Стогов Антон Вадимович
Ученик 11 «А» класса средней школы №57 г. Рязани, победитель муниципального и регионального этапов олимпиад школьников по физике и математике, участник Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи «с изюминкой»

В статье приводятся условия и решения интересных задач по механике, встретившиеся старшекласснику при подготовке в вуз, а также даются задачи для самостоятельного решения с ответами.

Занятия физикой для любого человека, серьёзно готовящегося в вуз, неразрывно сопряжены с решением множества разнообразных задач. Задачи, конечно, встречаются разные. Большинство решаются и вылетают из памяти, а вот некоторые – так называемые задачи «с изюминкой» – застревают в голове накрепко. Почему? Причины могут быть разные: нестандартный подход, нетривиальное и эффектное решение, красивая математическая модель, а может и всё вместе – важно не это, а то, что такие задачи заставляют нас размышлять, развиваться, совершенствовать своё умение. В этом и состоит их польза. И некоторыми такими задачами, в своё время привлекшими моё внимание, мне бы хотелось поделиться с читателями.

Задача 1. «Шайбу, шайбу!». Хоккейная шайба, скользя по горизонтальной поверхности льда, проходит 2 равных отрезка пути длиной L каждый и продолжает двигаться. Первый отрезок она проходит за время t, второй – за время $2t$. Найти скорость шайбы в конце первого отрезка пути.

Решение. Будем считать, что на шайбу действует постоянная сила трения со стороны льда. Тогда имеем равнозамедленное прямолинейное движение.

Конечно, можно записать для каждого отрезка пути и суммарного отрезка уравнение, связывающее путь, начальную скорость, ускорение и время. Получим систему из трёх уравнений, весьма неудобную для решения. Но мы поступим иначе и покажем более удобный способ решения задачи, который основывается на следующем свойстве равноускоренного движения. Известно (а тем, кому не известно, доказать труда не составит), что при рассматриваемом типе движения средняя скорость на участке пути равна среднему арифметическому значений мгновенных скоростей в начале и конце этого участка. Тогда имеем:

$$L=\left(\frac{v+v_0}{2}\right)t \qquad (1)$$

(для первого участка; v_0 и v – соответственно мгновенные скорости в его начале и конце);

$$L = \left(\frac{v + v_1}{2}\right) \cdot 2t \qquad (2)$$

(для второго участка; v_1 – скорость в конце второго участка).

Заметим, что двух уравнений для нахождения v не хватает. Поэтому следует ввести третье уравнение – аналогичное первым двум, но уже для обоих участков вместе:

$$2L = \left(\frac{v_0 + v_1}{2}\right) \cdot 3t. \qquad (3)$$

Полученные уравнения образуют систему.

Выражаем из уравнения (1) v_0, а из уравнения (2) – v_1:

$$v_0 = \frac{2L}{t} - v; \quad v_1 = \frac{L}{t} - v.$$

Подставляем эти выражения в уравнение (3) и в результате получаем:

$$v = \frac{5L}{6t}.$$

Это и есть наш ответ.

Задача 2. «Прыжок лягушки». Доска массой M плавает на воде. На одном конце доски в точке A сидит лягушка. С какой наименьшей скоростью (относительно земли) она должна прыгнуть, чтобы попасть в точку B на доске? Расстояние $AB = L$, масса лягушки m, трение между доской и водой не учитывать.[1]

Решение. В результате прыжка лягушки доска испытывает на себе «отдачу» и приобретает некоторую скорость, направленную назад. Сложность этой задачи заключается в том, что при её решении обязательно необходимо учесть перемещение доски за то время, пока лягушка находится в воздухе.

Пусть лягушка прыгает под углом α к горизонтали. Рассмотрим доску с лягушкой в системе координат $(x; y)$, которая связана с неподвижной землёй (см. рис. 1). В этой системе координат лягушка прыгает из точки $A(0; 0)$.

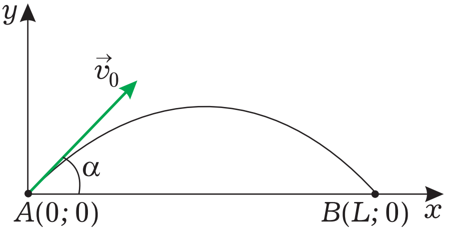

Рис. 1

Координаты лягушки в любой момент времени движения t таковы:

$$\begin{cases} x_1 = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y_1 = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \qquad (4)$$

[1] Заметим, что пренебрегать силой трения доски о воду нельзя в принципе, поскольку при ускоренном движении доски движется с ускорением и некоторая масса воды, что вызывает противодействие движению доски. Это эффект так называемой «присоединённой массы» (*прим. ред.*).

Воспользуемся законом сохранения импульса. Пусть v – скорость доски после прыжка лягушки. В проекции на ось Ox из закона сохранения импульса имеем:

$$mv_0\cos\alpha - Mv = 0,$$

откуда получаем выражение для скорости доски:

$$v = \frac{m}{M}v_0\cos\alpha.$$

Так как трение между доской и водой отсутствует, то доска движется равномерно ($v = \text{const}$). Координаты точки B в любой момент времени t таковы:

$$\begin{cases} x_2 = L - vt, \\ y_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В момент приземления лягушки:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (v_0\cos\alpha)t = L - \dfrac{m}{M}(v_0\cos\alpha)t, \\ (v_0\sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Из второго уравнения системы находим время полёта лягушки t $(t \neq 0)$:

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

Подставим это значение в первое равенство системы (6). Получаем:

$$\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = L - \frac{m}{M}\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Из последнего уравнения выражаем искомую величину v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{LMg}{(M+m)\sin 2\alpha}}.$$

Вспомним, что нам нужно найти наименьшую возможную скорость. Так как $0 \le \sin 2\alpha \le 1$, то наименьшая скорость равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{LMg}{(M+m)}} \text{ при } \sin 2\alpha = 1, \text{ то есть}$$

$$2\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Задача 3. «Разворот на площади». Автомобиль едет по площади со скоростью v. За какое минимальное время он сможет развернуться, двигаясь с постоянной скоростью по дуге, равной половине окружности? Коэффициент трения равен μ. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

Решение. Так как скорость автомобиля постоянна, то время разворота равно

$$t = \frac{\pi R}{v}.$$

Рассмотрим, какие силы действуют на автомобиль: это сила тяжести mg, сила реакции опоры N, сила тяги F, сила трения качения F_1 и сила трения покоя F_2. Последняя сила направлена в сторону, противоположную возможному смещению автомобиля вдоль радиуса, и обусловливает наличие центростремительного ускорения, с которым он движется во время разворота. Чем больше будет сила трения, тем больше будет центростремительное ускорение автомобиля при развороте и тем меньше времени он займёт. Поэтому время разворота будет минимальным в том случае, если сила трения F_2 достигнет своего максимального значения.

По второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \qquad (7)$$

где $a = v^2/R$ – центростремительное ускорение автомобиля.

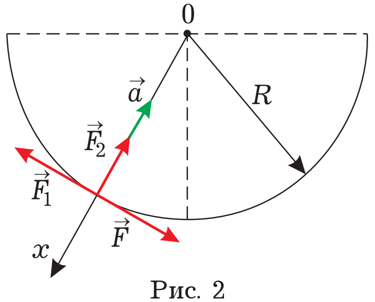

Рис. 2

Выберем ось Ox, направленную вдоль радиуса окружности, по дуге которой движется автомобиль (см. рис. 2), и запишем уравнение (7) в проекции на эту ось:

$$\frac{mv^2}{R} = F_2. \qquad (8)$$

Спроецируем равенство (1) на вертикаль:

$$N = mg.$$

Максимальное значение, которое может принимать сила F_2, равно:

$$F_2 = \mu N = \mu mg. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) получаем:

$$\frac{mV^2}{R} = \mu mg \Leftrightarrow R = \frac{V^2}{\mu g}.$$

Тогда искомое наименьшее время t равно:

$$t = \frac{\pi V}{\mu g}.$$

Задача 4. «Вдавим гвоздь!». Гвоздь забит в горизонтальную доску на половину своей длины. Чтобы вытащить гвоздь из доски, к нему необходимо приложить силу не менее $F_0 = 500$ Н. Какой наименьшей массы груз следует положить сверху на шляпку гвоздя, чтобы он полностью вошёл в доску, если длина гвоздя $l = 5$ см? Доска имеет достаточную толщину, чтобы гвоздь не выходил из неё.

Решение. Сила трения, действующая на вдавливаемый гвоздь, равна:

$$F_{тр} = pS,$$

где p – давление на боковую поверхность части гвоздя в доске ($p = \text{const}$), S – площадь этой поверхности. Тогда $S \sim x$ (x – глубина, на которую вошёл гвоздь), и следовательно, $F_{тр} \sim x$.

Пусть $F_{тр} = ax$ (a – постоянный коэффициент для данных доски и гвоздя), $0 \le x \le l$ (см. рис. 3).

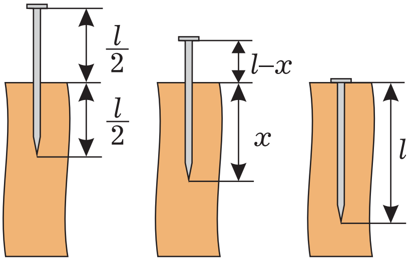

Рис. 3

Построим график зависимости силы трения от глубины, на которую забит гвоздь (см. рис. 4).

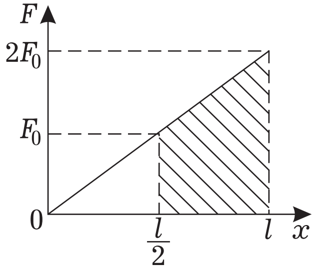

Рис. 4

Так как зависимость $F_{тр}$ от x линейна, то значению $x = l$ соответствует значение $F_{тр} = 2F_0$.

При решении задачи у многих возникает «соблазн» сказать, что именно такую силу следует приложить для вдавливания всего гвоздя в доску. Здесь скрывается «ловушка» задачи. Всё дело в том, что приложив к гвоздю такую силу, мы произведём механическую работу, которая больше энергии, необходимой для вдавливания гвоздя. Поэтому задачу следует решать из энергетических соображений.

Работа, совершённая весом груза по вдавливанию гвоздя, численно равна площади трапеции под участком графика от точки $\left(F_0; \dfrac{l}{2}\right)$ до точки $(2F_0; l)$, то есть работа по вдавливанию гвоздя равна:

$$A = \frac{F_0 + 2F_0}{2} \cdot \frac{l}{2}.$$

Т. к. $A = Mg\dfrac{l}{2}$, где M – масса груза, то

$$\frac{3}{2}F_0 = Mg \Leftrightarrow M = \frac{3F_0}{2g}.$$

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Скорее талант, чем техника

Исследователи картин знаменитого итальянского живописца эпохи Возрождения Караваджо много лет пытаются разгадать «технологию» их создания. Им кажется поразительной точность, с которой вопроизведены на его полотнах изображения предметов, и они пытаются выяснить, как удалось её достичь.

Многие из них придерживаются довольно распространённого мнения, что в те времена художник мог пользоваться оптическими устройствами (камерой-обскурой, зеркалами, линзами) для получения сначала точного эскиза картины, а затем уже расписывать её красками. Однако американские специалисты поколебали это мнение. Они провели тщательное изучение современными методами (вплоть до компьютерного моделирования) работ другого мастера – Яна ван Эйка (В мире науки. – 2005. – №3). Оказалось, что для создания эскизов (изображений предметов) для высокохудожественных произведений малосовершенная оптическая техника того времени требовала слишком сложных ухищрений, которые трудно было выполнить. Тогда как талантливый живописец, благодаря наблюдательности, интуиции, знаниям и опыту, способен на непосредственное создание подобных шедевров.

И всё же недавно (в 2008 г.) появилась другая версия. Основанием для неё послужило обнаружение на полотнах Караваджо следов фоточувствительных флуоресцирующих частичек. Возникло предположение, что он писал картины в тёмной комнате с небольшим отверстием в потолке – в своего рода камере-обскуре, в которой изображение предметов получал на холсте, посыпанном порошком (собственного изобретения) из высушенных светлячков. Свечение порошка в области этого изображения и помогало ему воспроизвести предметы в соответствии с их реальным видом, а потом расписать картину маслом. Версия эта правдоподобна, но... как-то вопреки всему хочется отдать предпочтение таланту художника, а не той или иной технике.