Физическим называют мышление, которое происходит в процессе научного познания физических явлений. Суть научного познания еще в 1952 году раскрыл в простой циклической схеме А. Эйнштейн [2, с. 569–570]. Прошло немногим более 20 лет, и появилась книга российского педагога В. Г. Разумовского [3], в которой он показал фундаментальное значение цикла научного познания для формирования и раз-

вития физического мышления обучающихся в школе.

На рис. 2 цикл научного познания изображен в форме, которая подчеркивает, что в физической науке теория и эксперимент имеют одинаковую значимость. Физическая теория опирается на экспериментальные и теоретические факты, на основе которых строится сначала качественная физическая, а затем количественная математиче-

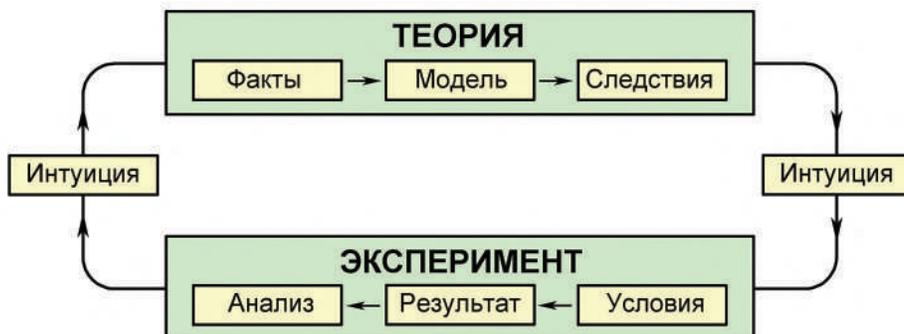


Рис. 2

ская модель явления. Из теоретической модели выводятся *следствия*, которые нуждаются в экспериментальной проверке. Физический эксперимент начинается с создания *условий*, при которых возникает исследуемое явление. Выполнение эксперимента приводит к получению его *результата*, интерпретация и *анализ* которого дает новые факты, развивающие или опровергающие теорию.

В этом цикле в процессе отбора фактов развиваются *дедуктивное* и *индуктивное* мышление. При переходе от эксперимента к теории и от теории к эксперименту развивается *интуитивное* мышление. Вывод следствий из теоретической модели осуществляется, главным образом, дедуктивными рассуждениями, определяющими *логическое* мышление. Несовпадение результатов эксперимента с выводами теории поро-

ждает *парадоксы*, преодоление которых способствует развитию *диалектического* мышления. Все эти виды мышления тесно переплетены, и отделить один от другого нелегко.

Поэтому при изучении физики вам нет особой необходимости задумываться о формах своей мыслительной деятельности. Важно отчетливо представлять себе цикл научного познания и систематически использовать его на практике [4]. Для этого нужно помнить основные структурные компоненты физической теории и физического эксперимента. Необходимо все доступные физические явления активно наблюдать на школьных уроках или исследовать во внеурочной деятельности. Это обогатит память наглядными образами физических объектов и процессов, без которых невозможно продуктивное физическое мышление.

## Исследовательский проект по созданию прибора для демонстрации силы Ампера

Итак, главным препятствием к развитию физического мышления при изучении силы Ампера является несуразная демонстрационная установка (рис. 1), описанная в учебнике. Есть два пути устранения недостатков этой установки. Первый заключается в создании надежного и достаточно точного способа определения направления и измерения модуля силы Ампера. Второй состоит в отказе от точных измерений в пользу разумных экспериментальных оценок. Этот второй способ изучения силы Ампера явно предпочтительнее, так как он более прост, доступен, дает вполне убедительные ре-

зультаты, создает наглядный образ физического явления, осуществляется в цикле научного познания и поэтому эффективно развивает физическое мышление обучающихся.

Вы уже поняли, что нужно разработать простой прибор для демонстрации силы, с которой магнитное поле действует на проводник с током, чтобы на качественном или полуколичественном уровне обосновать справедливость закона Ампера.

Спросим себя, как можно судить о силе, действующей на тело? Ответ знает каждый семиклассник: нужно посмотреть, насколько при взаимодействии тел изменяются их скоро-

сти. Сразу возникает идея: чтобы оценить направление и величину силы Ампера, необходима электромагнитная пушка – прибор, который позволяет с помощью магнитного поля выстрелить проводником с током. Чем больше скорость проводника, тем больше сила, с которой на него действует пушка. Противоположно направленной силой, с которой проводник действует на неподвижную пушку и Землю, на которой она стоит, увы, придется пренебречь.

Найдите несколько одинаковых кольцевых или прямоугольных керамических магнитов и подготовьте два одинаковых дюралевых уголка с гладкими ребрами, прямую гладкую дюралевую трубку и батарейку на 4,5 В или два больших гальванических элемента на 1,5 В. С этим оборудованием уже можно начать экспериментировать дома и в школе, выполняя исследовательский проект по экспериментальному изучению силы

Ампера. Понятно, что предназначенная для демонстрационных опытов пушка не должна стрелять слишком далеко – вполне достаточно, чтобы снаряд пролетал не более 10–20 см. Смело экспериментируйте – опыты с перечисленным оборудованием совершенно безопасны. Авторам сложнее, так как они обязаны описать безусловно работоспособный вариант установки и опыты с ним.

Фотография одного из возможных вариантов демонстрационной установки показана на рис. 3. Два одинаковых дюралевых уголка размером  $25 \times 25 \times 100$  мм приклеены двусторонним скотчем к подъемному столику и образуют параллельные рельсы. На горизонтальных полках уголков лежат керамические магниты, а на вертикальных находится дюралевая трубка диаметром 5 мм и длиной 120 мм с расположенными на ее концах разноцветными флажками из изолянт. Эти флажки

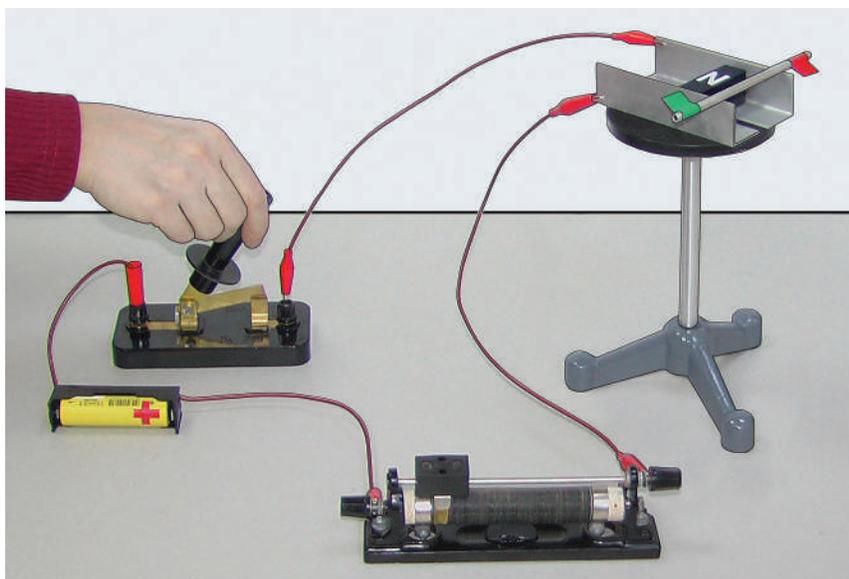


Рис. 3

служат индикаторами вращения трубки при движении ее по рельсам, но их можно заменить вырезанным из изолона квадратом размером  $8 \times 20 \times 20$  мм, который создает меньшее сопротивление движению. В установке использованы три одинаковых плоских керамических магнита размером  $6,5 \times 15,5 \times 45$  мм от мебельных защелок. Расстояние от

трубки до ближайшей поверхности магнитов не превышает 2–3 мм. Вместо батареи гальванических элементов использован литиевый аккумулятор на 3,7 В, который соединен с рельсами через реостат на 6 Ом и ключ. Установку лучше собирать на глазах класса и затем провести на ней следующую серию демонстрационных опытов.

## Демонстрационные эксперименты

Перед опытами определяют и обозначают полюсы керамических магнитов. Для этого достаточно поднести керамические магниты к демонстрационной магнитной стрелке, имеющейся в школьном кабинете физики. В крайнем случае вместо большой демонстрационной намагниченной стрелки можно использовать компас. Но найти полюсы магнитов и показать, что вектор магнитной индукции направлен от северного полюса перпендикулярно его плоскости, совершенно необходимо.

**Опыт 1. Существование силы Ампера.** На рельсы над магнитами положите дюралевую трубку, реостатом установите сопротивление примерно 2 Ом и замкните ключ. Ваши одноклассники увидят, что проводник с током приобретает им-

пульс в горизонтальном направлении, катится по рельсам и сбрасывается с них. Вывод: на проводник с током со стороны магнитного поля действует сила Ампера в направлении, перпендикулярном полю и направлению тока в проводнике. Величину этой силы можно оценить по приобретаемой проводником максимальной скорости, от которой зависит дальность его полета.

**Опыт 2. Правило левой руки.** Сформулируйте правило левой руки и, используя свою руку, покажите классу, что когда вектор магнитной индукции входит в ладонь, а четыре пальца вытянуты в направлении идущего по проводнику тока, то отогнутый большой палец показывает направление силы Ампера (рис. 4.1). Повторите предыдущий опыт, последовательно пе-

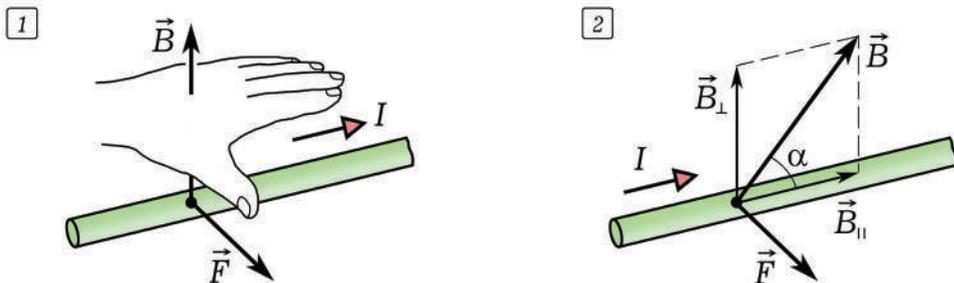


Рис. 4

реворачивая магниты и изменяя направление тока в лежащем на рельсах проводнике. Покажите, что во всех четырех случаях правило левой руки работает правильно.

**Опыт 3. Зависимость силы Ампера от силы тока.** Передвиньте движок реостата так, чтобы его сопротивление уменьшилось, и повторите опыт, замкнув ключ. При этом подвижный проводник улетает дальше. Следовательно опыт показывает, что при увеличении силы тока, идущего по находящемуся в магнитном поле проводнику, сила Ампера также увеличивается. Поэтому можно сделать самое простое предположение, что сила Ампера прямо пропорциональна силе тока:

$$F \sim I.$$

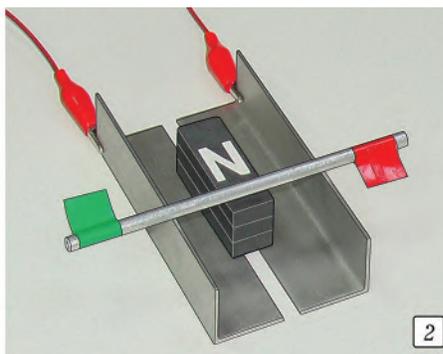
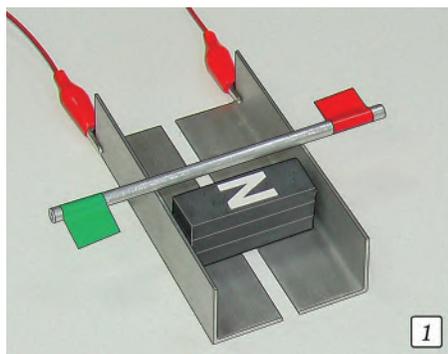


Рис. 5

**Опыт 5. Зависимость силы Ампера от индукции магнитного поля.** Уберите один из трех магнитов, уменьшая тем самым величину магнитной индукции. При этом сила Ампера также уменьшается. Следовательно, можно предположить, что сила Ампера пропорциональна индукции магнитного поля:

$$F \sim B.$$

**Опыт 6. Зависимость силы Ампера от направления магнитного**

**Опыт 4. Зависимость силы Ампера от длины проводника с током.** Этот опыт лучше выполнить с прямоугольными керамическими магнитами. Один раз расположите их так, чтобы длинная сторона магнитов стала параллельна проводнику с током (рис. 5.1), а второй – так, чтобы параллельной стала короткая сторона магнитов (рис. 5.2). При этом проводник во втором случае должен проходить над магнитами такое же расстояние, как в первом. Ваши зрители обнаружат, что сила Ампера тем больше, чем больше длина участка проводника с током, находящегося в магнитном поле. Поэтому логично допустить возможность зависимости:

$$F \sim \Delta l.$$

поля. Магниты поместите под проводником с током и покажите движение проводника вследствие действия силы Ампера (рис. 6.1). Затем магниты расположите над проводником с током так, чтобы вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  был направлен вверх перпендикулярно проводнику (рис. 6.2). При этом сила Ампера остается такой же, как в случае, когда магниты находились под проводником на таком же расстоянии.

Поверните магниты так, чтобы угол между вектором магнитной индукции и проводником отличался от  $90^\circ$  (рис. 7.1), и покажите, что наблюдается уменьшение силы Ампера. Поверните магниты так, чтобы вектор  $\vec{B}$  стал параллелен проводнику с током (рис. 7.2), и продемонстрируйте, что сила Ампера теперь равна нулю. Из выполненных опытов делают вывод: на проводник с током действует только перпендикулярная

проводнику составляющая вектора  $\vec{B}$ , которая равна:  $B_{\perp} = B \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{B}$  и проводником с током  $I$  (рис. 4.2).

Объединяя полученные в опытах количественные оценки, приходят к общему выводу, что демонстрационные опыты свидетельствуют в пользу того, что модуль силы Ампера выражается формулой:

$$F = kIB\Delta l \sin \alpha. \quad (3)$$

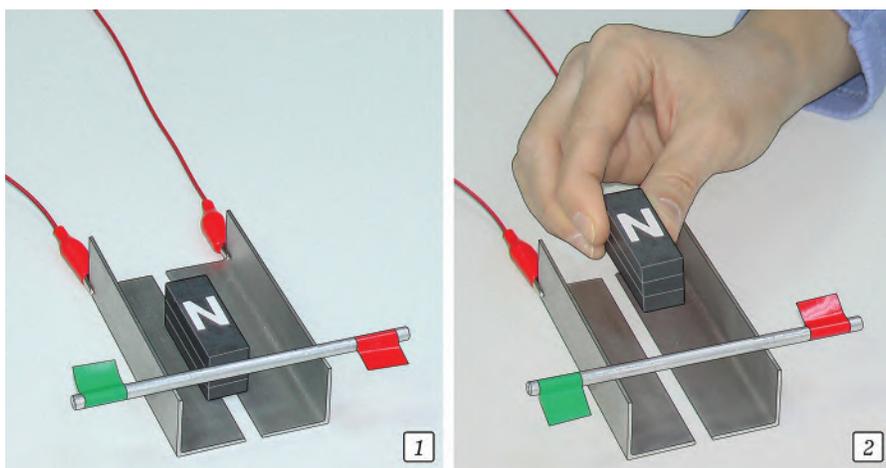


Рис. 6

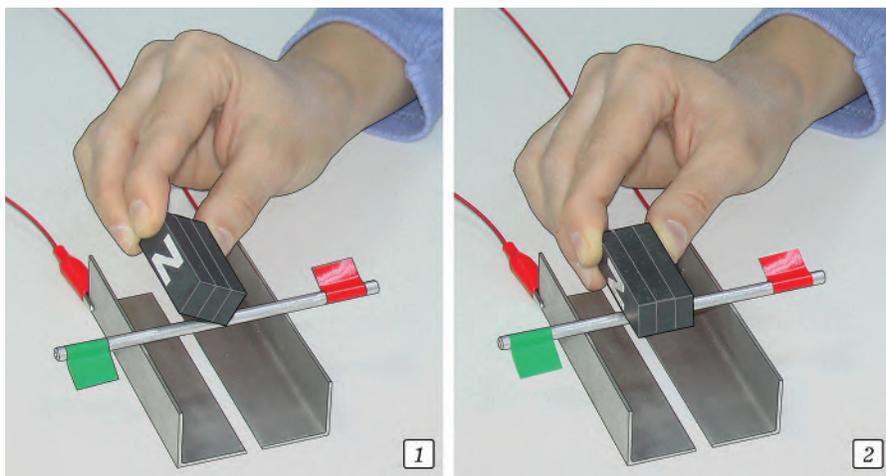


Рис. 7

В системе СИ единицы измерения физических величин подобраны так, что коэффициент пропорциональности  $k$  в этой формуле равен единице:  $k = 1$ .

Сообщают обучающимся, что эксперименты самого Ампера, выполненные еще в 1820 году, то есть примерно 201 год назад, и последующие многочисленные экспериментальные исследования подтвердили справедливость полученной в учебном исследовании формулы.

Таким образом, экспериментально установленным фактом физической науки является закон Ампера: на проводник с током, расположен-

ный в магнитном поле под углом  $\alpha$  к вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ , действует сила Ампера  $\vec{F}$ , направление которой определяется правилом левой руки, а модуль равен

$$F = IB\Delta l \sin \alpha. \quad (4)$$

Эта формула показывает, что закон Ампера позволяет определить единицу магнитной индукции:

$$[B] = \frac{1\text{Н}}{1\text{А} \cdot 1\text{м}} = 1 \text{ Тл}. \quad (5)$$

Завершают изучение закона Ампера примерами использования его на практике, скажем, в электродвигателях.

## Заключение

Физическое мышление происходит в цикле научного познания, в нем оно и развивается. Поэтому на школьных уроках физики обязательно должен быть натуральный эксперимент, а учитель, если он хочет развивать физическое мышление школьников, должен вместе с ними на основе эксперимента строить физическую теорию и экспериментом проверять ее следствия. Именно это имел в виду В. Г. Разумовский, рассматривая «превращение школьного

физического эксперимента из средства наглядности в экспериментальный метод познания» как первоочередную задачу отечественного физического образования. Наиболее простой и эффективный способ решения этой задачи состоит в выполнении учеником внеурочного проектного исследования с целью создания экспериментальной установки для демонстрационных опытов и последующего использования ее на уроках физики.

### Источники информации

1. *Мякишев Г. Я.* Физика. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый уровень / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, В. М. Чаругин; под ред. Н. А. Парфентьевой. – М.: Просвещение, 2016. – 432 с.
2. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. В 4 т. Т.4. – М.: Наука, 1967. – 600 с.
3. *Разумовский В. Г.* Развитие творческих способностей учащихся в процессе обучения физике: пособ. для учителей. – М.: Просвещение, 1975. – 272 с.
4. *Разумовский В. Г., Майер В. В.* Физика в школе. Научный метод познания и обучение. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2004. – 463 с.

## Ответы на вопросы 18-й Международной естественнонаучной олимпиады юниоров (IJSO-2021)

1. (a). В положениях на 12 и на 6 часов расстояние от наблюдателя, сидящего на карусели, до сирены максимально/минимально, поэтому частота не изменяется.

В положении на 9 часов наблюдатель приближается к источнику, а в положении на 3 часа – удаляется от него. Таким образом, наблюдатель получает более высокий тон в положении «9 часов» и более низкий тон в положении «3 часа».

2. (b). Критический угол при переходе луча от области 3 к области 4:  $\sin \theta = 1,50/1,55$ . Применение закона Снелла к последовательности областей даст:

$$1,62 \sin \theta = 1,60 \sin \alpha = 1,55 \sin \theta c.$$

$$1,62 \sin \theta = 1,50. \quad \theta = \arcsin(1,50/1,62)/$$

3. (b).  $P/Q = R/S$ . Таким образом, ток не будет протекать через резистор в 8 Ом. Следовательно, резисторы  $P + R$  будут параллельны с резисторами  $Q + S$ . Эквивалентное сопротивление этой комбинации составит 2 Ом.

Итак, теперь схему можно привести к виду, когда резисторы  $A/B = C/D$ ; Таким образом, ток не будет протекать через резистор сопротивлением в 10 Ом. Следовательно, резисторы  $A + B$  будут параллельны резисторам  $C + D$ . Эквивалентное сопротивление этой комбинации составит 4,5 Ом. Общее сопротивление всей цепи будет 6,5 Ом, следовательно, искомая сила тока равна 1 А.

4. (d). Начальное сопротивление  $R = \rho L / (\pi r^2) = 4\rho L / (\pi d^2)$ .

При замене проводов сопротивление будет

$$R' = \rho L / (\pi (2r)^2) = \rho L / (\pi d^2) = R / 4.$$

При последовательном соединении проводов сопротивление будет  $2R' = R/2$ .

При параллельном соединении проводов сопротивление будет  $R'/2 = R/8$ .

Энергия  $E = P \times t = V^2 t / R$  или  $E / V^2 = t / R$ .

При последовательном соединении проводов необходимое время  $t = 2$  минуты.

При параллельном соединении проводов необходимое время  $t = 0,5$  мин.

5. (b). Тепловая мощность  $P_D = 3$  кВт из устройства (прибора) поступает в охладитель, от которого отбирается мощность  $P_C$ . Тогда  $(P_D - P_C)\tau = \rho V c \Delta t$ . Отсюда  $P_C = P_D - \rho V c \Delta t / \tau = 2\,067$  Вт.

6. (b). Поскольку при прохождении призмы падающий луч испытывает минимальное отклонение, угол падения равен углу выхода, который должен быть углом падения для второй призмы, поскольку преломляющие поверхности параллельны. Следовательно, луч будет претерпевать минимальное отклонение в каждой призме, а конечный угол выхода будет равен начальному углу падения. Таким образом, отклонение луча будет таким же, как и в случае одиночной призмы.

7. (b).

8. (d). Обмотка в катушке  $B$  выполнена в обоих направлениях таким образом, что число количество витков, намотанных по часовой стрелке, равно числу витков против часовой стрелки (бифилярная намотка). Таким образом, ЭДС индукции, создаваемые в катушке 2, направлены в противоположную сторону из-за чего стрелка гальванометра не отклоняется.

9. (b). Скорость продолжает увеличиваться линейно ( $-gt$ ) со временем до тех пор, пока мяч не упадет на землю, а затем за короткое время изменит свое направление. Кинетическая энергия всегда положительна и квадратично возрастает со скоростью. Время, необходимое для каждого отскока, постепенно сокращается.

10. (b).  $T : R^{3/2}$  где  $T = 2\pi R / v$ . Следовательно  $v : R^{-1/2}$ . Отсюда  $v_1 / v_2 = (R_2 / R_1)^{1/2}$ .

## Химия

11. (b). 3,1 г.

12. (b). 13,15 г.

13. (b).  $-9732,7$  кДж.

14. (c). 0,790 кг.

15. (c).  $1,35 \cdot 10^{25}$ .

16. (b). (i)  $\rightarrow$  (R), (ii)  $\rightarrow$  (S), (iii)  $\rightarrow$  (P), (iv)  $\rightarrow$  (Q)

17. (b). Только варианты В, С, Е, F правильные.

18. (c). 0,17 М и 0,26 М.

19. (a). 80 часов.

20. (c).  $\text{BF}_3 < \text{H}_2\text{S} < \text{NH}_3 < \text{H}_2\text{O}$ .



# Конкурс!

Ответы на кроссворд, опубликованный  
в № 01, 2022



Номер	Ответ	Где найти ответ
1	Маглев	№12, стр. 8
2	Равновеликие	№11, стр. 15
3	Резистор	№11, стр. 20
4	Новосибирск	№11, стр. 8
5	Водород	№11, стр. 77
6	Пять	№12, стр. 49
7	Рокада	№11, стр. 10
8	Случайная	№11, стр. 58-61
9	Сдвиг	№12, стр. 35, 37
10	Сортировка	№12, стр. 41
11	Флешка	№12, стр. 46, 75
12	Последовательное	№11, стр. 23
Вертикальный столбец	Метрополитен	№12, стр.12

*Мы продолжаем наш конкурс кроссвордов.*

# Как подписаться на «Потенциал. Математика. Физика. Информатика?»

1. По квитанции через банк. Подписка оплачивается из расчёта:

**Бумажная подписка**

1200 рублей за 12 месяцев

600 рублей за 6 месяцев

300 рублей за 3 месяца

100 рублей за 1 месяц

2. В редакции журнала

115184, г. Москва, Климентовский пер., д. 1, стр. 1

(м. «Третьяковская», «Новокузнецкая»), тел.: (495) 951-41-67.

**Электронная подписка**  
Стоимость любого номера в pdf-формате составляет 50 рублей  
Вся информация на сайте  
[www.edu-potential.ru](http://www.edu-potential.ru)  
[www.karand.ru](http://www.karand.ru)

Реквизиты

000 «Карандаш»
ИНН 7718873526 / КПП 771801001
Расч. счёт 40702810700030003695
БИК 044525201
Кор. счёт 30101810000000000201
ПАО АКБ «Авангард»

Теперь вы можете читать журнал со своего планшета!



## Где можно приобрести журнал?

1. В редакции журнала - см. адрес выше;

2. В книжном магазине МФТИ

г. Долгопрудный, Институтский пер., 9 (новый корпус МФТИ, 1 этаж), тел. (495) 408-73-55;

3. В интернет-магазине Карандаш ([www.karand.ru](http://www.karand.ru));

4. В интернет-магазине Пресса.ру ([www.pressa.ru](http://www.pressa.ru)).

## Учебный центр «Физтех - Потенциал»

### Подготовительные курсы 2021 – 2022

В 2021 – 2022 учебном году при МФТИ продолжают работать подготовительные курсы в очном и заочном формате по предметам:

- математика
- олимпиадная математика
- физика
- олимпиадная физика
- информатика
- программирование
- экспериментальная физика
- компьютерная физика

На курсах осуществляется подготовка учащихся 2 - 11 классов к сдаче ОГЭ, ЕГЭ и олимпиадам.

Занятия проводят лучшие преподаватели МФТИ, знающие программы и требования при проведении ОГЭ, ЕГЭ и олимпиад, имеющие большой стаж работы со школьниками.

На курсах ребята восполняют пробелы в знаниях, ознакомятся с форматом экзамена и получат уверенность в своей подготовке к успешной сдаче экзамена.

Занятия проводятся в Московском корпусе МФТИ.

Климентовский пер., д. 1, стр. 1

Телефоны: 8 (800) 302-77-42, (495) 542-65-62, (495) 743-29-02

[www.edu-mipt.ru](http://www.edu-mipt.ru)

## В СЛЕДУЮЩЕМ НОМЕРЕ

- Диалоги об истории науки и инженерии. Диалог 17. Двигатели человечества: часть III – первое и второе начала Сади Карно. *С.Е. Муравьев, А.С. Ольчак, С.В. Генисаретская*
- Некоторые особенности трения. *В.М. Курносов*
- Физика амортизирующей обуви. *Т.И. Морозова*

### ПРОГРАММА СПОНСОРСКОЙ ПОМОЩИ ЖУРНАЛУ «ПОТЕНЦИАЛ»

Физико-математический журнал для старшеклассников и учителей «Потенциал» выпускается на средства выпускников технических вузов и поэтому нуждается в спонсорской поддержке. В журнале действует Программа спонсорской помощи. Программа допускает поступление финансовой, материальной, информационной и иной помощи журналу. Координирует работу Программы Спонсорский совет, являющийся структурным подразделением журнала. Спонсорами могут быть физические или юридические лица. Спонсорская помощь осуществляется однократно или на постоянной основе. В последнем случае спонсор входит в Спонсорский совет журнала. Имена спонсоров текущего номера журнала печатаются (при согласии спонсора) в этом же номере. По вопросам оказания спонсорской помощи обращаться в редакцию.

**Тел. (495) 743-29-02**

**E-mail: editor@edu-potential.ru**



## НАШИ СПОНСОРЫ

### АЗБУКА

Полиграфическая компания  
Тел.: (495) 970-04-17  
E-mail: azbukaprint@azbukaprint.ru



Интернет-магазин учебной  
и методической литературы  
Тел. (495) 970-04-17  
[www.karandash.ru](http://www.karandash.ru)



Национальный дистрибьютор  
товаров для красоты и здоровья  
Тел. (495) 737-35-00, 737-35-01  
[www.protek.ru](http://www.protek.ru)



Благотворительный фонд «ПРОТЕК»  
Тел. (495) 737-35-00, доб. 14-36  
[www.bfprotek.ru](http://www.bfprotek.ru)