



Варламов Сергей Дмитриевич
 Кандидат физико-математических наук,
 доцент кафедры физики специализированного учебно-
 научного центра (СУНЦ) МГУ им. М.В. Ломоносова,
 член жюри Московской городской
 и Всероссийской олимпиад школьников по физике.

Роль излучения в электрических колебательных системах

Электрические колебательные системы, рассматриваемые в школьных или олимпиадных задачах по физике, включают в качестве накопителей энергии «дискретные» элементы: конденсаторы и катушки индуктивности. В качестве элементов, которые «выводят» энергию из колебательной системы, обычно выступают резисторы. Однако для правильного объяснения происходящих в колебательных системах процессов в некоторых случаях нужно учитывать и «распределенную» в пространстве вне этих дискретных элементов энергию, а также принимать во внимание излучение колебательным контуром электромагнитных волн в окружающее пространство.



Распределенные емкости и индуктивности

С током, протекающим вдоль любого провода, в том числе и провода, соединяющего между собой разные дискретные элементы, связано магнитное поле и, соответственно, распределенная в пространстве вокруг провода энергия. Это можно представлять так, что провод имеет некоторую индуктивность. Только в этой индуктивности энергия не сосредоточена в ограниченном объеме (как в катушках индуктивности – дискретных элементах), а распределена по объему, «открытому» в окружающее пространство. Конечно, плотность энергии в таком «сосуде» распределена весьма неравномерно. Вблизи провода с током у самой поверхности провода она велика, а с расстоянием R от оси провода она быстро убывает примерно по закону $1/R^2$.

С заряженными проводниками, из которых составлена электрическая цепь, связано электрическое поле, распределенное в окружающем пространстве. Можно считать, что энергия этого поля – это запас энергии в некотором конденсаторе (его ещё называют «паразитным», хотя ничего плохого в его существовании нет). Плотность этой энергии в пространстве тоже распределена неоднородно. Вблизи поверхности провода она самая большая, а с расстоянием R от оси провода она быстро примерно по закону $1/R^2$ убывает.

Если дискретные элементы соединяются двумя проводами с удельным сопротивлением ρ , имеющими длину l , находящимися в воздухе (в вакууме) друг от друга на расстоянии D , и имеющими одинаковый диаметр d , то при выполнении соотношения ($l \gg D \gg d$) «паразитные» индуктивность L , ёмкость C и сопротивление R проводов имеют величины порядка:

$$L \sim \frac{\mu_0 l}{2\pi} \times \ln\left(\frac{D}{d}\right), \quad C \sim \frac{l\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}, \quad R = \frac{8\rho l}{\pi d^2}.$$

Излучение электромагнитных волн

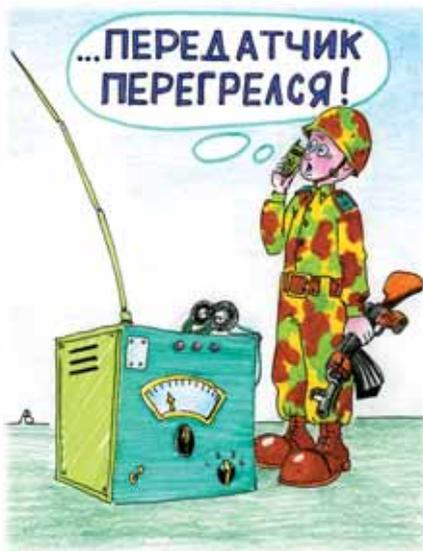
Присутствующее в пространстве вокруг колебательной системы переменное электромагнитное поле вовсе не обязано «оставаться на месте». Оно отправляется в путешествие – возникают электромагнитные волны.

Сообщим для справки, что суммарная мощность излучения, уходящего в пространство от колебательной системы, равна суммарному потоку вектора Пойнтинга $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ через поверхность, охватывающую со всех сторон рассматриваемую колебательную систему. Вектор плотности потока электромагнитной энергии в данном месте пространства – вектор Пойнтинга – равен векторному произведению напряженности электрического поля \vec{E} и напряженности магнитного поля \vec{H} в данный момент времени: $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$.

Связь между вектором индукции магнитного поля \vec{B} и вектором напряженности магнитного поля \vec{H} в однородных средах устанавливается соотношением: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$.

Иногда потери энергии, связанные с излучением электромагнитных волн, могут быть сравнимыми или даже превосходить потери, связанные с выделением тепловой энергии в проводах (резисторах), включенных в колебательную систему. Некоторые колебательные системы как раз и предназначены для излучения в пространство электромагнитных волн. Как тут не вспомнить радиопередатчики и в частности сотовые телефоны.

Для описания тепловых потерь в колебательном контуре достаточно включить в эквивалентную электрическую схему резистор $R_{\text{тепл}}$ соответствующей величины (рис. 1). Наличие этого резистора позволяет считать идеальными емкости и индуктивности в колебательном контуре. Для учёта потерь на излучение в эквивалентную схему нужно включить ещё один «резистор» $R_{\text{изл}}$. Его присутствие позволяет формально получить правильные зависимости тока в проводах контура от времени при колебаниях. В схеме на рис. 1 эти два резистора специально включены «по-разному» – один последовательно, а другой параллельно емкости и индуктивности, хотя никакими принципиальными соображениями это не обосновывается.



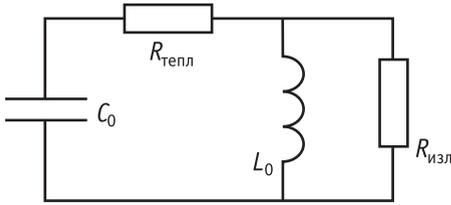


Рис. 1.

ков. Точнее почти к нулю, так как на переменном токе в сверхпроводниках есть небольшие потери. (Примечание редакции журнала.) Тогда в схеме остаётся только резистор, описывающий потери на излучение. При незатухающих колебаниях в контуре величины напряжения и тока (и пропорциональные им \vec{E} и \vec{H}) изменяются со временем по гармоническому закону, и между напряжением и током имеется сдвиг фаз 90° . При таких условиях среднее по времени значение произведения этих величин равно нулю. При низкочастотных колебаниях это практически выполняется. Однако разность фаз не точно равна 90° , так как скорость распространения электромагнитных волн «с» конечна. Излучение всё-таки приводит к медленному затуханию колебаний. При колебаниях на частоте $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ и характерных линейных размерах колебательной системы $\sim D$ раз-

ность фаз между векторами \vec{E} и \vec{H} , созданными зарядами и токами в колебательной системе отличается от 90° на величину, равную по порядку $\Delta\varphi = \omega D/c$. Это связано с тем, что максимальные значения электрического поля и магнитного поля достигаются в разных местах колебательного контура, поэтому до каждой точки пространства «поле добирается» от этих мест за разные промежутки времени. Таким образом, мощность потерь на излучение пропорциональна энергии, запасенной в контуре, и за один период колебаний теряется её доля, пропорциональная $\Delta\varphi$. Следовательно, потери на излучение должны описываться эквивалентным сопротивлением порядка:

$$R_{\text{изл}} \sim \frac{2\pi c L_0}{D}.$$

Как видно, чем меньше размеры колебательной системы, тем меньше она излучает, так как сопротивление $R_{\text{изл}}$, подключенное параллельно колебательному контуру, при уменьшении размеров системы растёт. Это, естественно, справедливо только в том случае, если размеры колебательной системы значительно меньше длины электромагнитной волны, соответствующей частоте колебаний контура.

Ключи в простейших электрических системах

Рассмотрим две простейшие вроде бы «не колебательные» системы.

Пример 1. К заряженному конденсатору подключается другой такой же по емкости конденсатор, но незаряженный. Вопросы к этой ситуации могут задаваться разные. Например: «какая доля энергии системы перейдет в тепло?» Обычно при разборе решения «приговаривают» так: половина энергии, имевшейся в первоначально заряженном конденсаторе, осталась в системе конденсаторов в виде энергии электрического поля, а вторая половина перешла в тепло. Чтобы убедиться в несправедливости второй части такого «приговора», достаточно провести этот эксперимент «в натуре», причём в качестве «детектора» можно использовать любой радиоприёмник. В момент подключения конденсаторов друг к другу в динамике приемника раздаётся щелчок – это и есть проявление возникших и «разлетевшихся» во все стороны электромагнитных волн.

После такого подключения у конденсаторов останется только половина начальной энергии заряженного конденсатора. Вторая половина энергии выделится в виде теплоты на соединительных проводах (или резисторе, через который подключают конденсаторы) и уйдёт в энергию излучения электромагнитных волн. Доля ушедшей в излучение энергии будет тем больше, чем меньше сопротивление проводов. (Примечание редакции журнала.)

Пример 2. К батареек через ключ подсоединена катушка индуктивности L , по которой течёт ток I . Ключ размыкают. Куда девается энергия магнитного поля катушки?

В этом случае тоже «приговаривают» так: при размыкании ключа в воздухе возникает электрический пробой, ток протекает по участку с сопротивлением и энергия, запасённая в катушке, переходит в тепло. Однако причина возникновения пробоя обычно не рассматривается. А причина как раз в появлении высокой напряжённости электрического поля на обкладках «паразитного» конденсатора, образованного разомкнутыми проводниками ключа. Проведение такого эксперимента «в натуре» с тем же индикатором – радиоприёмником – показывает, что и в этом случае излучаются электромагнитные волны, уносящие часть энергии, запасённой в катушке.

Примеры задач с конденсаторами и катушками индуктивности, в которых существенную роль играет излучение

Рассмотрим подробнее два случая, которые в разных формулировках появляются в задачах олимпиад или вступительных экзаменов.

Случай 1. Подключение незаряженного конденсатора C_2 параллельно конденсатору C_1 колебательного контура, в котором происходят электрические колебания, в тот момент, когда на конденсаторе контура напряжение не было равно нулю. Пусть в момент подключения идёт ток I_0 и верхняя обкладка конденсатора C_1 заряжена отрицательно. Электрическая схема, соответствующая этой ситуации, изображена на рис. 2.

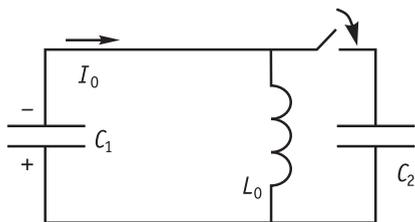


Рис. 2.

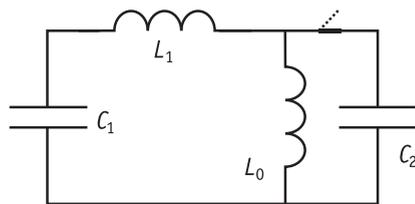


Рис. 3.

У вновь полученного после замыкания ключа контура имеются две резонансные частоты колебаний. Одна из частот гораздо больше другой. Высокая резонансная частота колебаний связана с наличием «паразитной» индуктивности проводов, соединяющих дискретные элементы электрической цепи. На рис. 3 суммарная эквивалентная «паразитная» индуктивность L_1 , распределенная по всем проводам, изображена включенной между конденсатором и «главной» индуктивностью L_0 контура. Если выполнено условие $L_0 \gg L_1$, то низкая и высокая резонансные частоты равны примерно:

$$\omega_{\text{низк}} \approx \sqrt{\frac{1}{L_0(C_1 + C_2)}}, \quad \omega_{\text{высок}} \approx \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2}}.$$

Здесь и далее речь идёт о циклической (круговой) частоте ω , которая связана с обычной частотой ν соотношением $\omega = 2\pi\nu$. (Примечание редакции журнала.)

Поскольку «паразитная» индуктивность «открыта в окружающее пространство», от неё в процессе колебаний на высокой частоте разбегаются в пространстве электромагнитные волны. На высокой частоте значительная доля потерь энергии контура приходится на излучение электромагнитных волн в окружающее пространство, а на низкой частоте контур практически не излучает. То есть излучать-то он излучает, но мощность излучения настолько мала, что ей можно пренебречь в сравнении с мощностью тепловых потерь в контуре. Колебания на высокой частоте быстро затухают. Время, за которое высокочастотные колебания затухают, может быть коротким в сравнении с периодом низкочастотных колебаний (на низкой резонансной частоте). После их затухания на конденсаторах C_1 и C_2 устанавливается одинаковое напряжение U_1 . Оно находится из условия сохранения суммарных зарядов на подключенных непосредственно друг к другу пластинах разных конденсаторов: $U_0 C_1 = U_1 (C_1 + C_2)$.

Продолжение эволюции системы – это колебания на низкой частоте с новыми начальными условиями: ток в «главной» катушке индуктивности за короткое время затухания высокочастотных колебаний не успел измениться, и остался таким же, каким он был в катушке индуктивности в момент замыкания ключа. А напряжения U_1 на конденсаторах C_1 и C_2 стали меньше напряжения U_0 , которое было на заряженном конденсаторе C_1 контура в момент замыкания ключа: $U_1 = U_0 C_1 / (C_1 + C_2)$.

После проведенного разбора «быстрого этапа» эволюции в колебательной системе нахождение зависимостей тока и разности потенциалов на пластинах конденсаторов от времени не представляет трудностей. Ток в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах колеблются на новой низкой частоте $\omega_{\text{низк}}$. Качественная зависимость от времени t тока I через конденсатор C_1 после замыкания ключа для указанных начальных условий показана на рис. 4 (показан промежуток времени, который гораздо меньше периода низкочастотных колебаний в контуре).

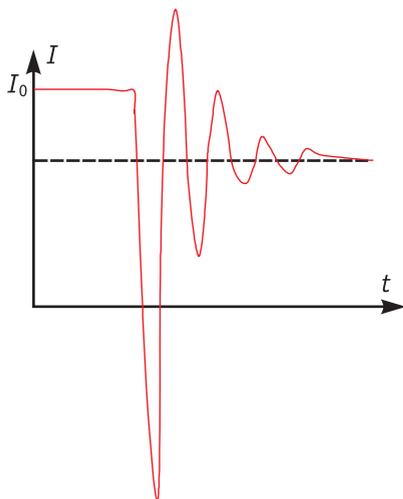


Рис. 4.

Высокочастотные колебания затухают за время, которое значительно короче, чем период низкочастотных колебаний в контуре. Ко времени затухания высокочастотных колебаний ток через C_1 уменьшается до значения $I_0 C_1 / (C_1 + C_2)$. А через ключ к этому времени течёт ток $I_0 C_2 / (C_1 + C_2)$. При этом суммарный ток через катушку индуктивности L_0 остаётся прежним.

Случай 2. Размыкание ключа, который включен параллельно одной из последовательно соединенных частей составной катушки индуктивности (рис. 5). В момент размыкания ключа ток в проводах колебательного контура не был равен нулю.

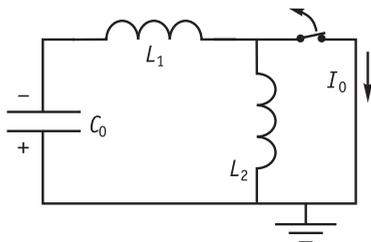


Рис. 5.

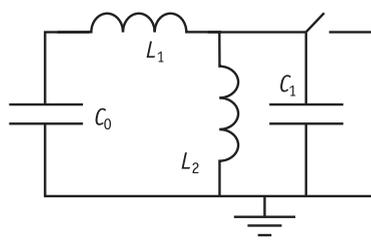


Рис. 6.

При размыкании ключа новый контур представляет собой систему с двумя разными резонансными частотами, одна из которых высокая, а другая низкая. Высокая частота колебаний связана с наличием «паразитной» емкости проводов, соединяющих дискретные элементы электрической цепи. На рис. 6 суммарная эквивалентная распределенная по всем проводам паразитная емкость изображена в виде конденсатора C_1 . Если выполнено условие $C_0 \gg C_1$, то низкая и высокая резонансные частоты равны примерно:

$$\omega_{\text{низк}} \approx \sqrt{\frac{1}{C_0(L_1 + L_2)}}, \quad \omega_{\text{высок}} \approx \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C_1 L_1 L_2}}.$$

Колебания на высокой частоте затухают за счет излучения в окружающее пространство электромагнитных волн из «отрытого в пространство» конденсатора C_1 . Время затухания колебаний может быть малым в сравнении с периодом низкочастотных резонансных колебаний в контуре. После затухания высокочастотных колебаний в обеих катушках индуктивности устанавливается одинаковый ток. Значение этого тока находится из условия сохранения суммарного магнитного потока в двух разных катушках индуктивности L_1 и L_2 : $\Phi_0 = L_1 I_0 = I_1 (L_1 + L_2)$.

Если в момент размыкания ключа на верхней пластине конденсатора C_0 был отрицательный заряд $C_0 U_0$, а ток через ключ был равен I_0 (рис. 5), то этим начальным условиям соответствует качественная зависимость от времени t напряжения U между нижним проводом (землей) и точкой соединения двух катушек индуктивности, показанная на рис. 7 (показан промежуток времени, который гораздо меньше периода низкочастотных колебаний в контуре). За весьма короткое время напряжение U после затухания высокочастотных колебаний приходит к значению $U_0 L_2 / (L_1 + L_2)$, которое показано на рисунке пунктирной линией.

Можно сказать так: резкое повышение напряжения на L_2 приводит к тому, что ток в катушке L_1 начинает уменьшаться, а в катушке L_2 растёт. К моменту затухания высокочастотных колебаний токи в катушках индуктивности становятся одинаковыми.

Продолжение эволюции системы – это колебания на низкой частоте с новыми начальными условиями: напряжение на конденсаторе осталось почти таким же, каким оно было в момент замыкания ключа, а ток в каждой из двух катушек индуктивности меньше того тока I_0 , который был в катушке индуктивности L_1 контура в момент размыкания ключа: $I_1 = I_0 L_1 / (L_1 + L_2)$.

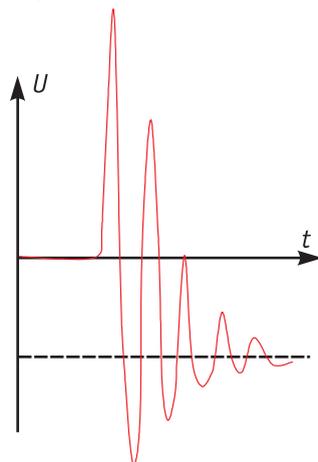


Рис. 7.