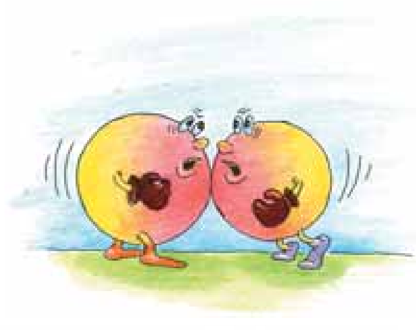
Плис Валерий Иванович
К.ф.-м.н., доцент кафедры общей физики МФТИ.

Задачи на столкновения и законы сохранения импульса и энергии

В статье, на основе законов сохранения импульса и энергии, рассматриваются неупругие и упругие столкновения как макроскопических тел, так и объектов в микромире. Проведён анализ энергетических превращений при неупругих процессах. Показана техника исследования упругих столкновений в системе центра масс. Рассматриваются упругие и неупругие процессы в микромире (как в рамках классической физики, так и с привлечением элементарных сведений по квантовой физике и специальной теории относительности).

Введение

В физике под столкновениями понимают процессы взаимодействия между телами (частицами) в широком смысле слова, а не только в буквальном – как соприкосновение тел. Сталкивающиеся тела на большом расстоянии являются свободными. Проходя друг мимо друга, тела взаимодействуют между собой, в результате могут происходить различные процессы – тела могут соединиться в одно тело (*абсолютно неупругий удар)*, могут возникать новые тела и, наконец, может иметь место *упругое столкновение*, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, сопровождающиеся изменением внутреннего состояния тел, называются *неупругими*.



Тела (частицы), участвующие в столкновении, характеризуются (до и после столкновения) импульсами, энергиями. Процесс столкновения сводится к изменению этих величин в результате взаимодействия. Законы сохранения энергии и импульса позволяют достаточно просто устанавливать соотношения между различными физическими величинами при столкновении тел. Особенно ценным здесь является то обстоятельство, что зачастую законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда действующие силы неизвестны. Так обстоит дело, например, в физике элементарных частиц.

Происходящие в обычных условиях столкновения макроскопических тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими – уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т.е. переходом части их кинетической энергии в тепло. Тем не менее, в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль, так как с такими столкновениями часто приходится иметь дело в физическом эксперименте в области атомных явлений, да и обычные столкновения можно часто с достаточной степенью точности считать упругими.

Сохранение импульса тел (частиц) при столкновении обусловлено тем, что совокупность тел, участвующих в столкновении, составляет либо изолированную систему, т.е. на тела, входящие в систему, не действуют внешние силы, либо замкнутую: внешние силы отличны от нуля, а сумма внешних сил равна нулю. Несколько сложнее обстоит дело с применением закона сохранения энергии при столкновениях. В классической физике следует учитывать кинетическую и потенциальную энергии. В релятивистском случае следует аккуратно пользоваться выражением для энергии (как иногда, например, пишут «учитывать энергию покоя»). Обращение к сохранению энергии требует порой учёта различных форм внутренней энергии.

Можно сказать, что действие законов сохранения импульса и энергии в процессах столкновения подтверждено широким спектром опытных данных.

Переходя к характерным примерам, напомним, что в физике при решении задач должна быть указана система отсчёта (тело отсчёта, оси координат и часы), в которой рассматривается динамика процесса. Исследование столкновений традиционно проводится как в лабораторной системе отсчёта (ЛСО), т.е. в инерциальной системе отсчёта, связанной с лабораторией, где проводится опыт, так и в системе центра масс, которая будет введена в статье. Напомним также, что центральным ударом шаров (шайб) называют удар, при котором скорости шаров (шайб) направлены вдоль прямой, проходящей через их центры.

§1. Неупругие столкновения

Задача № 1. Частица массой m с кинетической энергией K сталкивается с неподвижной частицей массой M. Найдите приращение Q внутренней энергии системы частиц в результате абсолютно неупругого столкновения.

Решение.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел в ЛСО. Налетающая частица движется до столкновения в положительном направлении оси OX со скоростью $\vec{V}$, кинетическая энергия частицы $K=\dfrac{mV^2}{2}$. В результате абсолютно неупругого удара (слипания) частицы движутся с одинаковой скоростью $\vec{u}$. По закону сохранения импульса $mV=(m+M)u$, по закону сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2}=\frac{(m+M)u^2}{2}+Q.$$

Из приведённых соотношений находим

$$Q=\frac{M}{m+M}K.$$

Отметим, что в предельных случаях

$$Q=K,\ m<<M;\ Q=\frac{M}{m}K<<K,\ m>>M.$$

Как видим, при неупругом столкновении лёгкой частицы с массивной (например, электрона с атомом) происходит полная передача её кинетической энергии атому: атом возбуждается, а затем испускает фотон.

При равенстве масс $(m=M)$ $Q=\dfrac{K}{2}$.

Отсюда следует, например, что при столкновении двух одинаковых автомобилей, один из которых неподвижен, а другой движется по направлению к нему, половина кинетической энергии идёт на разрушение.

Задача № 2. Найдите минимальную относительную скорость двух одинаковых метеоритов необходимую для их нагрева и полного испарения в результате абсолютно неупругого соударения. Удельная теплота нагревания и испарения вещества метеоритов $q = 10^6$ Дж/кг.

Решение.

Рассмотрим в ЛСО абсолютно неупругий удар двух тел. Введём обозначения: m_1 и m_2 – массы тел, $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ – их скорости до столкновения, $\vec{V}'$ – скорость составного тела после столкновения. Считая, что в процессе столкновения импульс системы тел сохраняется (внешние силы отсутствуют),

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}',$$

находим скорость составного тела

$$\vec{V}' = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

Кинетические энергии системы тел до взаимодействия и после равны соответственно

$$K_{ДО} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2},\ K_{ПОСЛЕ} = \frac{(m_1 + m_2)(V')^2}{2}.$$

Тогда убыль кинетической энергии системы после несложных преобразований принимает вид

$$K_{ДО} - K_{ПОСЛЕ} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)^2 = \frac{1}{2}\mu(\vec{V}_{ОТН})^2,$$

где $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ – приведённая масса системы тел, $\vec{V}_{ОТН} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ относительная скорость. Таким образом, при абсолютно неупругом ударе в другие формы энергии переходит кинетическая энергия макроскопического движения, равная половине произведения приведённой массы на квадрат относительной скорости.

Вернёмся к задаче о минимальной относительной скорости метеоритов. Будем считать, что вся убыль кинетической энергии переходит в тепло, которое идёт на нагревание и испарение метеоритов, тогда $\dfrac{1}{2}\mu(\vec{V}_{ОТН})^2 = 2mq$. С учётом равенства масс сталкивающихся метеоритов $\mu = \dfrac{m}{2}$. Это приводит к оценке минимальной скорости $V_{ОТН} = 2\sqrt{2q} \approx 2{,}8 \cdot 10^3$ м/с.

Задача № 3. На гладком горизонтальном столе лежит твёрдая шайба. На неё налетает мягкая, довольно упругая шайба такой же массы и между ними происходит центральный удар. Скорость мягкой шайбы после удара уменьшилась в 5 раз. Какая часть максимальной энергии деформации перешла в тепло при этом ударе? Считайте, что тепло выделяется в мягкой шайбе в процессе деформации.

Решение.

Задачу рассмотрим в ЛСО, ось ОХ которой направим по линии центров шайб в момент соударения. В процессе взаимодействия на систему шайб действуют только вертикальные внешние силы: это силы тяжести и силы нормальной реакции опоры. Их сумма равна нулю, отсюда следует, что импульс системы шайб в результате соударения не изменяется $MV = M\dfrac{V}{5} + MV_X$.

Скорость твёрдой шайбы после удара $V_X = 0{,}8 \cdot V$ (если предположить, что налетающая шайба после соударения движется в отрицательном направлении оси ОХ со скоростью $\dfrac{V}{5}$, то скорость твёрдой шайбы после соударения $V_X = 1{,}2 \cdot V$ и её кинетическая энергия больше кинетической энергии налетающей шайбы). Найдём по закону сохранения энергии количество Q теплоты, которое выделится в мягкой шайбе за всё время удара,

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{M(0{,}2 \cdot V)^2}{2} + \frac{M(0{,}8 \cdot V)^2}{2} + Q,$$ отсюда

$$Q = 0{,}32 \cdot \frac{MV^2}{2}.$$

Вычислим максимальную энергию $E_{ДЕФ}$ деформации мягкой шайбы. Для этого заметим, что при максимальной деформации шайбы друг относительно друга не движутся. Тогда по закону сохранения импульса

$MV=(M+M)V_*$, шайбы в момент максимальной деформации движутся в ЛСО со скоростью $V_*=V/2$. Естественно предположить, что теплота в равных количествах выделяется как при сжатии шайбы, так и при растяжении. Тогда по закону сохранения энергии в момент максимальной деформации

$$\frac{MV^2}{2}=\frac{M(0,5\cdot V)^2}{2}+\frac{M(0,5\cdot V)^2}{2}+\frac{Q}{2}+E_{ДЕФ}.$$

Отсюда $E_{ДЕФ}=0,34\cdot\frac{MV^2}{2}$.

Искомое отношение $\frac{Q}{E_{ДЕФ}}=\frac{16}{17}$.

§2. Упругие столкновения

Задача № 4. На гладкой горизонтальной поверхности лежит шар массой M. На него налетает шар массой m, движущийся со скоростью $\vec{V}$. Между шарами происходит упругий центральный удар. Найдите скорости $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ шаров после соударения. При каком условии налетающий шар будет двигаться после соударения в прежнем направлении?

Решение.

Задачу рассмотрим в ЛСО, ось ОХ которой направим по линии центров шаров в момент соударения. Внешние силы, действующие на шары в процессе соударения, это силы тяжести и силы нормальной реакции опоры. Их сумма равна нулю. Следовательно импульс системы шаров в процессе взаимодействия не изменяется. По закону сохранения импульса

$$m\vec{V}=m\vec{V}_1+M\vec{V}_2.$$

Переходя к проекциям на ось ОХ, получаем $mV=mV_{1X}+MV_2$,

здесь учтено, что направление скорости $\vec{V}_1$ налетающего шара после соударения неизвестно. По закону сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2}=\frac{mV_{1X}^2}{2}+\frac{MV_2^2}{2}.$$

Полученные соотношения перепишем в виде $m(V-V_{1X})=MV_2$, $m(V^2-V_{1X}^2)=M_2^2$.

Разделив второе равенство на первое, приходим к линейной системе $V_2=V+V_{1X}$, $m(V-V_{1X})=MV_2$, решение которой имеет вид

$$V_{1X}=\frac{m-M}{m+M}V,\quad V_2=\frac{2m}{m+M}V.$$

Налетающий шар будет двигаться после соударения в прежнем направлении ($V_{1X}>0$) при $m>M$, т.е. если его масса больше массы покоящегося шара.

Задача № 5. Две гладкие упругие круглые шайбы движутся по гладкой горизонтальной поверхности со скоростями $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Найдите скорости шайб после абсолютно упругого нецентрального соударения. Массы шайб m_1 и m_2.

Решение.

Задачу рассмотрим в ЛСО, оси координат ОХ и ОY которой лежат в горизонтальной плоскости, при этом ось ОХ направлена по линии центров шайб в момент соударения (рис.1). В течение времени соударения на систему шайб действуют только вертикальные внешние силы: это силы тяжести и силы нормальной реакции опоры. Их сумма равна нулю. Тогда импульс системы шайб в процессе взаимодействия сохраняется

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}\,'_1+\vec{p}\,'_2,$$

здесь $\vec{p}_1=m_1\vec{V}_1$, $\vec{p}_2=m_2\vec{V}_2$ и

$\vec{p}\,'_1=m_1\vec{V}\,'_1$, $\vec{p}\,'_2=m_2\vec{V}\,'_2$ – импульсы шайб до и после соударения.

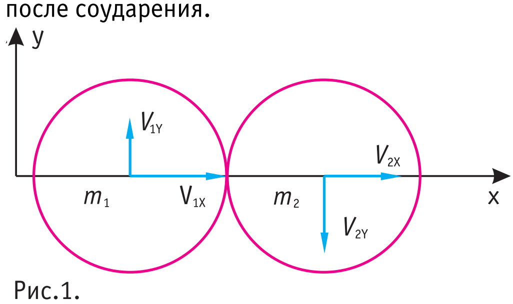


Рис.1.

Так как шайбы идеально гладкие, то в процессе соударения внутренние силы – силы упругого взаимодействия шайб – направлены только по оси OX. Эти силы не изменяют Y-составляющие импульсов шайб. Тогда из $p_{1Y} = p'_{1Y}$, $p_{2Y} = p'_{2Y}$ находим Y-составляющие скоростей шайб после соударения

$$V'_{1Y} = V_{1Y},\ V'_{2Y} = V_{2Y},$$

т.е. в проекции на ось OY скорости шайб в результате соударения не изменились.

Найдём X-составляющие скоростей шайб после абсолютно упругого соударения. При таком соударении сохраняется кинетическая энергия

$$\frac{m_1\left(V_{1X}^2 + V_{1Y}^2\right)}{2} + \frac{m_2\left(V_{2X}^2 + V_{2Y}^2\right)}{2} =$$

$$= \frac{m_1\left(\left(V'_{1X}\right)^2 + \left(V'_{1Y}\right)^2\right)}{2} + \frac{m_2\left(\left(V'_{2X}\right)^2 + \left(V'_{2Y}\right)^2\right)}{2}.$$

С учётом равенства Y-составляющих скоростей шайб до и после соударения последнее равенство принимает вид

$$\frac{m_1V_{1X}^2}{2} + \frac{m_2V_{2X}^2}{2} = \frac{m_1\left(V'_{1X}\right)^2}{2} + \frac{m_2\left(V'_{2X}\right)^2}{2}.$$

Обратимся к закону сохранения импульса и перейдём к проекциям импульсов шайб на ось OX

$$m_1V_{1X} + m_2V_{2X} = m_1V'_{1X} + m_2V'_{2X}.$$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче об абсолютно упругом центральном ударе: именно такой вид приняли бы законы сохранения энергии и импульса, если бы скорости шайб были направлены по линии центров. Полученную нелинейную систему уравнений можно свести к линейной. Для этого следует (как и в предыдущей задаче) в обоих уравнениях по одну сторону знака равенства объединить слагаемые, относящиеся к первой шайбе, а по другую – ко второй, и разделить полученные соотношения друг на друга. Это приводит к линейному уравнению вида

$$V_{1x} + V'_{1X} = V_{2X} + V'_{2X}.$$

Решая систему из двух последних уравнений, находим

$$V'_{1X} = \frac{(m_1 - m_2)V_{1X} + 2m_2V_{2X}}{m_1 + m_2},$$

$$V'_{2X} = \frac{2m_1V_{1X} + (m_2 - m_1)V_{2X}}{m_1 + m_2}.$$

Полученные соотношения для V'_{1X}, V'_{1Y} и V'_{2X}, V'_{2Y} решают вопрос о величинах скоростей шайб после соударения

$$V'_1 = \sqrt{\left(V'_{1X}\right)^2 + \left(V'_{1Y}\right)^2},\ V'_2 = \sqrt{\left(V'_{2X}\right)^2 + \left(V'_{2Y}\right)^2},$$

и об углах α_1 и α_2, которые векторы скоростей $\vec{V}'_1$ и $\vec{V}'_2$ образуют с положительным направлением оси OX,

$$tg\alpha_1 = \frac{V'_{1Y}}{V'_{1X}},\ tg\alpha_2 = \frac{V'_{2Y}}{V'_{2X}}.$$

Построенное в общем виде решение задач упругого центрального и нецентрального соударений открывает дорогу к анализу целого ряда задач, для которых рассмотренная модель соответствует характеру взаимодействия тел (частиц). Приведём два примера.

Задача № 6. Лёгкий пластмассовый шарик массой m_1 роняют с нулевой начальной скоростью с высоты h. В нижней точке траектории по нему ударяют ракеткой снизу вверх, после чего шарик подпрыгивает на высоту в n раз большую первоначальной. Определите скорость ракетки перед ударом. Масса m_2 ракетки во много раз больше массы шарика. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение.

Проанализируем упругое столкновение в ЛСО, ось OX направим по вертикали вверх. Из кинематических соотношений для равнопеременного движения по прямой найдём проекции скорости шарика до и после соударения на ось OX

$$V_{1X} = -\sqrt{2gh},\ V'_{1X} = \sqrt{n2gh}$$

При $m_1 << m_2$ соотношение

$$V'_{1X} = \frac{(m_1 - m_2)V_{1X} + 2m_2V_{2X}}{m_1 + m_2}$$

из решения задачи № 5 принимает вид $V'_{1X} = -V_{1X} + 2 \cdot V_{2X}$.

Отсюда находим искомую скорость ракетки до удара $V_{2X} = \dfrac{V_{1X} + V'_{1X}}{2} = \sqrt{\dfrac{gh}{2}} \cdot \left(\sqrt{n} - 1\right)$.

Задача № 7. Гладкая круглая шайба массы m_1 движется со скоростью $\vec{V}$ вдоль хорды, расстояние до которой от центра гладкого тонкого однородного обруча равно $R/2$ (рис.2). Обруч массы m_2 и радиуса R лежит на гладком горизонтальном столе. Через какое время τ после первого удара шайба окажется на минимальном расстоянии от центра движущегося обруча? Каково это расстояние? Удар считайте абсолютно упругим.

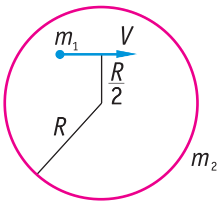


Рис.2.

Решение.

Воспользуемся результатами решения задачи № 5. В ЛСО, ось ОХ которой направлена по линии центров шайбы и обруча в момент соударения, проекции скорости шайбы и центра обруча на ось ОХ после соударения равны соответственно

$$V'_{1X} = \frac{(m_1 - m_2)V_{1X} + 2m_2V_{2X}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)V_{1X}}{m_1 + m_2},$$

$$V'_{2X} = \frac{2m_1V_{1X} + (m_2 - m_1)V_{2X}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1V_{1X}}{m_1 + m_2},$$ здесь

$V_{1X} = V\cos\dfrac{\pi}{6}$ – проекция скорости шайбы на ось ОХ до соударения, $V_{2X} = 0$ – обруч до соударения покоился.

Из этих соотношений следует, что в системе отсчёта, связанной с движущимся обручем, радиальная составляющая скорости шайбы после соударения

$$V_{1X\ отн} = V'_{1X} - V'_{2X} = -V_{1X} = -V\cos\frac{\pi}{6}$$

просто изменила знак, а перпендикулярная радиусу составляющая, как было показано, в рассматриваемом соударении не изменяется. Следовательно, относительно обруча шайба отразится по закону «угол падения равен углу отражения» и минимальное расстояние до центра обруча снова будет равно $R/2$. Искомое время $\tau = \dfrac{R}{\left|V_{1X\ отн}\right|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{R}{V}$.

Задача № 8. Каков максимальный угол θ упругого рассеяния α-частицы на дейтроне? Дейтрон – ядро одного из изотопов водорода – дейтерия, состоит из протона и нейтрона; α-частица – ядро гелия, состоит из двух протонов и двух нейтронов. Считайте, что масса дейтрона в 2 раза меньше массы α-частицы.

Решение.

Проанализируем упругое столкновение в ЛСО (не прибегая к модели упругих шаров). Введём обозначения: m_1 – масса α-частицы, $\vec{V}$ – её скорость до рассеяния, m_2 – масса дейтрона, $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ – скорости α-частицы и дейтрона соответственно после рассеяния. При отсутствии внешних сил в процессе упругого взаимодействия для системы «α-частица + дейтрон» сохраняются импульс (рис.3)

$$m_1V = m_1V_1\cos\delta + m_2V_2\cos\varphi,$$
$$m_1V_1\sin\delta = m_2V_2\sin\varphi,$$

и кинетическая энергия

$$\frac{m_1V^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}.$$

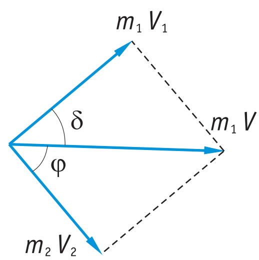


Рис.3.

Исключив из этих соотношений угол φ и величину V_2 скорости дейтрона, получим квадратное уравнение для V_1

$$(m_1+m_2)V_1^2-2m_1VV_1\cos\delta+(m_1-m_2)V^2=0.$$

Корни этого уравнения будут вещественными при $\sin\delta \le m_2/m_1$. Максимальный угол δ, удовлетворяющий этому условию, и есть искомый угол θ. Таким образом, $\theta=\arcsin(m_2/m_1)=\dfrac{\pi}{6}$ рад. Заметим, что рассеяние на максимальный угол возможно только при условии: масса налетающей частицы больше массы покоящейся.

§3. Центр масс системы материальных точек. Теорема Кёнига

В физике законы изменения и сохранения импульса системы частиц зачастую формулируются с привлечением центра масс. Для введения центра масс системы частиц рассмотрим движение этой системы в ЛСО и в системе отсчёта, которая движется поступательно с произвольной (пока!) скоростью $\vec{V}_C$ относительно лаборатории. Найдём связь импульсов системы частиц в лабораторной $\vec{P}=\sum m_i\vec{V}_i$ и в подвижной $\vec{P}_{ОТН}=\sum m_i\vec{V}_{iОТН}$ системах отсчёта. Так как при переходе между поступательно движущимися системами отсчёта скорости частиц преобразуются по закону Галилея $\vec{V}_i=\vec{V}_C+\vec{V}_{iОТН}$, то связь импульсов системы частиц в ЛСО и в подвижной системе принимает вид

$$\vec{P}=\sum m_i\vec{V}_i=M\vec{V}_C+\vec{P}_{ОТН},$$

$M=\sum m_i$ – масса системы частиц.

Отсюда следует, что если выбрать

$$\vec{V}_C=\frac{\sum m_i\vec{V}_i}{\sum m_i}=\frac{\vec{P}}{M},$$

то в этой системе $\vec{P}_{ОТН}=\vec{P}-M\vec{V}_C=\vec{0}$. Полученное соотношение $\vec{V}_C=\sum m_i\vec{V}/M$ можно считать производной по времени радиуса-вектора, определяемого по формуле

$$\vec{R}_C=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

В классической физике эту точку называют центром масс системы частиц, а систему, начало которой традиционно помещают в центр масс, и которая движется поступательно со скоростью $\vec{V}_C=\vec{P}/M$ относительно лаборатории, называют системой центра масс (Ц-системой). Как было показано, в этой системе отсчёта суммарный импульс частиц равен нулю.

Найдём связь кинетических энергий K и $K_{ОТН}$ системы материальных точек в ЛСО и в Ц-системе соответственно. По закону сложения скоростей $\vec{V}_i=\vec{V}_C+\vec{V}_{iОТН}$. Тогда кинетическая энергия системы материальных точек в ЛСО и в Ц-системе связаны соотношением

$$K=\sum\frac{m_i\vec{V}_i^2}{2}=\sum\frac{m_i(\vec{V}_C+\vec{V}_{iОТН})^2}{2}=$$

$$=\sum\frac{m_i\vec{V}_C^2}{2}+\sum\frac{m\vec{V}_{iОТН}^2}{2}+\left(\vec{V}_C\cdot\sum m_i\vec{V}_{iОТН}\right).$$

Сумма $\sum m_i\vec{V}_{iОТН}=\left(\sum m_i\right)\cdot\vec{V}_{C\ ОТН}$ равна нулю, так как центр масс в Ц-системе покоится: $\vec{V}_{C\ ОТН}=\vec{0}$. Таким образом,

$$K=\frac{\left(\sum m_i\right)\cdot V_C^2}{2}+K_{ОТН},$$

т.е. кинетическая энергия совокупности материальных точек в ЛСО равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же совокупности материальных точек в её относительном движении в Ц-системе. Это утверждение составляет содержание теоремы Кёнига.

Приведём второе решение задачи № 8. Упругое столкновение удобно рассматривать в Ц-системе. Скорость центра масс системы «α-частица + дейтрон»

$$\vec{V}_C=\frac{m_1\vec{V}_1}{m_1+m_2}.$$

До столкновения в Ц-системе импульс частицы массой m_1 равен

$$\vec{p}_{1ОТН}=m_1\vec{V}_{1ОТН}=m_1(\vec{V}_1-\vec{V}_C)=\frac{m_1m_2\vec{V}_1}{m_1+m_2},$$

импульс частицы массой m_2 равен $(-\vec{p}_{1ОТН})$. При упругом столкновении импульс и кинетическая энергия системы частиц в Ц-системе сохраняются. Импульс первой частицы после столкновения обозначим $\vec{p}\,'_{1ОТН}$, импульс второй будет равен $(-\vec{p}\,'_{1ОТН})$. Из закона сохранения энергии

$$\frac{p_{1ОТН}^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\frac{(p'_{1ОТН})^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$

находим $p'_{1ОТН}=p_{1ОТН}$. Таким образом, в Ц-системе при упругом столкновении импульсы частиц поворачиваются на тот или иной угол, не изменяясь по величине. Угол поворота не определяется законами сохранения, а зависит от характера взаимодействия. Тогда в Ц-системе скорости обеих частиц изменяются тоже только по направлению. Для анализа скоростей воспользуемся графической техникой (рис.4).

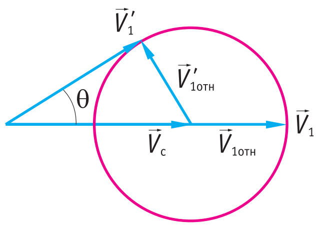


Рис.4.

До столкновения скорость в ЛСО налетающей частицы $\vec{V}_1=\vec{V}_C+\vec{V}_{1ОТН}$. После столкновения скорость $\vec{V}'_1=\vec{V}_C+\vec{V}'_{1ОТН}$ налетающей частицы в ЛСО может заканчиваться в любой точке окружности радиуса $V_{1ОТН}=V'_{1ОТН}=\dfrac{m_2V_1}{m_1+m_2}$. Из векторной диаграммы следует, что в случае $m_1>m_2$ угол между векторами скорости $\vec{V}$ и $\vec{V}'_1$ налетающей частицы не может превышать некоторого максимального значения θ, соответствующего случаю, когда $\vec{V}'_1$ касается указанной окружности,

$$\theta=\arcsin\frac{V_{1ОТН}}{V_C}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{\pi}{6}\ \text{рад.}$$

Обратим внимание, что в Ц-системе расчёт упругого соударения не требует проведения утомительных выкладок. Рассмотрим ещё один пример.

Задача № 9. Два одинаковых гладких шара испытывают упругий нецентральный удар. Один из шаров до соударения покоился. Определите угол разлёта шаров.

Решение.

Из второго решения предыдущей задачи следует, что в рассматриваемом случае $V_C=V'_{1ОТН}=\dfrac{V_1}{2}$ (сохраняем обозначения, принятые в Задаче № 8). Тогда в диаграмме скоростей векторы $\vec{V}_1{}'$ и $\vec{V}_2{}'$, отложенные из одной точки, лежащей на окружности, образуют вписанный угол, опирающийся на диаметр.

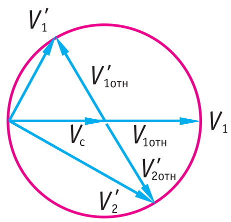


Рис.5.

Такой угол равен половине центрального, т.е. $\dfrac{\pi}{2}$. Шары разлетятся под прямым углом.

На рис.6 к задаче показаны треки (в пузырьковой камере) протонов, иллюстрирующие упругое столкновение движущегося протона с неподвижным.

Рис.6.

§4. Законы сохранения импульса и энергии в микромире

Законы сохранения импульса и энергии позволяют решать задачи не только о взаимодействии макроскопических тел, но и задачи о взаимодействиях частиц в микромире.

В школьном учебнике рассказывается об искусственном превращении атомных ядер, которое впервые было осуществлено Э.Резерфордом в 1919 г. В первой искусственной ядерной реакции, ядра азота подвергались бомбардировке ядрами гелия (α-частицами) и превращались в ядра кислорода и ядра атома водорода (протоны) по схеме ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \to {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$.

Задача № 10. Рассматриваемая реакция идёт с поглощением энергии $Q = 1{,}13$ МэВ. При какой пороговой (минимальной) скорости $V_{ПОР}$ α-частиц, бомбардирующих неподвижную мишень, такая реакция могла пойти? Масса α-частицы $m_{He} = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение.

Из теоремы Кёнига следует, что минимум кинетической энергии бомбардирующей частицы достигается в случае, когда продукты реакции покоятся в Ц-системе. В этом случае кинетическая энергия α-частицы (её импульс p) является пороговой $K_{ПОР} = \dfrac{p^2}{2m_{He}}$ и равна сумме энергии реакции Q и кинетической энергии системы как целого $K_{ПОР} = Q + \dfrac{p^2}{2(m_{He} + m_N)}$,

здесь учтено, что по закону сохранения импульса (в системе действуют только внутренние силы) импульс продуктов реакции равен импульсу бомбардирующей частицы. Кинетическая энергия движения системы как целого связана с кинетической энергией налетающей частицы

$$\frac{p^2}{2(m_{He} + m_N)} = \frac{p^2}{2m_{He}} \frac{m_{He}}{m_{He} + m_N} E_{ПОР} = \frac{m_{He}}{m_{He} + m_N} E_{ПОР}.$$

Тогда соотношение для пороговой энергии принимает вид

$$K_{ПОР} = Q + \frac{m_{He}}{m_{He} + m_N} K_{ПОР}.$$

Отсюда находим пороговую энергию реакции $K_{ПОР} = \dfrac{m_{He} + m_N}{m_N} Q = 1{,}45$ МэВ

и пороговую скорость

$$V_{ПОР} = \sqrt{\frac{2K_{ПОР}}{m_{He}}} = 0{,}83 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Из решения следует, что зависящая от отношения масс взаимодействующих частиц доля кинетической энергии бомбардирующей частицы не может быть использована для реакции. Это устраняется при использовании встречных пучков, когда центр масс сталкивающихся частиц неподвижен.

В заключение рассмотрим два примера, которые упоминаются в школьном курсе, и требуют привлечения (разумеется, в рамках школьной программы) элементов квантовой физики и специальной теории относительности.

Предварительно проиллюстрируем элементарные квантовые представления о взаимодействии света с веществом.

Задача № 11. Неподвижная пылинка массой $m = 0{,}1$ мг освещается импульсом лазерного света с длиной волны $\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-6}$ м. Определите число N поглощённых пылинкой фотонов, если она в результате действия света приобрела скорость $V = 1$ мм/с. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Решение.

В квантовой физике энергия фотона (кванта) $E = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$, здесь ν – частота, λ – длина волны электромагнитного излучения.

Импульс фотона $p=\frac{E}{c}=\frac{h}{\lambda}$.

В рассматриваемой задаче импульс $N\frac{h}{\lambda}$ фотонов по закону сохранения импульса равен импульсу mV пылинки $N\frac{h}{\lambda}=mV$, отсюда $N=\frac{mV\lambda}{h}\approx 9{,}5\cdot 10^{16}$.

Первый пример – эффект Комптона. В 1922 г. А. Комптон обнаружил, что если рентгеновское излучение с длиной волны λ_0 рассеивается веществом с лёгкими атомами (графит, парафин), то в рассеянном потоке, наряду с излучением с той же длиной волны λ_0, наблюдается излучение с большей длиной волны λ. Считая это излучение результатом упругого рассеяния рентгеновских квантов на свободных электронах, рассмотрим следующую задачу.

Задача № 12. Рентгеновский квант (энергия ~10^5 эВ) сталкивается с неподвижным электроном и отражается в обратном направлении. Найдите приращение длины волны рентгеновского излучения в результате упругого рассеяния. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость электромагнитных волн в вакууме $c=3\cdot 10^8$ м/с, масса электрона $m_e=0{,}9\cdot 10^{-30}$ кг.

Решение.

Поясним принятую модель взаимодействия излучения с веществом. В атомах лёгких элементов для удаления электрона нужна энергия порядка 10 эВ. Так как эта энергия во много раз меньше энергии рентгеновских квантов, то электроны можно считать свободными.

При энергии кванта в сотни тысяч эВ необходим учёт релятивистских эффектов, так как энергия рентгеновского кванта сравнима с энергией покоящегося электрона $m_ec^2\approx 0{,}51\cdot 10^5$ эВ. До рассеяния, энергия системы «квант + свободный электрон» состояла из энергии рентгеновского кванта $h\frac{c}{\lambda_0}$ и энергии m_ec^2 покоящегося электрона. В результате рассеяния, энергия электрона, движущегося со скоростью V, равна $\frac{m_ec^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ и стала больше начальной. В свою очередь, энергия рентгеновского кванта $h\frac{c}{\lambda}$ уменьшилась, т.е. длина волны излучения увеличилась.

По закону сохранения энергии

$$m_ec^2+h\frac{c}{\lambda_0}=\frac{m_ec^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}+h\frac{c}{\lambda}.$$

Проанализируем импульсы взаимодействующих частиц. До рассеяния импульс рентгеновского кванта $p_0=\frac{h}{\lambda_0}$, после рассеяния $p=\frac{h}{\lambda}$, импульс электрона, движущегося со скоростью V, равен $p_e=\frac{m_eV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$. По закону сохранения импульса $\vec{p}_0=\vec{p}+\vec{p}_e$. Считая импульс рентгеновского кванта направленным в положительном направлении оси ОХ ЛСО и переходя к проекциям импульсов на эту ось, получаем $\frac{h}{\lambda_0}=-\frac{h}{\lambda}+\frac{m_eV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$.

Умножим второе равенство на $c=3\cdot 10^8$ м/с, сложим его с первым и вычтем его из первого равенства. Перемножив полученные соотношения, найдём

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=2\frac{h}{m_ec}=4{,}84\cdot 10^{-12}\text{ м},$$

что хорошо согласуется с экспериментальными данными и подтверждает упругий характер процесса рассеяния рентгеновского кванта на свободном электроне. Эффект Комптона, так же как и фотоэффект, иллюстрирует корпускулярные свойства электромагнитного излучения.

В следующем примере анализ неупругого процесса поглощения фотона проводится с учётом дискретности энергетического спектра атома.

Задача № 13. Неподвижный, невозбуждённый атом водорода поглощает фотон. В результате атом переходит в возбуждённое состояние и начинает двигаться. Найдите величину V скорости, с которой стал двигаться атом после поглощения фотона. Энергия возбуждения атома $E_{12} = 1{,}63 \cdot 10^{-18}$ Дж. Энергия покоя атома водорода $mc^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-10}$ Дж.

Указание. При $x << 1$ можно считать, что $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\, x$.

Решение.

Поглощение фотона атомом является типичным неупругим столкновением. Проанализируем энергетические превращения. Во-первых, энергия $\dfrac{h\,c}{\lambda}$ поглощённого фотона идёт на перевод атома в возбуждённое состояние (по условию для этого требуется $E_{12} = 1{,}63 \cdot 10^{-18}$ Дж). Во-вторых, закон сохранения импульса обязывает возбужденный атом придти в движение, тогда та или иная часть энергии фотона пойдёт на увеличение кинетической энергии атома. По закону сохранения энергии

$$\frac{h\,c}{\lambda} = E_{12} + \frac{m\,V^2}{2}$$

и импульса $\dfrac{h}{\lambda} = mV$ находим искомую скорость $V = c\left[\sqrt{1 + \dfrac{2\,E_{12}}{m\,c^2}} - 1\right] \approx c\dfrac{E_{12}}{m\,c^2}$,

которая определяется только отношением энергии возбуждения к массе атома водорода, выраженной в энергетических единицах. При выводе учтено, что дробь под корнем мала (~10^{-8}). Это подтверждает нерелятивистское приближение, использованное в решении. При переходе атома водорода из основного состояния в первое возбуждённое величина скорости атома

$$V \approx c\frac{E_{12}}{m\,c^2} \approx 3{,}3 \text{ м/с}.$$