Жужа Елена Николаевна
Доцент кафедры физики и информатики Кубанского госуниверситета, преподаватель Центра дополнительного образования для детей.

Жужа Михаил Александрович
Доцент кафедры радиофизики и радиоэкологии Кубанского госуниверситета, преподаватель Центра дополнительного образования для детей.

Черная Нелли Григорьевна
доцент кафедры физики и информатики Кубанского госуниверситета, председатель жюри краевой олимпиады по физике.

СОЮЗ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ ИЛИ ЗАДАЧИ ДЛЯ «УМНИКОВ»

В этой статье предложены задачи по физике с явным математическим уклоном, когда основная тяжесть решения задачи ложится на математический аппарат. Школьники, которые считают, что математику знают значительно лучше физики, могут протестировать себя на умение применять свои математические знания на практике. А школьники с лучшими знаниями по физике, чем по математике, смогут проверить себя на знание математического аппарата.

Введение

Углубленное изучение физики школьниками подразумевает решение сложных теоретических и экспериментальных задач вплоть до олимпиадного уровня. Особенно полезны задачи с межпредметными связями. Ниже представлены несколько задач, в том числе и авторских, в которых потребуются некоторые знания по математике, не выходящие за пределы школьной программы. Предложенные задачи по силам школьникам старших классов, серьезно занимающимся точными науками.

Условия задач

Задача 1. ***Термометр сопротивления***

Существуют термометры сопротивления, принцип действия которых основан на зависимости сопротивления проводника от температуры. Допустим, что из медного провода необходимо изготовить такой термометр с заранее заданной крутизной преобразования «температура – сопротивление» k = 1 Ом/°С (т.е. при изменении температуры на 1 °С сопротивление проводника должно изменяться на 1 Ом). Каким должно быть сопротивление медного проводника R_k при комнатной температуре t_k = 20 °С у такого термометра (для того, чтобы для его изготовления можно было отрезать необходимый кусок провода)?

Задача 2. ***Омическое сопротивление спиральной катушки***

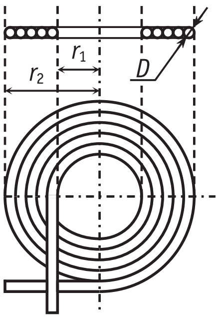

Рис. 1

В радиоаппаратуре иногда необходимо изготовить плоские однослойные катушки индуктивности (рис. 1). Вычислите длину провода L, сопротивление R и число витков n такой спиральной катушки, если известно, что она имеет внутренний радиус r_1 и внешний радиус r_2 (учтите, что это габаритные размеры, а не радиусы витков). Катушка намотана изолированным проводом диаметром $(D < r_1, r_2)$, толщиной изоляции на котором можно пренебречь. *Дополнительное задание*: Вычислите длину провода L_1, сопротивление R_1 и число витков n_1 цилиндрической катушки с плотной намоткой, если она имеет высоту H, такие же габаритные размеры (r_1, r_2) и намотана тем же проводом диаметром D (рис. 2).

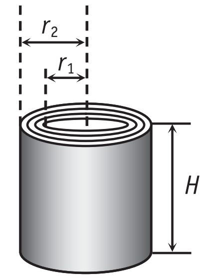

Рис. 2

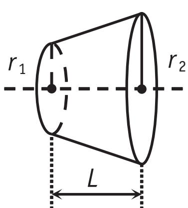

Рис. 3

Задача 3. ***Электрическое сопротивление усеченного конуса***

Сопротивление цилиндрического проводника вычисляется по известной формуле $R = \rho L/S$, где ρ – удельное электрическое сопротивление, L – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения. Определите сопротивление проводника в виде усеченного прямого конуса между двумя его сечениями с радиусами r_1 и r_2. Высота усеченного конуса равна L, удельное сопротивление материала конуса равно ρ. (рис. 3).

Задача 4. ***О влиянии земного тяготения на высоту телеграфных столбов***

Благодаря силе тяжести все тела на Земле (столбы, дома, горы, ...) находятся в деформированном (сжатом) состоянии, так как на нижние слои вещества давят вышележащие слои. Рассчитайте: абсолютное укорочение ΔL вертикального столба, который сжат собственным весом за счет притяжения Земли. Длина столба равна L. Для материала столба плотность равна ρ, модуль Юнга равен E.

Возможные решения

Задача 1.

Температурная зависимость сопротивления проводника определяется формулой $R = R_0(1+\alpha t)$. Для комнатной температуры t_k сопротивление провода R_k будет равно $R_K = R_0(1+\alpha t_K) = R_0\alpha \cdot t_K + R_0$. Если сравнить последнюю формулу с уравнением прямой линии $y = kx + b$, то видно, что известный нам по условию задачи коэффициент пропорциональности k равен $k = R_0\alpha$. Отсюда можно найти сопротивление $R_0 = k/\alpha$, которое можно подставить в формулу для нахождения сопротивления провода при комнатной температуре: $R_K = \dfrac{k}{\alpha}(1+\alpha t_K) = k\left(\dfrac{1}{\alpha} + t_K\right)$. При численных данных t_k = 20 °С, α = 0,0043 K^{-1} сопротивление медного провода (любого диаметра) при комнатной температуре должно быть равно 252,6 Ом для того, чтобы при изменении температуры на 1 °С его сопротивление изменялось на 1 Ом.

Заметим, что для создания такого термометра из медной проволоки диаметром 0,1 мм потребуется 117 м проволоки, что очень много. По-этому термометр с заданными параметрами целесообразно конструировать из металла со значительно большим удельным сопротивлением, например из нихрома. Тогда при диаметре проволоки 0,1 мм потребуется всего 1,8 м проволоки. (Примечание редакции

Задача 2.

Будем считать витки провода окружностями. Из рис. 1 следует, что длина внутреннего (первого) витка спиральной катушки составляет $\ell_1 = 2\pi\left[r_1 + (D/2)\right]$, длина второго витка $\ell_2 = 2\pi\left[r_1 + (D/2) + D\right]$ и т.д. Легко увидеть, что длины витков представляют собой последовательность чисел, создающих арифметическую прогрессию, n-ный член которой равен $\ell_n = 2\pi\left[r_1 + (D/2) + (n-1)D\right]$. Разность прогрессии равна $2\pi D$.

Количество витков (число членов арифметической прогрессии) равно $n = \dfrac{r_2 - r_1}{D}$.

Сумму n членов арифметической прогрессии S_n с первым и последним членами a_1 и a_n можно найти по формуле $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Для нашего случая $S_n = L$, $a_1 = \ell_1 = 2\pi\left[r_1 + (D/2)\right], a_n = \ell_n = 2\pi\left[r_2 - (D/2)\right]$.
После подстановки этих значений в формулу суммы прогрессии можно получить выражение для общей длины провода L в спиральной катушке:

$$L = \frac{\pi}{D}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

Электрическое сопротивление R однослойной катушки

$$R = \rho\frac{L}{S} = \rho\frac{4L}{\pi D^2} = \frac{4\rho}{D^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

Зная формулы для длины и сопротивления спирального провода, можно легко вычислить такие же величины для цилиндрической катушки (рис. 2). В самом деле, можно считать, что длина провода цилиндрической катушки равна сумме длин проводов $N = H/D$ спиральных однослойных катушек. Поэтому длина провода L_1 и сопротивление R_1 цилиндрической катушки определяются формулами:

$$L_1 = NL = \frac{\pi H}{D^2}\left(r_2^2 - r_1^2\right),$$

$$R_1 = NR = \frac{4\rho H}{D^4}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

Количество витков в цилиндрической катушке равно

$$n_1 = Nn = \frac{r_2 - r_1}{D^2}H.$$

Задача 3.

Пусть ось $0X$ совпадает с осью конуса (рис. 4). Расстояния x будем отсчитывать от вершины конуса – точки 0. На расстоянии x от точки 0 выберем тонкий слой проводника толщиной dx и радиусом r. Из геометрических построений (рис. 4) видно, что

$$tg\varphi = \frac{r_2 - r_1}{L}.$$

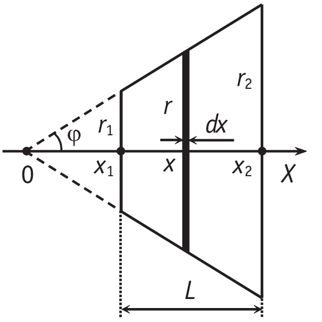

Рис. 4

Тогда $r = x\,tg\varphi = x\dfrac{r_2 - r_1}{L}$,

$$r_1 = x_1\frac{r_2 - r_1}{L},\quad r_2 = x_2\frac{r_2 - r_1}{L}.$$

Отсюда $x_1 = \dfrac{r_1 L}{r_2 - r_1}$, $\quad x_2 = \dfrac{r_2 L}{r_2 - r_1}$.

Сопротивление проводника толщиной dx и радиусом r будет равно

$$dR = \rho\frac{dx}{\pi r^2} = \rho\frac{L^2 dx}{\pi x^2 (r_2 - r_1)^2}.$$

Общее сопротивление всего конуса находится простейшим интегрированием

$$R=\frac{\rho L^2}{\pi\left(r_2-r_1\right)^2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\frac{\rho L^2}{\pi\left(r_2-r_1\right)^2}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right).$$

Подставив в последнюю формулу выражения для x_1 и x_2, найденные ранее, получим окончательную формулу для расчета сопротивления конуса: $R=\dfrac{\rho L}{\pi r_1 r_2}$.

Задача 4.

По закону Гука абсолютное сжатие тела длиной L под действием силы F равно

$$\Delta L=\frac{FL}{SE}, \qquad (1)$$

где S – площадь поперечного сечения, E – модуль Юнга. Пусть M – масса столба, M/L – масса единицы его длины. Тогда, как видно из рис. 5, на участок бесконечно малой длины dx, расположенный на расстоянии x от вершины столба, будет действовать сжимающая сила F, равная весу $P(x)$ вышележащих слоев:

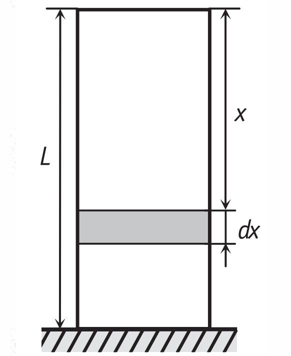

Рис. 5

$$F=P(x)=\frac{M}{L}x\cdot g. \qquad (2)$$

На основании формулы (1) можно записать, что элемент длины dx сожмется на величину:

$$\Delta(dx)=\frac{P(x)\,dx}{SE}=\frac{Mgx\,dx}{LSE}.$$

В задаче можно пренебречь изменениями величин S и g по высоте столба и считать, что $\Delta L \ll L$. Полное укорочение столба длиной L получим, суммируя удлинения всех бесконечно малых участков:

$$\Delta L=\int\limits_0^L\frac{Mgx\,dx}{LSE}=\frac{Mg}{LSE}\int\limits_0^L x\,dx=$$

$$=\frac{Mg}{LSE}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L=\frac{MgL}{2SE}. \qquad (3)$$

Формулу (3) можно получить и *без интегрирования*, если заметить, что вес, определяемый формулой (2), изменяется *линейно* от минимума $P(0) = 0$ до максимума $P(L)=Mg$. Поэтому можно подставить в формулу (1) его среднее значение $P_{CP}=Mg/2$ (как среднее значение сдавливающей силы F).

Подставив в формулу (3) массу столба $M=\rho SL$, получим следующую расчетную формулу:

$$\Delta L=\frac{\rho g L^2}{2E}.$$