



**Граськин Сергей Сергеевич**

*Доктор технических наук, профессор, директор  
лицея № 1580 при МГТУ им. Н.Э. Баумана.*



**Иванов Анатолий Ефимович**

*Кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Основы физики» МГТУ им. Н.Э. Баумана.*

## Задачи на динамику гармонических колебаний

Как правило, в средней школе в задачах на колебательное движение необходимо находить частоту  $\omega_0$  или период  $T$  собственных<sup>1</sup> колебаний. Имеются три метода решения подобных задач:

1. Находим возвращающую силу (квазиупругую силу Гука)  $F_x = -kx$  и по формулам  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  вычисляем  $\omega_0$  или  $T$ , причём в качестве  $k$  может быть более или менее сложное выражение.

2. По второму закону Ньютона для прямолинейного движения материальной точки или по основному уравнению динамики вращательного движения твёрдого тела получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  и вычисляем  $\omega_0$  (например, математический и физический маятники в нашем журнале №8 за 2016 г.).

3. Записываем закон сохранения механической энергии, дифференцируем его по времени и получаем в

<sup>1</sup> Колебания, которые совершает система, выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе.

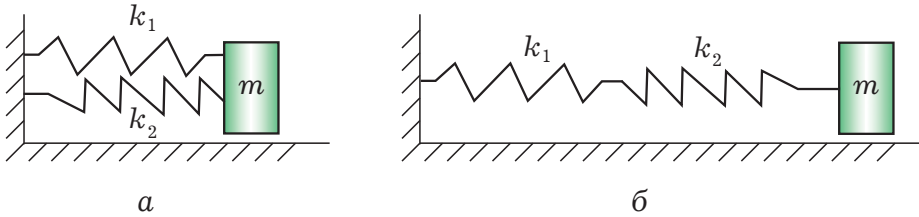


Рис. 1

качестве результата дифференциальное уравнение гармонических колебаний  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .

Продемонстрируем применение этого метода к задаче о колебании материальной точки на пружине.

Механическую энергию колебательной системы в положении «МТ колеблется около положения равновесия» будем отсчитывать от положения «пружина в свободном состоянии».

Прежде всего запишем условие равновесия в проекции на ось  $Ox$ , направленную вертикально вниз:

$$mg = kx_0. \quad (1)$$

Далее запишем закон сохранения механической энергии (ЗСМЭ)

$$\frac{m \left( \frac{d(x_0 + x)}{dt} \right)^2}{2} - mg(x_0 + x) + \frac{k(x_0 + x)^2}{2} = \text{const}. \quad (2)$$

Здесь первый член представляет кинетическую, второй – потенциальную энергию материальной точки, третий член – потенциальную энергию деформированной пружины.

Дифференцируем уравнение (2) по времени:

$$\frac{m2\dot{x}\ddot{x}}{2} - mg\dot{x} + \frac{k2(x_0 + x)\dot{x}}{2} = 0.$$

После сокращений с учётом (1) получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

**Задача 1.** Вычислите период гармонических колебаний  $T$  тела массой  $m$  в системах, показанных на рис. 1а и рис. 1б, если жёсткости пружин равны  $k_1$  и  $k_2$ . Трением можно пренебречь.

**Решение.** а) «Выделим» рассматриваемую материальную точку, заменив взаимодействующие с ней пружинки силами (рис. 2). Ось  $Ox$  направим по ходу движения тела массы  $m$  направо.

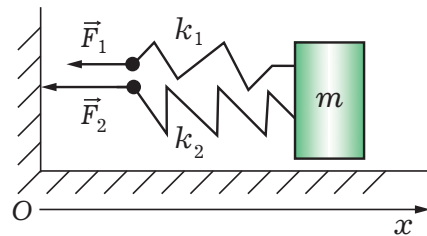


Рис. 2

Проекция возвращающей силы  $\vec{F}$  на ось  $Ox$

$$F_x = -(F_1 + F_2) = -(k_1 + k_2)x.$$

Следовательно, согласно закону Гука

$$k = k_1 + k_2.$$

Круговая частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

Период собственных колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

б) «Выделим» тело массой  $m$ , заменив пружинки силой (рис. 3):

$$F_x = k_1 x_1 = k_2 x_2 = k x. \quad (1)$$

Здесь  $x_1$ ,  $x_2$  – деформации пружинок 1 и 2,  $x$  – деформация пружины, заменяющей две вышеназванные, причём

$$x_1 + x_2 = x. \quad (2)$$

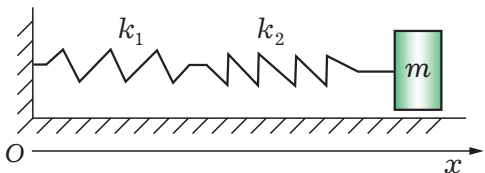


Рис. 3

Решение (1), (2) относительно  $k$

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Следовательно, частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}.$$

Период этих колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

Ответ. а)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}},$

б)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$

**Задача 2.** Тонкая, открытая с обоих концов трубка, согнутая под углом  $\alpha = 150^\circ$ , расположена в вертикаль-

ной плоскости. Верхнее колено трубки заполнено на длину  $2L$  жидкостью, которая удерживается с помощью клапана  $K$  (см. рис. 4). Найдите, через какое время  $t$  после открытия клапана вся жидкость вытечет из горизонтальной части трубки, длина которой  $2,5L$ . Силами поверхностного натяжения пренебречь. При течении жидкость заполняет всё сечение трубки.

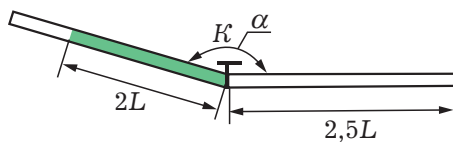


Рис. 4

**Решение.** Колебаний здесь нет, но когда в верхнем колене находится часть жидкости  $x$ , на неё действует возвращающая сила (рис. 5)

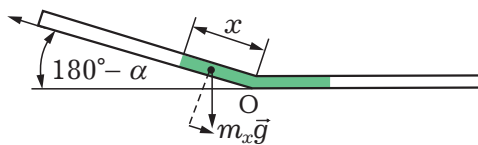


Рис. 5

$$\begin{aligned} F_x &= -m_x g \sin(180^\circ - \alpha) = \\ &= -m_x g \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} m_x g, \end{aligned} \quad (1)$$

$$m_x = \frac{m}{2L} x, \quad (2)$$

где  $m$  – масса всей жидкости.

Из (1) и (2) следует:

$$F_x = -\frac{mg}{4L} x. \quad (3)$$

Применяя здесь формализм упругих гармонических колебаний, получаем коэффициент квазиупругости  $k = \frac{mg}{4L}$ , циклическую частоту собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{4Lm}} = \sqrt{\frac{g}{4L}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

и период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого жидкость выльется из верхнего колена трубки, равен

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (4)$$

Для нахождения времени вытекания жидкости из горизонтального участка трубки найдём сначала скорость жидкости после вытекания из верхней части трубки: запишем закон сохранения энергии для двух положений: 1) жидкость находится в верхней части трубки (рис. 4) и 2) жидкость вытекла в горизонтальную часть трубки (рис. 5):

$$mgL \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{mv^2}{2}. \quad (5)$$

Из (5) следует

$$v = \sqrt{2gL \sin 30^\circ} = \sqrt{gL}.$$

Время  $t_1$  вытекания жидкости из горизонтального участка трубки равно

$$t_1 = \frac{2,5L}{v} = \frac{2,5L}{\sqrt{gL}} = 2,5 \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Вся жидкость вытечет из горизонтальной части трубки за время

$$\begin{aligned} t &= \Delta t + t_1 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} + 2,5 \sqrt{\frac{L}{g}} = \\ &= (\pi + 2,5) \sqrt{\frac{L}{g}} \approx 5,64 \sqrt{\frac{L}{g}}. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $t = 5,64 \sqrt{\frac{L}{g}}.$

**Задача 3.** Представим себе шахту, пронизывающую Землю насквозь по оси вращения. Рассмотрим движение

тела, упавшего в шахту, определите: а) время  $\tau$ , которое потребуется телу, чтобы достичь её противоположного конца; б) скорость тела  $v_0$  в центре Земли, в) скорость тела  $v_1$  в момент времени, когда оно прошло половину радиуса Земли. Землю считайте однородным шаром.  $R_3 = 6\,371$  км,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение.** Колебаний в этой задаче нет, но движение тела (материальной точки) подчиняется уравнениям гармонического колебания.

а) Начало координат точку  $O$  оси  $OR$  свяжем с центром Земли. Положение равновесия тела будет в центре Земли (точка  $O$ ).

При смещении на  $R$  на тело будет действовать сила Ньютона

$$F_R = -G \frac{M_R m}{R^2}, \quad (1)$$

где

$$M_R = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \quad (2)$$

здесь  $\rho$  – плотность Земли.

Равнодействующая гравитационных сил, действующих со стороны сферического слоя на тело массы  $m$ , находящегося внутри этого слоя, равна нулю.

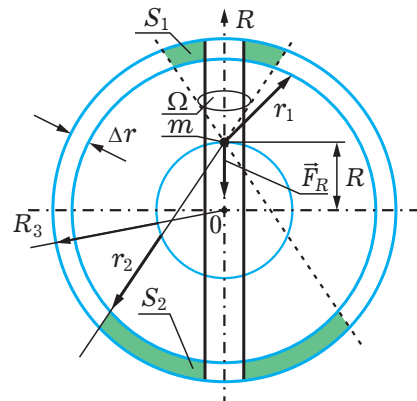


Рис. 6

**Доказательство.** а) Разобьём объём планеты Земля на тонкие сферические слои толщиной  $\Delta r$ . Рассмотрим конус с малым телесным углом при вершине  $\Omega$ . Конус вырезает из слоя участки площадями  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 6). Силы  $F_1$  и  $F_2$ , действующие со стороны тонких слоёв объёмом  $S_1\Delta r$  и  $S_2\Delta r$  на тело массы  $m$ , будут равны

$$F_1 = G \frac{m\rho S_1\Delta r}{r_1^2}, \quad (3)$$

$$F_2 = G \frac{m\rho S_2\Delta r}{r_2^2}. \quad (4)$$

Но  $\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2} = \Omega$ . Следовательно,  $F_1 = F_2$ , что и требовалось доказать.

Учитываем далее, что

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2}, \quad (5)$$

$$M_3 = \frac{4}{3}\pi R_3^3\rho. \quad (6)$$

Решаем систему уравнений (1), (2), (5) и (6) относительно  $\vec{F}_R$ :

$$F_R = -\frac{mg}{R_3} R.$$

Сила  $\vec{F}_R$  – возвращающая, её коэффициент упругости

$$k = \frac{mg}{R_3}. \quad (7)$$

Следовательно, тело будет совершать гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{R_3 m}} = \sqrt{\frac{g}{R_3}}. \quad (8)$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R_3}{g}}. \quad (9)$$

Противоположного конца Земли тело достигнет через полпериода:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{R_3}{g}} \approx 2,53 \cdot 10^3 \text{ с} = 0,703 \text{ ч}.$$

б) Уравнение гармонических колебаний

$$R = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (10)$$

Скорость тела

$$v = x\dot{R} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (11)$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} t = 0, \\ R = R_3, \\ \dot{R} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (10), получаем:

$$\begin{aligned} R_3 &= A \cos \varphi_0, \quad 0 = A\omega_0 \sin \varphi_0, \\ 0 &= A\omega_0 \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0, \quad A = R_3. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$R = R_3 \cos \sqrt{\frac{g}{R_3}} t. \quad (*)$$

В центре Земли скорость максимальна

$$v_0 = |-A\omega_0| = R_3 \sqrt{\frac{g}{R_3}} = \sqrt{gR_3}.$$

в) Граничные условия:

$$\begin{cases} t = \tau, \\ x = \frac{R_3}{2}. \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_3}{2} &= R_3 \cos \sqrt{\frac{g}{R_3}} \tau \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{R_3}} \tau = \\ &= \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{R_3}{g}}. \end{aligned}$$

Следовательно, скорость тела, когда оно прошло половину радиуса Земли, равна:

$$v_1 = -R_3 \sqrt{\frac{g}{R_3}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R_3}} \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{R_3}{g}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{gR_3}.$$

**Ответ.**  $\tau = 0,703$ ч,  $|v_0| = 7,91 \cdot 10^3$  м/с,  $|v_1| = 6,84 \cdot 10^3$  м/с.

**Задача 4.** К жёсткому стержню, массой которого можно пренебречь, прикреплены два бруска массами  $m$  и  $3m$ . К точке  $C$  стержня прикреплена пружина жёсткости  $k$ . Стержень может вращаться вокруг точки  $O$ . В положении равновесия стержень с брусками находится в вертикальном положении. Пружина при этом не деформирована.

Стержень отклонили от положения равновесия на малый угол, и он стал совершать гармонические колебания вокруг точки  $O$ . Вычислите период этих колебаний (рис. 7).

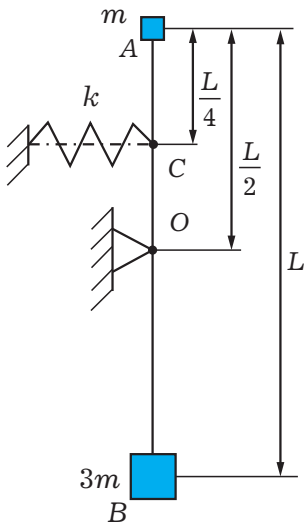


Рис. 7

**Решение.** Выведём стержень с брусками из положения равновесия, повернув его вокруг точки  $O$  на малый угол  $\varphi$  ( $\varphi \rightarrow 0$ ). Стержень начнёт совершать собственные гармонические колебания, циклическую частоту которых вычислим, записав основное уравнений динамики вращатель-

ного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси (точки  $O$ ) в дифференциальной форме (рис. 8):

$$mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \varphi - F_y \cdot \frac{L}{4} - 3mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \varphi = I \cdot \ddot{\varphi}, \quad (1)$$

где момент инерции стержня с брусками относительно точки  $O$

$$I = m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 + 3m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = mL^2, \quad (2)$$

упругая сила пружины

$$F_y = k \cdot \frac{L}{4} \cdot \varphi. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$-mgL \cdot \varphi - \frac{kL^2}{16} \varphi = mL^2 \cdot \ddot{\varphi}. \quad (*)$$

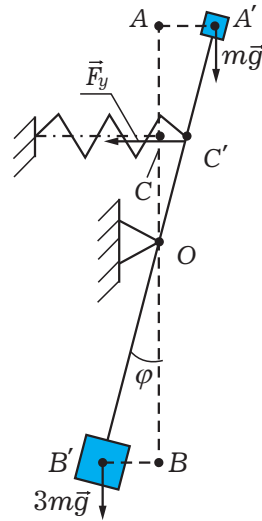


Рис. 8

После простых преобразований уравнение (\*) принимает вид:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{16m}\right) \varphi = 0.$$

Отсюда циклическая частота собственных гармонических колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{16m}}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left( \frac{g}{L} + \frac{k}{16m} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

**Ответ:**  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left( \frac{g}{L} + \frac{k}{16m} \right)^{-\frac{1}{2}}.$

**Задача 5.** Определите циклическую частоту  $\omega_0$  собственных колебаний показанной на рис. 9 колебательной системы, совершающей малые колебания в плоскости рисунка. Массами стержня и пружин можно пренебречь, масса шарика  $m$ , длина стержня  $L$ , жёсткости пружин равны  $k_1$  и  $k_2$ . На рис. 9 показано положение равновесия.

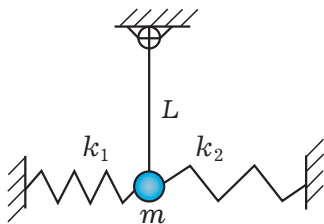


Рис. 9

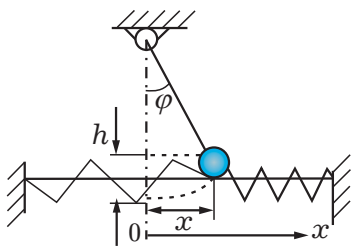


Рис. 10

**Решение.** Выведем систему из положения равновесия и предоставим её самой себе. При этом отклонения системы от положения равновесия пусть будут малые:  $x \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow 0$  (рис. 10). При малом отклонении от положения равновесия пружины приобретают потенциальную энергию  $\frac{k_1 x^2}{2}$  и  $\frac{k_2 x^2}{2}$ .

Шарик приобретает потенциальную энергию  $mgh$  и кинетическую энергию  $\frac{I\omega^2}{2}$ . Из рисунка 10 находим

$$h = L - L \cos \varphi = L(1 - \cos \varphi) = L \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Так как  $\varphi$  мал, то  $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$  и

$$h = 2L \cdot \frac{\varphi^2}{4} = \frac{L\varphi^2}{2}.$$

Момент инерции шарика равен  $I = mL^2$ . Угловая скорость вращения шарика относительно точки подвеса равна первой производной от угла  $\varphi$ :  $\omega = \dot{\varphi}$ . Кроме того,  $x = L \varphi$ .

С учётом этого закон сохранения запишется в виде

$$\frac{mgL\varphi^2}{2} + \frac{mL^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k_1L^2\varphi^2}{2} + \frac{k_2L^2\varphi^2}{2} = \text{const.}$$

Продифференцируем последнее уравнение по  $t$ :

$$\frac{mgL \cdot 2\varphi \cdot \dot{\varphi}}{2} + \frac{mL^2 \cdot 2\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi}}{2} + \frac{k_1L^2 \cdot 2\varphi \cdot \dot{\varphi}}{2} + \frac{k_2L^2 \cdot 2\varphi \cdot \dot{\varphi}}{2} = 0.$$

После сокращений это уравнение примет вид

$$(mgL + k_1L^2 + k_2L^2)\varphi + mL^2 \cdot \ddot{\varphi} = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{g}{L} + \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} \right) \varphi = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Следовательно,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}}.$$

**Ответ.**  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}} \frac{1}{c}.$

**Задача 6.** Определите период  $T$  малых колебаний ртути массой  $m = 200$  г, налитой в  $U$ -образную трубку сечением  $S = 0,5$  см<sup>2</sup> (см. рис. 11). Плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

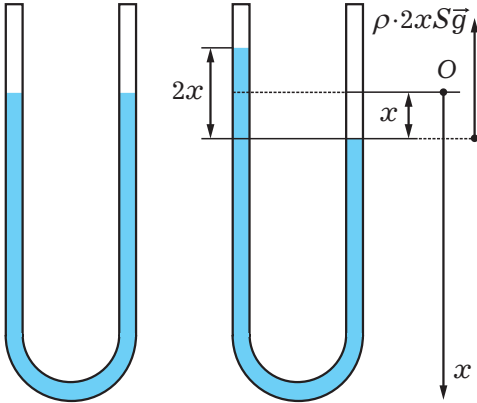


Рис. 11

Рис. 12

**Решение.** Ось абсцисс свяжем с поверхностью ртути при равновесном положении (рис. 12). Если сместить вниз на  $x$  ртуть в правом колене, она поднимется также на  $x$  в левом.

На элементарный объёмчик ртути, находящийся на поверхности в правом колене трубки, будет действовать гидростатическое давление  $2\rho g x$ .

Следовательно, возникает возвращающая сила

$$F_x = -2x\rho Sg = -(2\rho Sg) \cdot x. \quad (1)$$

Отсюда

$$k = 2\rho Sg. \quad (2)$$

Циклическая частота гармонических колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3)$$

Период колебаний связан с циклической частотой колебаний соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4)$$

Решение системы уравнений (1) – (4) относительно  $T$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}}.$$

**Ответ.**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}} \approx 0,77$  с.

**Задача 7.** Четыре одинаковых шарика массой  $m$  каждый, соединённые одинаковыми пружинами жёсткости  $k$ , образуют квадрат. Одновременно всем четырём шарикам сообщили одинаковые по модулю скорости, направленные к центру квадрата (рис. 13). Через какое время после этого пружины будут: а) сильнее всего сжаты?; б) сильнее всего растянуты?

**Решение.** Рассмотрим положение системы, при котором пружины сжаты, а шарики движутся со скоростью  $v$ . Запишем закон сохранения энергии

$$4 \frac{mv^2}{2} + 4 \frac{k(2x)^2}{2} = const, \quad (1)$$

$$v = \frac{dy}{dt}. \quad (2)$$

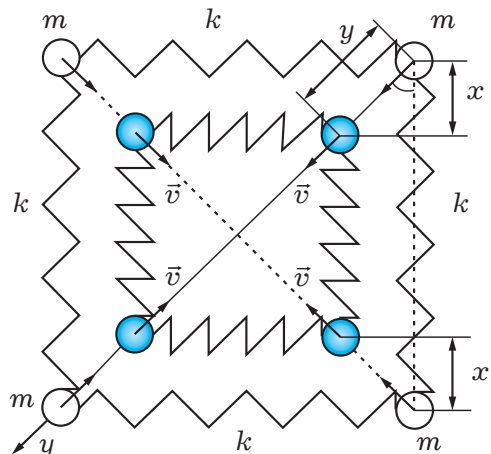


Рис. 13



Из рисунка следует

$$x = y \cos \alpha. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1) с учётом  $\alpha = 45^\circ$ , получим

$$2m \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 4ky^2 = \text{const.}$$

Дифференцируем последнее равенство по времени

$$2m2 \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + 4k2y \frac{dy}{dt} = 0.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2k}{m} y = 0.$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \text{ период колебаний}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

**Ответ.** Пружины будут сильнее всего сжаты через четверть периода, а растянуты через три четверти периода:

$$\Delta t_1 = \frac{1}{4} T_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}},$$

$$\Delta t_2 = \frac{3}{4} T_0 = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

**Задача 8.** К стенке, наклонённой под углом  $\alpha$  к вертикали, подвешен шарик на нити длиной  $L$ . Затем нить с шариком отклонили в плоскости, перпендикулярной к стенке, на угол  $\beta > \alpha$  от вертикального положения и отпустили (см. рис. 14). Считая столкновения шарика со стенкой абсолютно упругими, а углы  $\alpha$  и  $\beta$  малыми, определите период  $T$  колебаний шарика.

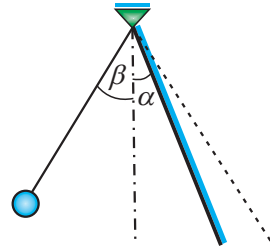


Рис. 14

**Решение.** Если бы стенки не было, маятник совершал бы гармонические колебания с угловой амплитудой  $\beta$  и с периодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (1)$$

При абсолютно упругом соударении со стенкой абсолютная величина скорости маятника не изменяется, а направление движения меняется на противоположное. Это означает, что период колебаний в присутствии стенки не равен  $T_0$ , а меньше этой величины и равен:

$$T = \frac{T_0}{2} + 2\tau, \quad (2)$$

где  $\tau$  – время, за которое маятник, совершая свободные колебания, отклонился бы от вертикали вправо на угол  $\alpha$ .

Уравнение гармонических колебаний

$$\varphi = \varphi_M \cos(\omega_0 t + \gamma_0). \quad (3)$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} t = 0, \\ \varphi = -\beta, \\ \dot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решение (3) – (4):

$$-\beta = \varphi_M \cos \gamma_0, \quad 0 = -\varphi_M \omega_0 \sin \gamma_0 \Rightarrow \Rightarrow \gamma_0 = 0, \quad \varphi_M = \beta. \quad (5)$$

Следовательно, в данной задаче уравнение гармонических колебаний математического маятника имеет вид:

$$\varphi = \beta \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (5)$$

Граничные условия:

$$t = \tau, \quad \varphi = \alpha. \quad (6)$$

Решение (5) – (6):

$$\alpha = \beta \cos \omega_0 \tau \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_0} \arccos \left( \frac{\alpha}{\beta} \right). \quad (7)$$

Решение системы уравнений (1), (2), (5) и (7) относительно  $T$ :

$$\begin{aligned} T &= \pi \sqrt{\frac{L}{g}} + 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \arccos \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{L}{g}} \left( \pi + 2 \arccos \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \right). \end{aligned}$$

**Ответ.**  $T = \sqrt{\frac{L}{g}} \left( \pi + 2 \arccos \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \right).$

## Литература

1. *Иванов А.Е., Иванов С.А.* Механика, молекулярная физика, термодинамика: учебник. М.: Кнорус, 2012, 950 с.

2. *Иванов А.Е.* Задачник по физике (механика, молекулярная физика, термодинамика): учебное пособие для поступающих в вузы. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015.

## Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

### Точно ли «чувствует сердце»?

В конце 50-х годов прошлого века возникла и широко обсуждалась идея о превращении времени в энергию. Видные физики не считали нужным вступать в эту дискуссию. Но когда писатель Мариэтта Шагинян в статье, опубликованной в «Литературной газете», высказалась в пользу этой идеи так: «Я сердцем чувую, что время излучает энергию», академики Л.А. Арцимович, П.Л. Капица и И.Е. Тамм не смогли удержаться и написали в газету письмо, в котором подчеркнули, что «сердце Мариэтты Сергеевны не может считаться достаточно точным прибором».

### Совет надёжен?

Известно, что удар ноги африканского страуса сильнее, чем удар копыта лошади (не очень-то нежного). Если у вас произойдёт встреча со страусом, то избежать его нападения можно так: надо поднять палку с надетым на её конец головным убором (например, фуражкой, панамой...) как можно выше. Такого противника (который выше него) страусу видеть, конечно же, ещё не приходилось, и напасть на столь «высокого гостя» он не осмелится. Можете проверить.