

Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и ГОУ ЦО
«Технологии обучения» г. Москвы.

Осторожно!

Закон сохранения импульса

Решение стандартных задач с использованием закона сохранения импульса обычно не вызывает серьёзных затруднений. Однако за его внешней простотой порой скрываются «подводные камни», которые могут приводить к ошибкам в решении. Приглашаем читателей принять участие в процессе поиска этих ошибок. Чтобы проще их было обнаружить, мы выделили серым фоном те части текста, где содержатся ошибочные решения, утверждения, формулы.

Введение

На последнем во второй четверти занятии кружка по решению олимпиадных задач Анатолий Иванович предложил: «Тему следующего занятия выбирайте сами. Я советую после отдыха взять что-нибудь полегче. Кстати, а какая из изученных в разделе «Механика» тем, по вашему мнению, является самой простой?»

Ребята задумались, но очень быстро пришли к почти полному согласию: конечно, это тема «Закон сохранения импульса (ЗСИ)».

«Я даже могу привести два довода, подтверждающих наш выбор, – сказал Алёша, – во-первых, сам закон очень прост: геометри-

ческая сумма импульсов тел замкнутой системы остаётся постоянной при любых взаимодействиях тел системы между собой. При решении задач надо лишь помнить, что импульс – векторная величина, и учитывать это, выбирая знак проекции на ось. А во-вторых, в задачниках данная тема занимает слишком мало места по сравнению с другими, значит, в ней не очень много разнообразных типов задач».

«Хорошо, – согласился учитель, – тогда Алёше и Васе я дам в качестве домашнего задания по задаче, а на следующем занятии они расскажут нам о своих решениях».

Процесс решения задач

На том и порешили, а когда встретились после каникул, неожиданно первым заговорил Филипп: «Я хотел спросить Вас, Анатолий Иванович, вот о чём. Вчера смотрел я фильм «Смерть ковбоя» и обратил внимание на то, что, когда пуля попала в героя, он отлетел назад на несколько метров. Может ли быть такое в реальной жизни или же это кино-трюк?»

«Интересно, что вопрос Филиппа удачно вписывается в тему нашего сегодняшнего занятия, – улыбнувшись, сказал учитель. – Ответ на него можно получить, решив следующую оценочную задачу: *оцените скорость человека сразу после попадания в него пули*. Поскольку задача оценочная, придётся самим задать необходимые данные. Что нам понадобится для её решения?»

«Видимо, достаточно знать массы человека и пули, а также начальную скорость пули», – услышались предложения ребят.

«Примем для оценки массы равными соответственно 100 кг и 10 г, а скорость 300 м/с. Итак, если условие этой оценочной задачи переформулировать, то получится следующая обычная задача».

Задача 1. Пуля массой 10 г, летящая со скоростью 300 м/с, попадает в неподвижно стоящего человека массой 100 кг и застревает в нём. Определите скорость, приобретённую человеком сразу после попадания в него пули.

«Такую задачу решить несложно, – заметил Филипп. – Для этого нужно просто записать ЗСИ:

$$mv = (M + m)u .$$

Отсюда легко выражается искомая скорость

$$u = \frac{mv}{M + m} \approx 0,03 \text{ м/с} .$$

Ответ: $u = \frac{mv}{M + m} \approx 0,03 \text{ м/с} .$



«Не очень похоже на то, что мы видим в боевиках!», – решили ребята.

«Давайте теперь перейдём к домашним задачам».

Первым взял слово Алёша: «Мне досталась несложная задача – я даже не понял, почему Анатолий Иванович решил именно её решение разбирать на кружке, да ещё и с таким условием, когда человек движется по тележке. Ведь есть более красивая формулировка аналогичной задачи, в которой человек перемещается по лодке, плавающей на воде. Я вчера нашёл задачи с лодкой в двух задачаниках».

«О лодке поговорим после решения задачи с тележкой, – сказал Анатолий Иванович. – Есть одна существенная причина, по которой мне хотелось бы разобрать задачу с тележкой одной из первых. К сожалению, в учебниках встречаются отличаю-

щиеся друг от друга определения, какую систему тел считать замкнутой. Во избежание недоразумений давайте договоримся, что *замкнутой (изолированной) системой тел называется система, не взаимодействующая с другими телами (нет внешних сил, действующих на систему)*. При наличии внешних сил систему не будем считать замкнутой. Такое определение замкнутости системы принято во многих учебниках. Интересно следующее: если внешние силы есть (система незамкнутая), но их сумма равна нулю, то импульс системы сохраняется, т.е. система ведёт себя как замкнутая». После этих слов Анатолий Иванович предложил Алёше рассказать решение задачи с тележкой.

Задача 2. Тележка стоит на рельсах. Человек массой $m = 60$ кг переходит с одного её конца на другой параллельно рельсам. На какое расстояние относительно Земли переместится при этом тележка массой $M = 120$ кг, если её длина $l = 6$ м? Массой колёс тележки и трением в их осях пренебречь.

Решение Алёши. На систему «человек – тележка» в процессе движения действуют внешние силы – сила тяжести и сила реакции опоры. Эти силы скомпенсированы. Система ведёт себя как замкнутая. Поэтому, применяя ЗСИ, запишем

$$0 = mv - Mu \Rightarrow mv = Mu, \quad (1)$$

где v – скорость человека, а u – скорость тележки, движущейся навстречу человеку. Умножим обе части равенства (1) на время Δt движения человека и тележки:

$$mv\Delta t = Mu\Delta t,$$

где $v\Delta t$ – перемещение человека l , а $u\Delta t$ – искомое перемещение тележки s .

Таким образом,

$$ml = Ms,$$

откуда

$$s = \frac{m}{M}l = 3 \text{ м.}$$

Ответ Алёши: $\frac{m}{M}l = 3 \text{ м.}$

Завершив свой рассказ о решении задачи, Алёша остался у доски, ожидая одобрения слушателей.

«Ну, что скажете? – спросил ребят Анатолий Иванович. – Вы согласны с таким решением?»

«Меня вот что смущает, – как всегда задумчиво проговорил Слава, – проверка в частном случае...»

«Объясни понятнее», – попросил Алёша.

«Конечная формула, полученная в твоём решении, – не спеша продолжил Слава, – должна быть справедлива при любых разумных числовых данных. Предположим, тележка очень лёгкая, то есть, выражаясь формально математически, пусть её масса стремится к нулю ($M \rightarrow 0$). Тогда из полученной тобой формулы следует, что искомое перемещение тележки стремится к бесконечности ($s \rightarrow \infty$), что явно противоречит физическому смыслу».

«Замечательное наблюдение! – похвалил Славу Анатолий Иванович. – Обратите внимание: нередко полезно бывает провести исследование буквенного ответа в частном случае. И если окажется, что формула неверна, то это – тревожный сигнал и в то же время подсказка о нашем неверном решении. После такой подсказки мы абсолютно уверены, что нужно искать ошибку в нём».

«А найти-то её совсем несложно, – рассудительно заметил Дима, – ведь ошибиться практически негде: система замкнута, знаки проекций мы



учли, правда, движутся два тела, поэтому нужно их скорости брать в одной системе отсчёта. В решении Алёши скорость человека рассматривалась относительно тележки, а скорость тележки – относительно Земли».

«Точно! – воскликнул, немного смутившись, Алёша. – Давайте я попробую сразу исправить ошибку. Если человек перемещается со скоростью v относительно тележки, а сама тележка движется навстречу со скоростью u , то относительно Земли его скорость равна $v - u$. Тогда ЗСИ в системе отсчёта, связанной с Землёй, запишется так:

$$0 = m(v - u) - Mu \Rightarrow m(v - u) = Mu. \quad (2)$$

Умножим обе части равенства (2) на время движения Δt , получим

$$m(v - u)\Delta t = Mu\Delta t.$$

Учитывая, что $v\Delta t = l$ и $u\Delta t = s$, имеем

$$m(l - s) = Ms,$$

откуда

$$s = \frac{m}{M + m}l = 2 \text{ м}.$$

«Посмотрите, – обратил на сей раз внимание сам Алёша, – в предельном случае очень лёгкой тележки ($M \rightarrow 0$) получается $s \rightarrow l$, что вполне соответствует реальности: если масса тележки пренебрежимо мала, человек практически не отталкивается от неё, оставаясь на месте, при этом тележка перемещается на свою длину».

Ответ Алёши, Славы и Димы:

$$s = \frac{m}{M + m}l = 2 \text{ м}.$$

«Ну, вот и отлично! – сказал Анатолий Иванович. – Ответ в задаче получен верный. Однако есть ещё один «тонкий» момент в приведённом решении: и Алёша, и Дима считали, что человек и тележка движутся равно-

мерно, но ведь в действительности их скорости в процессе движения изменялись. Повлияет ли это на ответ?»

«Но мы же не знаем, каков характер движения тел!», – воскликнул Алёша, как будто удивляясь, зачем понадобилось учителю ставить перед ребятами непосильную задачу.

«Это не так уж и важно, – заметил Филипп. – Можно разбить всё время движения на такие малые промежутки Δt , когда скорости тел практически не изменялись, записать для каждого такого промежутка ЗСИ в виде (2), а затем, умножить обе части этого равенства на Δt . Тогда, если просуммировать перемещения за всё время движения, результат получится прежний».

«Прекрасно, Филипп! – обрадовался Анатолий Иванович рассуждениям своего ученика. – Теперь о лодке на воде. В этом случае задача принципиально отличается от разобранных нами. И дело здесь не только в трении, о котором можно было бы сказать, что оно в некоторых случаях пренебрежимо мало. При движении лодки обязательно станет перемещаться вода, и, следовательно, в решении требуется учитывать её импульс. Вот почему задачу о перемещении человека по лодке можно считать некорректной».

«А как же быть, если на экзамене или олимпиаде «нарвёшься» на подобную задачу?», – спросил Алёша.

«В таком случае, видимо, авторы ждут от вас решения, аналогичного приведённому выше. Тогда лучше всего «подыграть» им и решать задачу, не обращая внимания на движение воды».

Ребята грустно улыбнулись, а учитель продолжил: «Перейдём теперь ко второй домашней задаче. Вася, прошу Вас к доске!»

«Я, как и Алёша, вначале подумал, – начал свой рассказ Вася, – что мне досталась очень простая задача, но теперь, после анализа предыдущей, возникли некоторые сомнения: может быть, я тоже на что-то важное не обратил внимания. С другой стороны, мы ведь решали ранее несколько разных задач про пулю, попавшую в ящик, и всё получалось удачно, как, например, в следующей задаче.

Задача 3. Ящик с песком массой $M = 10$ кг скользит по гладкой горизонтальной поверхности. После попадания в него пули массой $m = 10$ г, летевшей горизонтально со скоростью $u = 200$ м/с навстречу ящику, он останавливается. Найдите скорость ящика перед попаданием пули.

Решение. Для системы «ящик – пуля» проекция импульса на горизонтальную ось x , направленную вдоль скорости движения ящика, сохраняется:

$$Mv - mu = 0.$$

Отсюда искомая скорость ящика

$$v = \frac{mu}{M} = 0,2 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = \frac{mu}{M} = 0,2 \text{ м/с}.$

Задача, которую дал мне Анатолий Иванович, на первый взгляд, лишь немного сложнее, – продолжил Вася.

Задача 4. По гладкой наклонной плоскости с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании скользит ящик с песком массой $M = 10$ кг (рис. 1). Когда в ящик попадает пуля массой $m = 10$ г, летевшая горизонтально, он останавливается. Определите скорость пули, если непосредственно перед попаданием скорость ящика была равна $v = 0,2$ м/с.

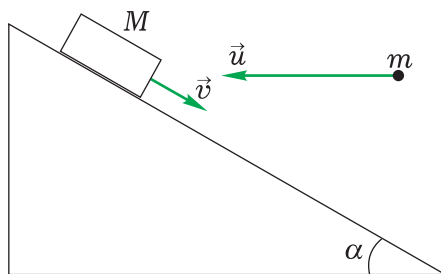


Рис. 1

Решение Васи. Направим горизонтально ось x и, подобно решению предыдущей задачи, запишем, что проекция импульса на эту ось сохраняется:

$$Mv \cos \alpha - mu = 0.$$

Отсюда искомая скорость пули

$$u = \frac{Mv \cos \alpha}{m}.$$



Тут Вася остановился и даже не стал записывать числовой ответ к задаче. Ребята с удивлением смотрели на него.

«Я вот о чём подумал, Анатолий Иванович, – как бы размышляя вслух, произнёс Вася. – А ведь если бы я выбрал другую ось, например вдоль наклонной плоскости (рис. 2), то ответ был бы совсем иным. Смотрите:

$$Mv - m u \cos \alpha = 0 \Rightarrow u = \frac{Mv}{m \cos \alpha}. (*)$$

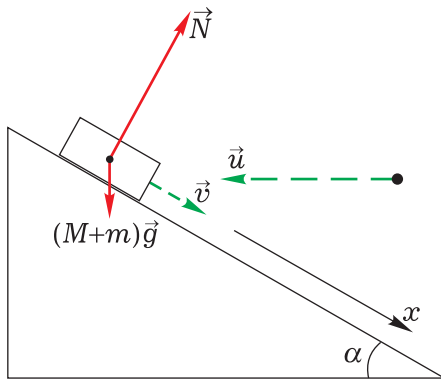


Рис. 2

Наступила немая сцена, как в «Ревизоре». Теперь пояснения дал учитель: «Действительно, на первый взгляд, тупиковая ситуация: законы физики не должны зависеть от нашего выбора системы координат, а из рассуждений Васи получается, что будто бы зависят. Значит, в этих рассуждениях содержится ошибка. Но где же искать её? Давайте вспомним, всегда ли мы имеем право использовать закон сохранения импульса?»

«В векторном виде – только для замкнутой системы», – напомнил Алёша. «Если же система незамкнута, – добавил Вася, – то сохраняется проекция импульса на ось, перпендикулярную внешней силе». «Точнее, равнодействующей всех внешних сил», – поправил Слава.

«Всё это верно, но внесём некоторые уточнения, – продолжил Анатолий Иванович. – Вспомните, ведь мы использовали ЗСИ в векторном виде и в незамкнутой системе. Например, при решении задачи о разрыве снаряда в верхней точке. При этом сила тяжести была единственной внешней силой и, естественно, ничем не была скомпенсирована. Почему же в таком случае закон выполнялся? Всё дело в том, что изменяет импульс системы не внешняя сила, а импульс этой силы,

то есть её произведение на время действия силы. Если же это время очень мало, а сила не слишком велика (как это обычно бывает почти во всех таких задачах), то импульс системы сохраняется. И только в редких случаях, когда даже при малом времени действия внешней силы её величина резко возрастает, пренебрегать импульсом внешней силы нельзя, а значит, неравномерно использовать и ЗСИ».

«А как применить Ваши пояснения в данной задаче?», – спросил Вася.

«Я понял! – поднял руку Дима. – В течение малого времени движения пули в ящике действием силы тяжести $(M+m)\vec{g}$ (точнее, импульсом силы тяжести) можно пренебречь из-за конечности величины $(M+m)g$. При попадании пули в ящик резко возрастает сила реакции \vec{N} , действующая на ящик со стороны наклонной плоскости, поэтому импульсом этой силы даже при кратковременном воздействии пренебрегать нельзя. Зато можно выбрать ось, перпендикулярную силе реакции. Для этого нужно направить её вдоль наклонной плоскости, что и сделал Вася во втором случае. Значит, именно это его решение оказалось верным».

«Очень хорошо, – завершил дискуссию Анатолий Иванович. – Таким образом, мы можем записать в тетрадь правильное решение (*) и ответ к задаче. Не забудьте добавить пояснение: ось x должна быть направлена перпендикулярно силе реакции опоры \vec{N} , импульсом которой при ударе пренебрегать нельзя, и начертить верный для этой задачи рисунок 2».

Верный ответ:

$$u = \frac{Mv}{m \cos \alpha} \approx 230 \text{ м/с.}$$



«Но есть ещё одна тонкость, связанная с решением такого рода задач, – вновь заговорил учитель. – Сравните условие только что разобранный задачи с вот этой». Он раскрыл задачник и прочитал ребятам условие.

Задача 5. По наклонной плоскости с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании равномерно скользит ящик с песком массой $M = 5$ кг со скоростью $v = 1$ м/с. Когда в ящик попадает пуля массой $m = 10$ кг, летевшая горизонтально, ящик, не останавливаясь, продолжил скользить в прежнем направлении со скоростью $v/3$. Определите скорость пули.

Ребята серьёзно задумались. Первым неожиданно начал рассуждать обычно молчаливый Дима: «Раз ящик скользит равномерно, значит, появилось трение, которое отсутствовало в предыдущей задаче. Сила трения скольжения пропорциональна силе нормальной реакции (нормального давления) N :

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Поэтому при попадании пули в ящик возрастает во много раз не только сила нормальной реакции, но и сила трения скольжения». «Вот только куда направлена их векторная сумма, т.е. сила реакции \vec{R} ?», – задумчиво проговорил Дима. И тут же, широко улыбнувшись, воскликнул: «Понял! Вертикально вверх!»

Ребята с недоумением смотрели на товарища, а он, схватив кусочек мела, стал быстро чертить на доске. «Смотрите, – пояснял Дима, – пока ящик двигался равномерно, векторная сумма сил нормальной реакции и трения

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

была обязательно направлена вертикально вверх (рис. 3), чтобы скомпенсировать силу тяжести. Если же после попадания пули в ящик обе силы (нормальной реакции и трения) возросли в одинаковое число раз, то из чертежа ясно, что их векторная сумма по-прежнему направлена строго вверх».

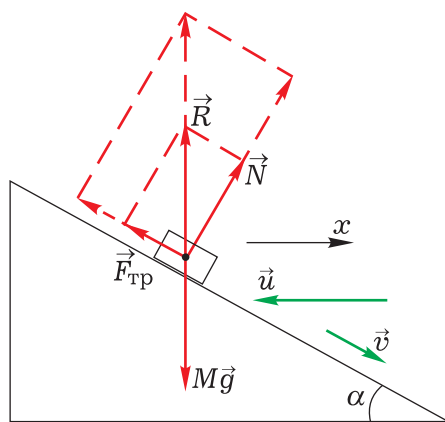


Рис. 3

«Тогда поступаем аналогично решению задачи 4, – завершил свои рассуждения Дима. – Только теперь сохраняется проекция импульса на горизонтальную ось x , которая перпендикулярна резко возрастающей при попадании пули силе реакции \vec{R} :

$$Mv \cos \alpha - mu = (M + m) \frac{v}{3} \cos \alpha.$$

Отсюда

$$u = \left(2 \frac{M}{m} - 1\right) \frac{v}{3} \cos \alpha \approx 290 \text{ м/с}.$$

Ответ:

$$u = \left(2 \frac{M}{m} - 1\right) \frac{v}{3} \cos \alpha \approx 290 \text{ м/с}.$$

Заключение

Подводя итог в конце занятия, Анатолий Иванович отметил: «Итак, рассмотрев решение предложенных задач,

можно сделать некоторые выводы».

«И первый из них заключается в том, – сказал Алёша, – что тема «За-

кон сохранения импульса» оказалась не так проста, как мы думали».

«Верно, но есть и более конкретные выводы, – продолжал учитель. – Давайте запишем их.

1. Закон сохранения импульса справедлив только в инерциальной системе отсчёта (ИСО), причём скорости всех тел системы нужно брать относительно какой-то одной ИСО.

2. Если система замкнутая (внешние силы отсутствуют) или векторная сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы сохраняется.

3. Если равнодействующая внешних сил перпендикулярна некоторой

оси x , то проекция импульса системы на это направление сохраняется.

4. Если время взаимодействия мало (например, происходит взрыв или удар), а внешняя сила имеет некоторую ограниченную величину, то использовать ЗСИ можно.

5. Ответ, записанный в общем виде, желательно проверить в частном случае (подразумевается, что проверку размерностей вы делаете автоматически всегда)».

Анатолий Иванович в качестве самопроверки посоветовал своим ученикам дома решить две задачи. Мы же предлагаем их нашим читателям.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Тележка длиной 5 м стоит на рельсах. На противоположных концах тележки стоят два мальчика. Масса тележки 75 кг, массы мальчиков 45 кг и 30 кг. Мальчики меняются местами. На сколько переместится при этом тележка? Массой колёс тележки и трением в их осях пренебречь. (Ответ: 0,5 м.)

Задача 7. В ящик с песком массой

12 кг, скользящий по гладкой наклонной плоскости, падает груз массой 4 кг с высоты 3,2 м и застревает в песке. Найдите скорость ящика сразу же после попадания груза, если непосредственно перед попаданием скорость ящика была равна 8 м/с. Угол наклона плоскости к горизонту 30° . (Ответ: 7 м/с.)

