Мирошин Владимир Васильевич
Учитель гимназии 1522 г. Москва,
старший преподаватель кафедры математического анализа
Московского городского педагогического университета,
закончил механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова,
почётный работник образования, 25 лет работает в школе.
Автор пособий по подготовке к ЕГЭ по математике.

Задачи про центы и проценты, про деньги в банках и стеклянных банках

Статья посвящена одной из наиболее востребованных, но и одной из наименее подробно изучаемых тем школьной программы по математике – процентам. Понятие процента числа изучается в начальных классах средней школы, после чего к нему уже подробно не возвращаются. Тем не менее, эта тема традиционно входит в варианты вступительных экзаменов в различные вузы, особенно ориентированные на экономические специальности. Автор постарался изложить различные вопросы, связанные с этим понятием, рассмотрев задачи от простейших до самых сложных, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГУ, МИФИ, МФТИ.

Рассмотрены различные методы решений задач на определение процента, задач экономического содержания, задач на «сплавы, смеси». Статья будет интересна как школьникам 8 – 9 классов, так и учащимся выпускных классов, готовящимся к вступительным экзаменам.

Введение

Задачи «на проценты» традиционно вызывают затруднения. На самом деле в понятии процента нет ничего сложного. В основном решения задач опираются на определение процента числа.

Определение. Одним процентом (от латинского pro centum – за сто) от данного числа a называется сотая часть числа. Соответственно p % от числа a составляют $\frac{p}{100}\cdot a$.

Из определения следует, что абсолютное значение процента от данного числа пропорционально самому числу.

1. Задачи на определение процента числа

Задача 1. Население города в начале года составляло 150000 человек. В течение года из других мест прибыло 12000 человек. К концу года в результате естественного прироста и вновь прибывших число горожан стало равным 171495 человек. Определить процент естественного прироста населения.

Решение. Естественный прирост населения равен 9495 человек, что составляет $\frac{9495}{150000}\cdot 100\% = 6,33\%$.

Ответ: $6,33\%$.

Задача 2. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие – 20%. Сколько надо собрать свежих грибов, чтобы получить 4,5 кг сухих?

Решение. При сушке грибов их собственная сухая масса остаётся неизменной и составляет 10% свежих и 80% массы сухих грибов.

Пусть x кг – искомое количество свежих грибов. Получим $\frac{10}{100}x = \frac{80}{100}\cdot\frac{9}{2} \Leftrightarrow x = 36$.

Ответ: надо собрать 36 кг свежих грибов.

Задача 3. Количество учеников, присутствовавших на уроке, было заключено в пределах от 95,7% до 96,6% от общего количества учеников класса. Какое наименьшее количество учеников могло быть в классе?

Решение. Так как величина процента от числа пропорциональна самому числу, то чем больше число учащихся, отсутствующих на уроке, тем, естественно, больше общее число учеников в классе.

По условию количество отсутствующих учеников заключено в пределах от 3,4% до 4,3% от общего числа учеников и, конечно, является натуральным числом. Поэтому, наименьшее возможное количество отсутствующих – 1 ученик. Если же n – общее количество учащихся, то получим $\frac{34}{1000}n < 1 < \frac{43}{1000}n$.

$$\frac{34}{1000}n < 1 < \frac{43}{1000}n \Leftrightarrow \frac{1000}{43} < n < \frac{1000}{34} \Leftrightarrow 23\frac{11}{43} < n < 29\frac{14}{34}.$$

Наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству – 24.

Ответ: наименьшее количество учеников равно 24.

Задача 4. Длину кирпича увеличили на 50%, а ширину и высоту уменьшили соответственно на 20% и 30%. Увеличился или уменьшился от этого объём кирпича и на сколько процентов?

Решение. Пусть a, b, c - соответственно длина, ширина и высота кирпича. Тогда его объём $V = abc$. Увеличив длину кирпича на 50%, мы получим, что новая длина стала равной $a + \frac{50}{100}a = a\left(1+\frac{50}{100}\right)$. Так как ширина уменьшилась на 20%, то соответственно получим, что она стала равной $b - \frac{20}{100}b = b\left(1-\frac{20}{100}\right)$, а высота соответственно стала равной $c\left(1-\frac{30}{100}\right)$.

Обозначив процент изменения объёма кирпича через $p\%$, получаем, что новый объём составит $V_1 = V\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Новый объём кирпича

$$V_1=abc\left(1+\frac{p}{100}\right)=abc\left(1+\frac{50}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1-\frac{30}{100}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}abc=\frac{84}{100}abc.$$

Получим, что $1+\frac{p}{100}=\frac{84}{100}\Leftrightarrow p=-16$. Следовательно, объём кирпича уменьшился на 16%.

Ответ: объём кирпича уменьшился на 16%.

2. Задачи «экономического» содержания

Сколько раз за день мы слышим по радио или видим по телевизору информацию о том, как изменился курс той или иной валюты, сколько процентов составила инфляция, каков профицит бюджета! С какой гордостью мы слышим, что рост экономики России составил 6%, а рост экономики США – всего-навсего 2%, забывая о том, что процент есть часть некоторого числа!

И каждый раз мы сталкиваемся с задачами экономического содержания, в которых происходит исчисление процентов от меняющихся величин.

Каждый считает себя здравомыслящим человеком. Поэтому, конечно, вам не составит труда решить задачу из книги английского логика Р. Смаллиана « Принцесса или тигр?»:

Задача 5. Торговец купил товар за 7 долларов и продал его за 8 долларов. Потом купил тот же товар за 9 долларов и тут же продал за 10 долларов. Получил ли торговец прибыль и если да, то какую?

Что самое интересное, разные люди получают разные ответы и готовы с пеной у рта отстаивать свою правоту. Интересно, сколько получится у вас? Решать надо устно, без применения бумаги и чернил. Ответ смотрите в конце статьи.

В задачах «экономического» типа основной формулой является формула начисления сложного или банковского процента.

Пусть S_0 – первоначальная сумма (цена и т.п.), $p\,\%$ – процент, начисляемый банком по прошествии некоторого периода времени, называемого сроком хранения. Тогда после первого начисления сумма вклада станет равной сумме $S_1=S_0+\frac{p}{100}S_0$, состоящей из первоначального вклада и добавленной банком суммы. Имеем $S_1=S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Второе начисление производится уже на конечную сумму, т.е.

$$S_2=S_1+\frac{p}{100}S_1=S_1\left(1+\frac{p}{100}\right)=S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Аналогично рассуждая, получим, что если начисление производилось k раз при неизменной процентной ставке, то конечная сумма $S_k = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^k$.

Если же процентные ставки менялись и были равны $p_1, p_2, \ldots, p_l$ процентов, причём каждая ставка применялась соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_l$ раз, то конечная сумма будет равна $S_n = S_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^{k_1}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_l}{100}\right)^{k_l}$, $k_1+k_2+\ldots+k_l=n$.

Данная формула называется формулой сложного или банковского процента.

Задача 6. При двух последовательных одинаковых процентных повышениях пенсия в 1000 рублей стала равной 1254 рублям 40 копейкам. Определить, на сколько процентов повышалась пенсия.

Решение. Пусть p % - процент повышения. Получим, что $S_2 = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

Подставляя первоначальное и конечное значения в данную формулу, найдём

$$1254,4 = 1000\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \Leftrightarrow \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1,2544 \Leftrightarrow 1+\frac{p}{100} = 1,12 \Leftrightarrow p = 12.$$

Ответ: пенсия повышалась на 12%.

Задача 7. Цена товара была повышена на 25%. На какой процент её надо снизить, чтобы получить первоначальную величину?

Решение. Пусть p % – искомое понижение цены. Получим

$$S_0 = S_0\left(1+\frac{25}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow 1 = \frac{5}{4}\left(1-\frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow 1-\frac{p}{100} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow p = 20.$$

Ответ: цену надо понизить на 20%.

Задача 8. В результате реорганизации производительность труда на предприятии на первом этапе увеличилась на $p\%$, а на следующем этапе – ещё на $(p+50)\%$. В общей сложности производительность возросла втрое. На сколько процентов увеличилась производительность на первом этапе?

Решение. Пусть исходная производительность труда составляла a каких-либо единиц. Конечная производительность по условию составит $3a$ единиц. Получим, что

$$3a = a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p+50}{100}\right) \Leftrightarrow 3 = \left(1+\frac{p}{100}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{p}{100}=-3 \\ \frac{p}{100}=\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Откуда находим, что $p=50$.

Ответ: на первом этапе производительность возросла на 50%.

Задача 9. На сберегательный счёт, который вкладчик имел в начале первого периода накопления, банк начислил в конце этого периода $p\%$, а на счёт, который вкладчик имеет в начале второго периода накопления, начисляется в конце этого периода $q\%$, причём $p+q=70$. Вкладчик положил на счёт в начале первого периода некоторую сумму и снял в конце этого периода (после начисления процентов) половину положенной суммы. При каком значении q счёт вкладчика в конце второго периода окажется наибольшим?

Решение. Пусть S – начальная сумма вклада. $p=70-q$ - процентная ставка в первом периоде. Тогда

$S_1=S\left(1+\frac{70-q}{100}\right)-\frac{S}{2}$ - сумма вклада в начале второго периода накопления,

$S_2=S_1\left(1+\frac{q}{100}\right)$ - сумма вклада в конце второго периода накопления.

Имеем $S_2=S\left(1+\frac{70-q}{100}-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)=S\left(\frac{6}{5}-\frac{q}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)=S\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{q}{100}-\left(\frac{q}{100}\right)^2\right)=$

$=S\left(\frac{605}{500}-\left(\frac{q}{100}-\frac{10}{100}\right)^2\right)$.

Так как $0<q<70$, то данное выражение принимает наибольшее значение при $q=10$.

Ответ: сберегательный счёт вкладчика будет наибольшим, если $q=10\%$.

Задача 10. Банк планирует на один год вложить 30% имеющихся у него средств клиентов в проект A, а остальные 70% – в проект B. Проект A может принести от 32% до 37% годовых, проект B - от 22% до 27% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им процент от дохода по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться от 10% до 20% годовых. Определить, какую наибольшую и наименьшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в проекты может при этом получить банк.

Решение. Пусть S - суммарные вложения клиентов, $p\%$ - доходность проекта A, $q\%$ - доходность проекта B, $r\%$ - процент от дохода, возвращаемый клиентам.

Тогда конечная сумма накоплений в конце года составит

$S_1=\frac{3}{10}S\left(1+\frac{p}{100}\right)+\frac{7}{10}S\left(1+\frac{q}{100}\right)=S+S\left(\frac{3p}{1000}+\frac{7q}{1000}\right)$.

Чистая прибыль, полученная банком, будет составлять $S_2=S\left(\frac{3p}{1000}+\frac{7q}{1000}-\frac{r}{100}\right)$.

Наибольший доход, полученный банком, будет равен

$$S_{\max} = S\left(\frac{3\cdot 37}{1000}+\frac{7\cdot 27}{1000}-\frac{100}{1000}\right)=S\frac{111+189-100}{1000}=\frac{20}{100}S\ .$$

Наименьший доход, который может получить банк, может быть равен

$$S_{\min} = S\left(\frac{3\cdot 32}{1000}+\frac{7\cdot 22}{1000}-\frac{200}{1000}\right)=S\left(\frac{96+154-200}{1000}\right)=\frac{5}{100}S\ .$$

Ответ: наименьший доход, который может получить банк – 5%, наибольший – 20%.

Следующая задача была, несомненно, составлена во времена разгула инфляции, когда процентные ставки по вкладам начислялись как угодно часто и с какими угодно процентами. Её решали абитуриенты экономического факультета МГУ.

Задача 11. За время хранения вклада в банке проценты по нему за каждый период хранения начислялись в размере $5\%,\ 11\frac{1}{9}\%,\ 7\frac{1}{7}\%,\ 12\%$ за соответствующий период хранения. Каждая ставка действовала целое число периодов хранения. По окончании последнего периода хранения исходная сумма выросла на 180%. Найдите общее количество периодов хранения вклада.

Решение. Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 - количество периодов хранения, на протяжении которых действовала каждая ставка. Пусть также S - начальная сумма вклада, S_1 - конечная.

Тогда $S_1=\left(1+\frac{180}{100}\right)S=S\left(1+\frac{5}{100}\right)^{k_1}\left(1+\frac{100}{900}\right)^{k_2}\left(1+\frac{50}{700}\right)^{k_3}\left(1+\frac{12}{100}\right)^{k_4}$.

Или $\frac{14}{5}=\left(\frac{21}{20}\right)^{k_1}\left(\frac{10}{9}\right)^{k_2}\left(\frac{15}{14}\right)^{k_3}\left(\frac{28}{25}\right)^{k_4}$. Запишем это соотношение в виде равенства $14\cdot 20^{k_1}\cdot 9^{k_2}\cdot 14^{k_3}\cdot 25^{k_4}=5\cdot 21^{k_1}\cdot 10^{k_2}\cdot 15^{k_3}\cdot 28^{k_4}$. Данное равенство даёт два разложения некоторого натурального числа на множители. Таких разложений может быть несколько, но разложение натурального числа на простые делители – единственное.

Получим, что $2^{1+2k_1+k_3}\cdot 3^{2k_2}\cdot 5^{k_1+2k_4}\cdot 7^{1+k_3}=2^{k_2+2k_4}\cdot 3^{k_1+k_2}\cdot 5^{1+k_2+k_3}\cdot 7^{k_1+k_4}$. Из единственности разложения следует, что данное равенство возможно, если $\begin{cases}1+2k_1+k_3=k_2+2k_4,\\ 2k_2=k_1+k_3,\\ k_1+2k_4=1+k_2+k_3,\\ 1+k_3=k_1+k_4.\end{cases}$

Тогда

$$\begin{cases} 1+2k_1+k_3=k_2+2k_4, \\ 2k_2=k_1+k_3, \\ k_1+2k_4=1+k_2+k_3, \\ 1+k_3=k_1+k_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k_1-k_2+k_3-2k_4=-1, \\ k_1-2k_2+k_3 \qquad =0, \\ k_1-k_2-k_3+2k_4 \quad =1, \\ k_1 \qquad -k_3+k_4 \quad =1. \end{cases}$$

Последовательно исключая переменные из уравнений, приведём данную систему к следующей:

$$\begin{cases} k_1 \ -k_3+k_4=1, \\ \quad k_2 \qquad -k_4=0, \\ \qquad 2k_3-3k_4=-1, \\ \qquad\qquad k_4=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=2, \\ k_2=3, \\ k_3=4, \\ k_4=3. \end{cases}$$

Следовательно, общее количество периодов хранения – 12.

Ответ: вклад хранился в банке 12 периодов хранения.

Одним из способов решения задач может быть способ составления рекуррентного соотношения.

Напомним, что последовательность называется рекуррентно заданной, если каждый её член, начиная с некоторого, выражается через один или несколько предыдущих членов той же последовательности.

Примерами рекуррентно заданных последовательностей служат хорошо известные арифметическая и геометрическая прогрессии.

Задача 12. В банк помещён вклад 3900 рублей под 50% за определённый период хранения. В конце каждого из четырёх периодов хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносит одну и ту же сумму. К концу пятого периода хранения размер вклада увеличился на 725%. Какую сумму вносил вкладчик?

Решение. Пусть S_k - сумма после k -того периода хранения.

Тогда $S_{k+1}=S_k\left(1+\frac{p}{100}\right)+S$, где p - процентная ставка по вкладу, а S - дополнительный внос вкладчика.

Полученная последовательность называется арифметико-геометрической прогрессией. Каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и тоже число q, после чего произведение складывается с одним и тем же числом d. То есть рекуррентное задание соответствующей прогрессии таково: $x_{n+1}=qx_n+d$.

Легко получить и формулу её n -ного члена:

$$x_{n+1}=qx_n+d=\left(q\left(q\ldots\left(q\left(qx_1+d\right)+d\right)+\ldots\right)+d\right)+d=q^n x_1+d\frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

Применим эту формулу для решения задачи. Имеем

$$S_5=3900\left(1+\frac{1}{2}\right)^4+S\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^4}{1-\frac{3}{2}}=3900\cdot\frac{81}{16}+\frac{65}{8}S.$$

С другой стороны, $S_5=3900\cdot\frac{33}{4}$. Получим, что $\frac{65}{8}S=3900\cdot\frac{51}{16}\Leftrightarrow S=1530$.

Ответ: вкладчик докладывал 1530 рублей.

3. Задачи на «смеси, растворы, сплавы»

К рассмотренным выше задачам на проценты непосредственно принадлежат задачи на сплавы, растворы, смеси. В подобных задачах предполагается, что никаких химических или каких-либо других реакций, влияющих на количественное содержание веществ, между компонентами не происходит. Обычно в подобных задачах используются два понятия.

Определение. Долей вещества в смеси, сплаве, растворе называется отношение массы вещества к массе смеси, сплава, раствора.

$d = \frac{m_{в-ва}}{M}$, где $m_{в-ва}$ – масса вещества, M – масса раствора, смеси, сплава.

Определение. Процентное содержание вещества в смеси, сплаве, растворе равно доле вещества, выраженной в процентном отношении.

$$c\% = d \cdot 100\% = \frac{m_{в-ва}}{M} \cdot 100\%.$$

При решении задач на смеси, растворы, сплавы сохраняется масса (сумма масс компонентов равна массе их смеси). Но объём смеси не всегда равен сумме объёмов компонентов! Например, при смешивании 50 см^3 воды и 50 см^3 этилового спирта получается смесь объёмом 96,4 см^3, а не 100 см^3. Таким образом, сохранение объёма при смешивании компонентов, строго говоря, не выполняется.

В задачах 13, 14, 20, 24 неявным образом используется сохранение объёма при смешивании, и поэтому решения этих задач можно считать приближёнными. (Примечание редакции журнала).

Начнём обсуждение методов решения этих задач со старинной и часто используемой на занятиях кружков, факультативов задачи.

Задача 13. Есть два стакана. В одном из них чёрный кофе, а во втором – молоко. Объёмы того и другого одинаковы. Из стакана с молоком переливают чайную ложку в стакан с кофе, тщательно перемешивают и ту же ложку смеси переливают обратно. Подобную операцию повторяют 2006 раз. Содержание чего будет больше – кофе в стакане с молоком или молока в стакане с кофе?

Решение. Данная задача прекрасно иллюстрирует основной принцип решения таких задач: вещества, участвующие в условии, рассматриваются как инертные, не претерпевающие никаких изменений, и мысленно любая смесь может быть представлена как набор отдельных частей.

Поступим следующим образом. Разделим жидкости в обоих стаканах на составляющие. И сразу получим, что количество молока, перешедшее в стакан с кофе, равно количеству кофе, перешедшему в стакан с молоком, так как после выполнения всех операций объём жидкостей в обоих стаканах остался неизменным. Следовательно, количество кофе, перекочевавшее в стакан с молоком, было заменено таким же количеством молока, перешедшим в стакан, в котором первоначально было одно кофе.

Ответ: одинаковое.

Задача 14. Имеются два водных раствора щёлочи. Первый раствор содержит 30% щёлочи, а второй – 70% щёлочи. Смешали 5 литров первого раствора, 15 литров второго и некоторое количество воды. Получился раствор, в котором воды оказалось в 1,5 раза больше, чем щёлочи. Сколько литров воды было взято?

Решение. Пусть было взято x литров воды. Тогда доля воды в новом растворе будет равна $x+\frac{7}{10}\cdot 5+\frac{3}{10}\cdot 15$ литров, доля же щёлочи в новом растворе - $\frac{3}{10}\cdot 5+\frac{7}{10}\cdot 15$ литров.

Используя условие задачи, составим и решим уравнение $\frac{x+8}{12}=\frac{3}{2}$.

$\frac{x+8}{12}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x+8=18 \Leftrightarrow x=10$.

Ответ: было добавлено 10 литров воды.

Задача 15. Имеются два сплава олова и свинца. Первый сплав содержит 70% олова, второй – 20% свинца. Определить, какое количество каждого сплава надо взять, чтобы получить 4 кг нового сплава, содержащего олова в 2,5 раза больше, чем свинца.

Решение. Пусть было взято x кг первого сплава и $(4-x)$ кг второго. Составим уравнение: $\frac{\frac{7}{10}x+\frac{8}{10}(4-x)}{\frac{3}{10}x+\frac{2}{10}(4-x)}=\frac{5}{2}$.

Числитель дроби равен массе олова в новом сплаве, знаменатель – массе свинца.

$$\frac{\frac{7}{10}x+\frac{8}{10}(4-x)}{\frac{3}{10}x+\frac{2}{10}(4-x)}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{32-x}{x+8}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 7x=24 \Leftrightarrow x=3\frac{3}{7}.$$

Ответ: надо взять $3\frac{3}{7}$ кг первого сплава и $\frac{4}{7}$ кг второго сплава

Задача 16. Слиток сплава железа и никеля массой 2 кг разрезали на два куска. В первом куске никеля оказалось на 160 г меньше, чем во втором куске. Если второй кусок сплавить с 480 г никеля, то в новом сплаве никеля будет в три раза больше, чем в первом куске. Найти массу кусков, на которые разрезали слиток.

Решение. Пусть m - масса первого куска, отрезанного от слитка, $p\%$ - процентное содержание никеля в исходном сплаве. Масса второго куска $(2-m)$ кг.

Получим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{p}{100}(2-m)-\frac{p}{100}m=\frac{16}{100}, \\ \frac{\frac{p}{100}m}{\frac{48}{100}+\frac{p}{100}(2-m)}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

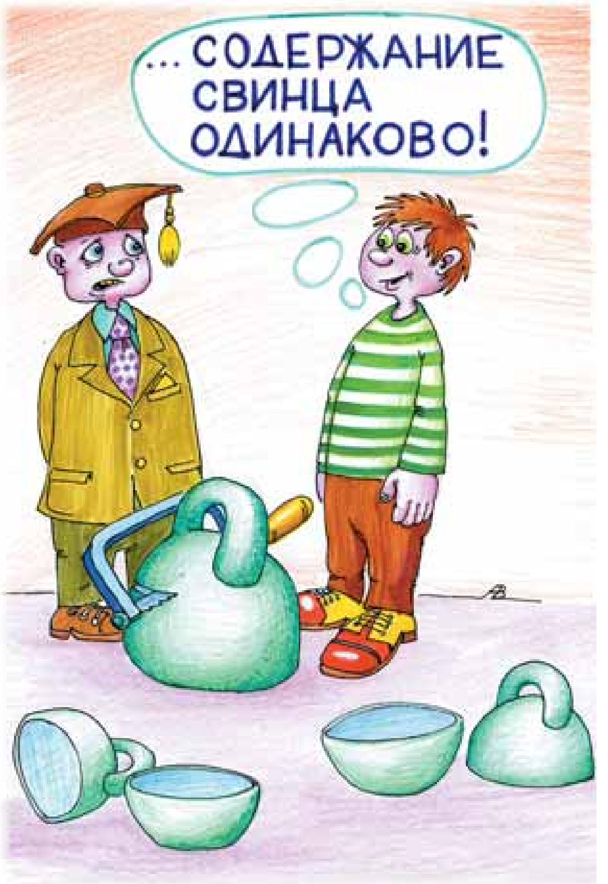
$$\begin{cases} \frac{p}{100}(2-m)-\frac{p}{100}m=\frac{16}{100}, \\ \frac{\frac{p}{100}m}{\frac{48}{100}+\frac{p}{100}(2-m)}=\frac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(1-m)=8, \\ 3pm=48+2p-pm, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pm=p-8, \\ 2(p-8)=24+p, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p=40,\\ m=\dfrac{40-8}{40},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=40,\\ m=0,8.\end{cases}$$

Таким образом, масса первого куска составила 0,8 кг, а второго 1,2 кг.

Ответ: масса первого куска 0,8 кг, а второго 1,2 кг.

Задача 17. Имеются два сплава свинца и олова. Первый сплав массой 12 кг содержит 90% свинца, второй массой 16 кг содержит 80% свинца. Часть первого сплава сплавили с частью второго сплава, получив 24 кг третьего сплава, содержащего $c\%$ свинца. Из оставшихся частей получили четвертый сплав массой 4 кг. Какой из полученных сплавов имеет меньшее процентное содержание свинца?



Решение. Пусть в третий сплав вошло x кг первого сплава. Очевидно, что $8\le x\le 12$. Масса второго слава – $(24-x)$ кг. Тогда четвёртый сплав массой 4 кг будет состоять из $(12-x)$ кг первого и $(x-8)$ кг второго.

Содержание свинца в третьем сплаве $\dfrac{c}{100}=\dfrac{\frac{9}{10}x+\frac{8}{10}(24-x)}{24}=\dfrac{x+192}{240}$, содержание свинца в четвёртом сплаве $\dfrac{p}{100}=$ $=\dfrac{\frac{9}{10}(12-x)+\frac{8}{10}(x-8)}{4}=\dfrac{44-x}{40}$. Составим систему неравенств: $\begin{cases}8\le x\le 12,\\ \dfrac{x-192}{240}<\dfrac{44-x}{40}.\end{cases}$

Решения системы будут давать те значения массы куска первого сплава, при котором содержание свинца будет меньше, чем в четвёртом.

$$\begin{cases}8\le x\le 12,\\ \dfrac{x+192}{240}<\dfrac{44-x}{40},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8\le x\le 12,\\ \dfrac{x+192}{6}<44-x,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8\le x\le 12,\\ 7x<72,\end{cases}\Leftrightarrow 8\le x<10\frac{2}{7}.$$

Найдём возможное процентное содержание свинца в третьем сплаве при условии, что оно меньше, чем в четвёртом сплаве:

$$\frac{\frac{9}{10}\cdot 8+\frac{8}{10}16}{24}\le\frac{c}{100}<\frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{72}{7}+\frac{8}{10}\cdot\frac{96}{7}}{24}\Leftrightarrow\frac{5}{6}\le\frac{c}{100}<\frac{59}{70}\Leftrightarrow 83\frac{1}{3}\le c<84\frac{2}{7}.$$

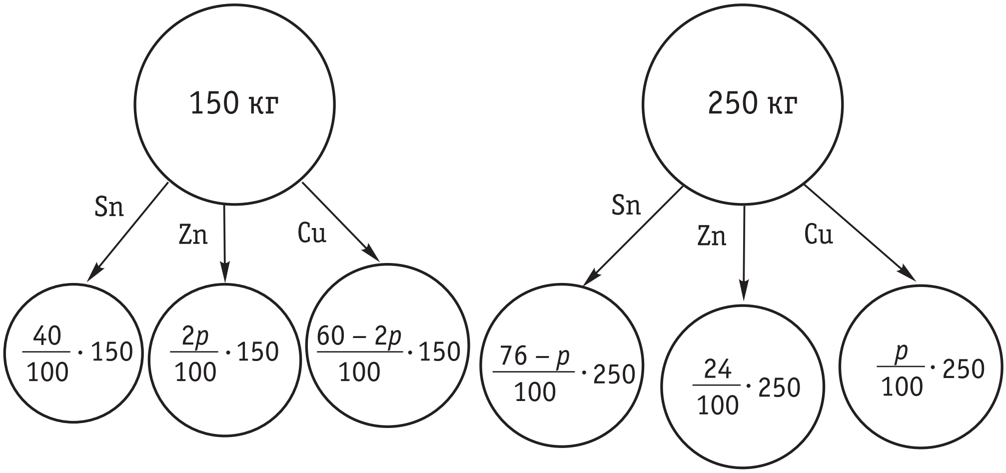
Ответ: Если $83\frac{1}{3}\%\le c\%<84\frac{2}{7}\%$, то содержание свинца в третьем сплаве меньше, чем в четвёртом. Если $c\%=84\frac{2}{7}\%$, то содержание свинца одинаковое.

Если $84\frac{2}{7}\% < c\% \le 85\%$, то содержание свинца в третьем сплаве больше, чем в четвёртом.

Задача 18. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав массой 150 кг содержит 40% олова, а второй – массой 250 кг содержит 24% цинка. Процентное содержание меди во втором сплаве вдвое меньше, чем процентное содержание цинка в первом сплаве. Сколько килограммов олова будет содержать новый сплав, полученный сплавлением первых двух, если процентное содержание цинка в нём равно $a\%$?

Решение. При решении подобных задач полезно применять круговые диаграммы, представляющие собой каждый из входящих в задачу сплавов. Это позволяет наглядно представить себе полную картину.

Пусть $p\%$ - процентное содержание меди во втором сплаве. Тогда $2p\%$ - содержание цинка в первом сплаве.



Из диаграммы следует, что в третий сплав войдёт $60+\frac{5}{2}(76-p)$ кг олова, а процентное содержание цинка будет равно $\frac{a}{100}=\frac{3p+60}{400}$. Отсюда $p=\frac{4}{3}a-20$.

Далее: $0<p<30$, что следует из условия, что сплавы содержат сразу три металла, поэтому $0<\frac{4}{3}a-20<30 \Leftrightarrow 15<a<37{,}5$.

Окончательно получим, что масса олова будет выражаться как $m_{Sn}=250-\frac{5}{2}\left(\frac{4}{3}a-20\right)=300-\frac{10}{3}a$, где $15<a<37{,}5$.

Следовательно, $175<m_{Sn}<250$.

Ответ: $175<m_{Sn}<250$.

Задача 19. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния. Второй сплав содержит 30% меди и 70% магния, третий – 45% алюминия и 55% магния. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 20% меди. Какое наибольшее и наименьшее процентное содержание алюминия может быть в этом новом сплаве?

Решение. Так как процентное содержание меди в первом и третьем сплавах ниже, чем заданное, то для получения нового сплава необходимо какое-то количество второго сплава и пропорциональные ему количества первого и третьего.

Это всегда верно, так как содержание вещества в сплаве, смеси и т.д., полученных из других сплавов, смесей, не больше максимального, но и не меньше минимального.

Пусть был взят 1 кг второго сплава, x кг первого и z кг третьего.

Из условия задачи следует, что $\frac{20}{100}=\frac{\frac{30}{100}\cdot 1+\frac{15}{100}x}{x+1+z}\Leftrightarrow 4=\frac{6+3x}{x+1+z}\Leftrightarrow x=2-4z$.

Получим, что $0\le z\le \frac{1}{2}$, исходя из физического смысла задачи.

Пусть теперь $p\%$ - содержание алюминия в новом сплаве. Получим, что

$$\frac{p}{100}=\frac{\frac{60}{100}x+\frac{45}{100}z}{x+1+z}\Leftrightarrow p=15\cdot\frac{4x+3z}{x+1+z}\Leftrightarrow p=15\cdot\frac{8-13z}{3-3z}\Leftrightarrow p=5\cdot\frac{13z-8}{z-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p=5\left(13+\frac{5}{z-1}\right).$$

Учитывая, что $0\le z\le \frac{1}{2}$, получим, что $15\le p\le 40$.

Ответ: наибольшее содержание алюминия 40%, наименьшее – 15%.

Рассмотрим задачу, снова использующую понятие рекуррентного задания последовательности, и формулу члена арифметико-геометрической прогрессии, возникающей при этом.

Задача 20. В сосуд с чистой водой налили 6 литров 64 % (по объёму) раствора спирта, а затем после полного перемешивания вылили равное (т.е. 6 литров) количество получившегося раствора. Сколько воды было первоначально в сосуде, если после троекратного повторения этой операции в сосуде получился 37% раствор спирта?

Решение. Пусть x (литров) – количество раствора, содержавшегося в сосуде после k – той операции, а p_k – процентное содержание в нём спирта.

Тогда $p_{k+1}=\frac{\frac{p_k}{100}x+\frac{64}{100}\cdot 6}{x+6}\cdot 100=\frac{x}{x+6}\cdot p_k+\frac{6\cdot 64}{x+6}$.

Учитывая, что первоначальное содержание спирта $p_1=0$, получим, что после трёх операций $p_4=\left(\frac{x}{x+6}\right)^4\cdot 0+\frac{6\cdot 64}{x+6}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{x+6}\right)^3}{1-\frac{x}{x+6}}=64\left(1-\left(\frac{x}{x+6}\right)^3\right)$.

Получим, что $37=64\left(1-\left(\frac{x}{x+6}\right)^3\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x+6}\right)^3=\frac{27}{64}\Leftrightarrow\frac{x}{x+6}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=18$.

Ответ: в сосуде в начальный момент находилось 18 литров воды.

Формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно в виде $x_1=a$, $x_{n+1}=bx_n+c$, $b\ne 1$, всегда можно привести к виду $x_n=\left(a-\frac{c}{1-b}\right)b^{n-1}+\frac{c}{1-b}$ (см. №11 нашего журнала за 2005 год). (Примечание редакции журнала).

Следующая задача относится к классическим задачам, где кроме применения методов решения задач, применяется метод оценки величины, входящей в условие. Наиболее часто используется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

Напомним, что неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел a и b называется неравенство вида: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, в котором равенство достигается в случае, если $a=b$.

Однако, часто бывает более полезно записать это неравенство иначе, а именно: если a, b, c – положительные числа, то $ac+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{ab}$.

Неравенство $ac+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{ab}$ справедливо не только для положительных, но и для отрицательных a, b, c. Оно обращается в равенство, если $ac=\dfrac{b}{c}$. Хотя, на самом деле, в решении предлагаемой задачи используется неравенство о среднем в его классическом варианте: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$. (Примечание редакции журнала)

Задача 21. В два различных сосуда налиты растворы соли, причём в первый сосуд налито 5 кг, а во второй – 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором – в q раз. О числах p и q известно только, что $pq=9$. Какое наибольшее общее количество воды могло испариться из обоих сосудов?

Решение. Пусть содержание соли в первом сосуде x кг, во втором – y кг, а при испарении из первого сосуда ушло m_1 кг воды, а из второго – m_2 кг воды.

Получим, что $\begin{cases} p\cdot\dfrac{x}{5}=\dfrac{x}{5-m_1}, \\ q\cdot\dfrac{y}{20}=\dfrac{y}{20-m_2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=5-\dfrac{5}{p}, \\ m_2=20-\dfrac{20}{q}. \end{cases}$ Следовательно, из обоих сосудов испарилось $m_1+m_2=25-\left(\dfrac{5}{p}+\dfrac{20}{q}\right)$ кг воды. Используя условие $pq=9$, получим, что $q=\dfrac{9}{p}$, а также используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, получим, что

$$25-\left(\frac{5}{p}+\frac{20}{q}\right)=25-\left(\frac{5}{p}+\frac{20p}{9}\right)\leq 25-2\sqrt{\frac{5}{p}\cdot\frac{20p}{9}}\leq 25-2\sqrt{\frac{100}{9}},\ \text{т.е.}\ m_1+m_2\leq\frac{55}{3}.$$

Неравенство обращается в равенство, если $\dfrac{5}{p}=\dfrac{20}{q}$. (Примечание редакции журнала)

Ответ: наибольшее количество воды, которое могло испариться из обоих сосудов – $18\frac{1}{3}$ кг.

Задача 22. Проценты содержания кислоты в трёх растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в массовом отношении $2:3:4$, то получится раствор, содержащий 32% кислоты. Если же их смешать в массовом отношении $3:2:1$, то получится раствор, содержащий 22% кислоты. Сколько процентов кислоты содержит каждый раствор?

Решение. Пусть процентное содержание кислоты в растворах соответственно $x\%,\ y\%,\ z\%$.

Если мы возьмём соответственно $2,\ 3,\ 4$ кг растворов, то из условия задачи получим, что $\frac{32}{100}=\frac{\frac{x}{100}\cdot 2+\frac{y}{100}\cdot 3+\frac{z}{100}\cdot 4}{9}\Leftrightarrow 2x+3y+4z=288$.

Если мы возьмём соответственно $3, 2, 1$ кг растворов, то получим, что $3x+2y+z=132$.

Учитывая также, что процентные содержания кислоты образуют геометрическую прогрессию, получим систему уравнений $\begin{cases}2x+3y+4z=288,\\3x+2y+z=132,\\y^2=xz.\end{cases}$

Тогда $\begin{cases}2x+3y+4z=288,\\3x+2y+z=132,\\y^2=xz,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=132-3x-2y,\\y=48-2x,\\y^2=xz,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=48-2x,\\z=36+x,\\x^2-76x+768=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=48-2x,\\z=x+36,\\\left[\begin{array}{l}x=64,\\x=12.\end{array}\right.\end{cases}$

Первое значение $x=64$ не удовлетворяет условию задачи, т.к. при этом $y<0$. Поэтому получаем, что $\begin{cases}x=12,\\y=24,\\z=48.\end{cases}$

Ответ: содержание кислоты в сосудах соответственно 12%, 24%, 48%.

Задачи «на проценты» можно решать не только методом введения искомого процента в качестве неизвестной величины. Часто такие задачи решаются с использованием понятия доли. В частности решение только что рассмотренной задачи может быть таким.

Обозначим долю кислоты в первом растворе буквой *b,* тогда во втором растворе, по условию, кислоты будет *bq,* в третьем bq^2, где *q* – знаменатель геометрической прогрессии. Теперь можно записать соотношения в новых смесях:

$$\begin{cases}\frac{2}{9}b+\frac{3}{9}bq+\frac{4}{9}q^2=0,32,\\\frac{3}{6}b+\frac{2}{6}bq+\frac{1}{6}bq^2=0,22,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2+3q+4q^2}{3+q+q^2}=\frac{0,32\cdot 9}{0,22\cdot 6}=\frac{24}{11},\\\frac{3}{6}b+\frac{2}{6}bq+\frac{1}{6}bq^2=0,22,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4q^2-3q-10=0,\\\frac{3}{6}b+\frac{2}{6}bq+\frac{1}{6}bq^2=0,22,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow q=2, \quad b=0{,}12$. Отсюда следует, что в первом растворе 12% кислоты, во втором 24%, в третьем 48%.

Ответ: 12%, 24%, 48%. *(Примечание редакции журнала)*

Задача 23. Имеются два различных сплава меди и свинца. Если сплавить 1 кг первого сплава и 1 кг второго, то получится сплав, содержащий 65% меди. Известно, что если взять кусок первого сплава массой m_1 и кусок второго сплава массой m_2, причём $m_1+m_2=7$ кг, то получится сплав, содержащий 60% меди. Какова масса меди, содержащейся в сплаве, состоящем из m_2 кг первого и m_1 кг второго сплавов?

Решение. Пусть $p\%$ и $q\%$ - процентные содержания меди соответственно в первом и втором сплавах, а M - искомая масса меди.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{65}{100}=\dfrac{\dfrac{p}{100}\cdot 1+\dfrac{q}{100}\cdot 1}{2}, \\ \dfrac{60}{100}=\dfrac{\dfrac{p}{100}m_1+\dfrac{q}{100}(7-m_1)}{7}, \Leftrightarrow \\ M=\dfrac{p}{100}(7-m_1)+\dfrac{q}{100}m_1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p+q=130, \\ pm_1+q(7-m_1)=420, \\ p(7-m_1)+qm_1=100M. \end{cases}$$

Хотя количество неизвестных в системе превосходит количество уравнений, тем не менее искомую величину можно найти. Складывая второе и третье уравнения системы, получим, что $100M+420=7(p+q)$. Откуда $100M=490 \Leftrightarrow M=4{,}9$.

Ответ: 4,9 кг.

Задача 24. Три одинаковые пробирки наполнены до половины растворами спирта. После того, как содержимое третьей пробирки разлили поровну в первые две, концентрация спирта в первой пробирке уменьшилась на 20%, а во второй – увеличилась на 10% от их первоначальных значений. Во сколько раз первоначальная концентрация спирта в первой пробирке была больше концентрации спирта во второй пробирке?

Решение. Не изменяя общности, можно считать, что в каждой из пробирок в начальный момент времени находилось по 2 каких-либо единиц раствора, а концентрации спирта в пробирках были равны соответственно $p\%, q\%$ и $r\%$. Из условия задачи получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{p}{100}\cdot\left(1-\dfrac{20}{100}\right)=\dfrac{\dfrac{p}{100}\cdot 2+\dfrac{r}{100}\cdot 1}{3}, \\ \dfrac{q}{100}\left(1+\dfrac{10}{100}\right)=\dfrac{\dfrac{q}{100}\cdot 2+\dfrac{r}{100}\cdot 1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,4p=2p+r, \\ 3,3q=2q+r, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=0,4p, \\ r=1,3q. \end{cases}$$

Из этих уравнений получим, что $\dfrac{4p}{13q}=1 \Leftrightarrow \dfrac{p}{q}=\dfrac{13}{4}$.

Ответ: $13:4$.

Как и было обещано, приведём решение задачи 5, сформулированной в начале второго раздела.

По определению прибыль – это разность между затраченными и полученными средствами. Поэтому: $10+8-(7+9)=2$.

Ответ: прибыль торговца составила 2 доллара.

Задача для самостоятельного решения

За круглым столом сидят четыре гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Общий объём молока во всех кружках равен 2 литрам. Первый гном переливает $\frac{1}{4}$ часть своего молока в кружку гнома, сидящего справа от него. Тот, в свою очередь, переливает $\frac{1}{4}$ молока следующему гному. И так поступает каждый. Четвертый переливает $\frac{1}{4}$ молока первому. Сколько молока было первоначально у каждого гнома, если

1. в конце у каждого оказалось поровну?
2. в конце у каждого оказалось столько же, сколько было в начале?
3. те же вопросы, но если бы гномов было n и переливали они $\frac{1}{n}$ часть?