Федоренко Ирина Владимировна
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Национального исследовательского университета «МИЭТ».

Законы сохранения в курсе физики средней школы: решение нестандартных задач

Не секрет, что задачи на совместное применение законов сохранения импульса и механической энергии являются одними из самых сложных в школьном курсе физики. Тем не менее подобные задачи регулярно предлагаются в диагностических и тренировочных работах при подготовке к Единому государственному экзамену. В статье нет ответа на вопрос, как научить школьников их решать, ибо это уже вопрос преподавания. Стремясь помочь школьникам в работе над культурой физического мышления, автор берёт на себя смелость лишь продемонстрировать различные подходы к решению задач на применение законов сохранения импульса и энергии. Статья адресована в первую очередь старшеклассникам, планирующим сдавать ЕГЭ по физике.

Чем фундаментальнее закономерность,
тем проще её можно сформулировать.

П.Л. Капица

Исследование важного с практической точки зрения процесса столкновения тел – один из примеров совместного использования законов сохранения энергии и импульса. В зависимости от упругих свойств тел столкновения между ними могут быть упругими, частично упругими и неупругими. *Абсолютно упругим* называется такое столкновение тел, в результате которого суммарная кинетическая энергия соударяющихся тел сохраняется. В чистом виде этот случай при столкновении макроскопических тел не встречается, но с высокой степенью точности реализуется при ударах бильярдных шаров из слоновой кости.

Рассмотрение *центрального удара* абсолютно упругих шаров, при котором скорости шаров до удара $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ направлены вдоль прямой, соединяющей их центры, обычно не вызывает трудностей.

Скорости шаров после удара $\vec{v}_1{}'$ и $\vec{v}_2{}'$ легко найти из законов сохранения импульса и энергии:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2{}',$$
$$\frac{m_1\vec{v}_1{}^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2{}^2}{2} = \frac{m_1\vec{v}_1'^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2'^2}{2}. \qquad (1)$$

После записи закона сохранения импульса в проекции на ось x, направленную вдоль линии центров шаров, и выполнения преобразований задача сводится к решению системы линейных уравнений. Результат хорошо известен:

$$v_{1x}' = -v_{1x} + 2\frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x}}{m_1 + m_2},$$
$$v_{2x}' = -v_{2x} + 2\frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x}}{m_1 + m_2}. \qquad (2)$$

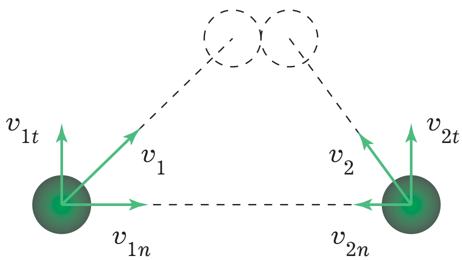

Рис. 1

Если удар *нецентральный,* то скорости шаров до столкновения направлены под углом к линии центров. В этом случае можно разложить скорость каждого шара на составляющие v_n и v_t в направлении линии центров и в перпендикулярном направлении соответственно (рис. 1). Тогда законы сохранения импульса и энергии принимают вид:

$$m_1v_{1n} + m_2v_{2n} = m_1v_{1n}' + m_2v_{2n}',$$
$$m_1v_{1t} + m_2v_{2t} = m_1v_{1t}' + m_2v_{2t}',$$
$$\frac{m_1(v_{1n}^2 + v_{1t}^2)}{2} + \frac{m_2(v_{2n}^2 + v_{2t}^2)}{2} = \qquad (3)$$
$$= \frac{m_1(v_{1n}'^2 + v_{1t}'^2)}{2} + \frac{m_2(v_{2n}'^2 + v_{2t}'^2)}{2}.$$

Получилось всего три уравнения для определения четырёх неизвестных величин

$$v_{1n},\ v_{1t},\ v_{1n}',\ v_{1t}'.$$

Чтобы написать недостающее уравнение, введём предположение, что при столкновении шаров не возникают тангенциальные силы. Сделать такое предположение вынуждает нас закон сохранения энергии, уже использованный при написании уравнений (3). Если бы при столкновении были тангенциальные силы трения скольжения, механическая энергия не могла бы сохраняться. Поэтому, предполагая удар абсолютно упругим, мы должны считать сами шары *идеально гладкими*. При их столкновении тангенциальные силы не возникают. Если это так, то не происходит также изменения тангенциальных составляющих скоростей, и к уравнениям (3) следует присоединить уравнения

$$v_{1t}' = v_{1t},$$
$$v_{2t}' = v_{2t}. \qquad (4)$$

В результате получим:

$$m_1v_{1n} + m_2v_{2n} = m_1v_{1n}' + m_2v_{2n}',$$
$$\frac{m_1v_{1n}^2}{2} + \frac{m_2v_{2n}^2}{2} = \frac{m_1v_{1n}'^2}{2} + \frac{m_2v_{2n}'^2}{2}. \qquad (5)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (1) лишь обозначениями. Следовательно, при нецентральном абсолютно упругом ударе идеально гладких шаров нормальные составляющие скоростей ведут себя так же, как при центральном ударе; тангенциальные составляющие не изменяются.

Задача 1. (МЦНМО, 2011) Упругий шар, движущийся по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью $\vec{v}$, испытывает абсолютно упругое нелобовое столкновение с таким же покоящимся шаром, в результате чего он продолжает движение со скоростью $\vec{v}'$, направленной под углом $\varphi = 30^o$ к первоначальному направлению. Под каким углом α к первоначальному направлению движения первого шара направлена скорость $\vec{v}_1$ второго шара после столкновения?

Решение. *Первый способ.* Поскольку шары одинаковые и второй шар до столкновения покоился, законы сохранения импульса и энергии принимают вид:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_1, \qquad (6)$$

$$v^2 = v'^2 + v_1^2. \qquad (7)$$

Возведём первое уравнение в квадрат:

$$v^2 = v'^2 + 2\vec{v}\,'\vec{v}_1 + v_1^2. \qquad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), находим, что скалярное произведение

$$\vec{v}\,'\vec{v}_1 = 0.$$

Следовательно, $\vec{v}\,' \perp \vec{v}_1$, то есть

$$\alpha = 90^\circ - \varphi = 60^\circ.$$

Второй способ. Поскольку шары гладкие, а удар абсолютно упругий, тангенциальные составляющие скоростей шаров не изменятся. Так как шары имеют равные массы и второй шар до столкновения покоился, то из формул (2) для нормальных составляющих скоростей $\vec{v}\,'$ и $\vec{v}_1$ находим

$$\begin{aligned} v'_n &= 0, \\ v_{1n} &= v_n. \end{aligned} \qquad (9)$$

Поэтому после удара налетающий шар будет иметь скорость $\vec{v} = \vec{v}_t$, а второй шар – скорость $\vec{v}_1 = \vec{v}_n$; угол между скоростями после разлёта равен 90^o, т. е. $\alpha = 60^\text{o}$.

Задача 2. (МИОО, 2014) На гладкой горизонтальной плоскости находятся две одинаковые идеально упругие гладкие шайбы. Одна из них движется со скоростью $\vec{v}$, равной по модулю 3 м/с, а другая покоится вблизи прямой линии, проведённой через центр первой шайбы в направлении её скорости. Шайбы сталкиваются, и после соударения вторая, первоначально покоившаяся шайба, отскакивает под углом $\alpha = 30^\text{o}$ к этой линии. Найдите скорость $\vec{v}_1$ первой шайбы после столкновения.

Решение. Поскольку шайбы гладкие и удар абсолютно упругий, угол между скоростями шайб после разлёта равен 90^o (см. решение задачи 1). Следовательно, скорость $\vec{v}_1$ первой шайбы после удара образует угол 60^o с направлением её первоначального движения (рис. 2). Закон сохранения импульса запишем в проекциях на два направления, одно из которых совпадает с направлением движения первой шайбы до удара, а другое – перпендикулярно этому направлению:

$$\begin{aligned} v &= v_1 \cos 60^\circ + v_2 \cos 30^\circ, \\ v_2 \sin 30^\circ &- v_1 \sin 60^\circ = 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

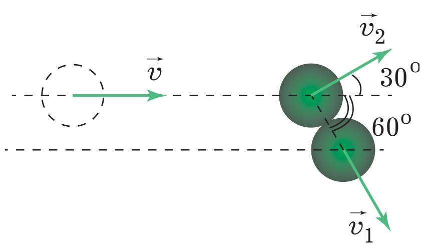

Рис. 2

Здесь v_2 – модуль скорости второй шайбы после столкновения. Из уравнений (10) находим

$$v_1 = \frac{v}{2} = 1{,}5 \text{ м/с}.$$

Задача 3. При абсолютно упругом соударении двух шаров, движущихся под углом α друг к другу, скорость одного из шаров не изменилась по модулю. Под каким углом β шары разлетелись?

Решение. В системе уравнений (1) второе уравнение системы оставим без изменений, а закон сохранения импульса преобразуем, возведя левую и правую части в квадрат:

$$\frac{m_1 v_1{}^2}{2}+\frac{m_2 v_2{}^2}{2}=\frac{m_1 v_1'^2}{2}+\frac{m_2 v_2'^2}{2}, \quad (11)$$

$$\begin{gathered} m_1^2 v_1^2+m_2^2 v_2^2+2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \alpha= \\ =m_1^2 v_1'^2+m_2^2 v_2'^2+2 m_1 m_2 v_1' v_2' \cos \beta . \end{gathered} \quad (12)$$

Для случая $v_1=v_1'$ формулы (11) – (12) принимают вид

$$v_2=v_2', \quad \cos \alpha=\cos \beta . \quad (13)$$

Итак, если при абсолютно упругом соударении скорость одного из шаров не изменяется по модулю, то не изменяется в результате соударения и угол между скоростями.

Задача 4. Два одинаковых шара радиусами R летят навстречу друг другу со скоростями $\vec{v}_1=-\vec{v}_2$, как показано на рис. 3. Прицельный параметр – расстояние между прямыми линиями, по которым движутся центры шаров до столкновения, $S=R$. На какой угол β повернётся вектор скорости каждого из шаров после удара? Удар считать абсолютно упругим, шары – идеально гладкими.

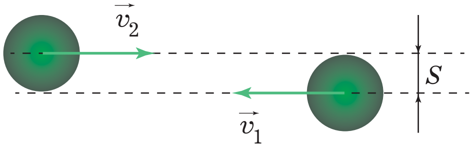

Рис. 3

Решение. Из законов сохранения импульса и энергии

$$m\vec{v}_1'+m\vec{v}_2'=0,$$

$$m v_1{}^2=\frac{m v_1'^2}{2}+\frac{m v_2'^2}{2}$$

находим, что $v_1'=v_2'=v_1$, т. е. модули скоростей шаров после удара останутся прежними. Поскольку шары гладкие и удар абсолютно упругий, то приращение импульса каждого из шаров направлено по линии, соединяющей их центры в момент удара. Так, вектор $\vec{v}_1$ повернётся на угол β (рис. 4), приращение вектора $\Delta\vec{v}_1=\vec{v}_1'-\vec{v}_1$ направлено параллельно линии центров шаров. Из рисунка видно, что

$$\beta+2\alpha=\pi, \quad \sin \alpha=\frac{S}{2R}.$$

Следовательно,

$$\beta=\pi-2 \arcsin \frac{S}{2R}=\frac{2\pi}{3}.$$

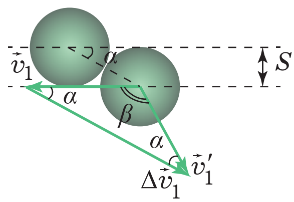

Рис. 4

Задача 5. Три одинаковых шара A, B, C расположены на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 5). Радиусы шаров одинаковы и равны R. В начальном состоянии шары B и C неподвижны, шар A движется со скоростью $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно отрезку BC по касательной к поверхности шара B. После абсолютно упругого нецентрального столкновения с шаром B и последующего столкновения с шаром C шар A останавливается. Найдите скорости $\vec{v}_B$, $\vec{v}_C$ шаров B и C.

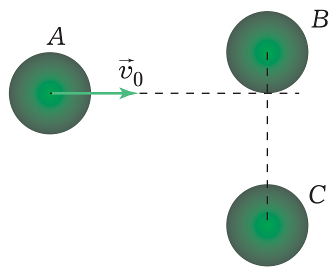

Рис. 5

Решение. Разложим вектор $\vec{v}_0$ на два взаимно перпендикулярных вектора, один из которых направлен к центру шара B (рис. 6):

$$\vec{v}_0=\vec{v}_1+\vec{v}_2.$$

Так как удар абсолютно упругий и силы трения пренебрежимо малы, то, как это следует из формул (4) и (5), шар A останавливается только в том случае, если вектор $\vec{v}_2$ направлен к центру шара C. Поскольку радиусы шаров одинаковы, угол между векторами $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$ равен $\dfrac{\pi}{6}$. Тогда из закона сохранения импульса находим

$$v_B = v_1 = \frac{v_0\sqrt{3}}{2},$$

$$v_C = v_2 = \frac{v_0}{2}.$$

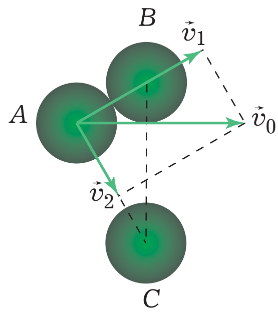

Рис. 6