Мирошин Владимир Васильевич
Учитель гимназии № 1522 г. Москва, старший преподаватель кафедры математического анализа Московского городского педагогического университета, закончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Почётный работник образования, 25 лет работает в школе. Автор пособий по подготовке к ЕГЭ по математике.

Задачи о касательных к параболам

Казалось бы, квадратный трёхчлен и график квадратичной функции – парабола – изучены вдоль и поперёк. И ничего нового уже не ожидается. Однако время от времени эта старая избитая тема преподносит новые сюрпризы.

В 1999 г. в Московском инженерно-физическом институте (МИФИ) на вступительных экзаменах была предложена следующая задача.

Задача 1. Точки касания двух общих касательных к параболам

$y=-x^2+5x+1$ и $y=x^2+bx+c$

(b и c – действительные параметры) являются вершинами четырёхугольника. Найдите наименьшее значение параметра c, при котором площадь четырёхугольника равна 8.

Необходимая теория.

Рассмотрим две параболы, заданные уравнениями $y=x^2+px+q$ и $y=-x^2+p_1x+q_1$. Составим уравнения общих касательных.

Пусть абсциссы точек касания соответственно x_0 и x_1 ($x_1>x_0$ для определённости).

Прямая $y=kx+b$, по одному из возможных здесь определений, является касательной к параболе

$$y=x^2+px+q,$$

если их графики имеют только одну общую точку. Другими словами, система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+px+q, \\ y=kx+b \end{cases}$$

должна иметь ровно одно решение. Таким образом, дискриминант квадратного уравнения $kx+b=x^2+px+q$ равен нулю, и его единственным корнем является число $x=x_0$. Следовательно, $(p-k)^2=4(q-b)$ и, так как

$$kx_0+b=x_0^2+px_0+q\text{, то}$$

$$(p-k)^2=-4(p-k)x_0-4x_0^2.$$

Итак, $(p-k)^2+4(p-k)x_0+4x_0^2=0$, т.е. $(p-k+2x_0)^2=0$, $k=2x_0+p$.

Для нахождения b имеем

$$b=x_0^2+px_0+q-kx_0=$$

$$=x_0^2+px_0+q-2x_0^2-px_0=-x_0^2+q.$$

Окончательно уравнение касательной к первой параболе будет иметь вид $y=(2x_0+p)x-x_0^2+q$, а ко второй параболе соответственно

$$y=(-2x_1+p_1)x+x_1^2+q_1.$$

Так как это уравнения одной прямой общей касательной, то получаем систему уравнений, связывающих абсциссы её точек касания:

$$\begin{cases}2x_0+p=-2x_1+p_1,\\ -x_0^2+q=x_1^2+q_1.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+x_1=\dfrac{1}{2}(p_1-p),\\ x_0^2+x_1^2=q-q_1.\end{cases}$$

Так как полученная система симметрична, то если какая-либо пара чисел $(x_0;x_1)$ является её решением, то пара чисел $(x_1;x_0)$ – тоже.

Таким образом, если к параболам проведены общие касательные, то абсциссы точек касания совпадают.

Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ (рис. 1), полученный последовательным соединением точек касания, – как минимум трапеция. Основаниями трапеции являются отрезки, параллельные оси ординат, длины которых равны модулям разности ординат точек касания, а высота трапеции h – модулю разности абсцисс точек касания. Имеем:

$$AD=2x_0^2-(p_1-p)x_0+q-q_1;$$

$$BC=2x_1^2-(p_1-p)x_1+q-q_1.$$

Используя условия

$$\begin{cases}x_0+x_1=\dfrac{1}{2}(p_1-p),\\ x_0^2+x_1^2=q-q_1,\end{cases}$$

получим, что

$$h=|x_1-x_0|=\sqrt{2(q-q_1)-\left(\frac{p_1-p}{2}\right)^2}.$$

Теперь вычислим площадь трапеции $ABCD$:

$$S=\frac{AD+BC}{2}\cdot|x_1-x_0|=$$

$$=\left(2(q-q_1)-\frac{(p-p_1)^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

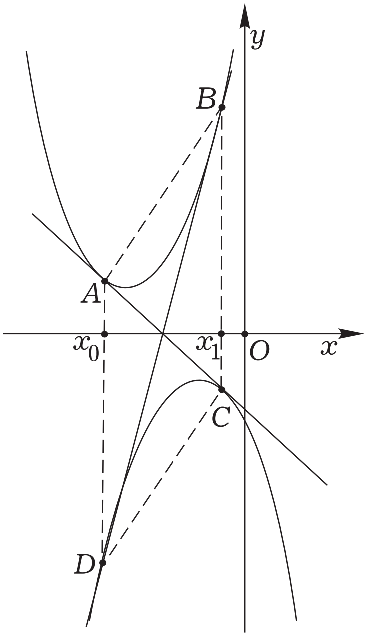


Рис. 1

Решение. Получив формулу, выражающую площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания, можно ответить на вопрос, поставленный в задаче 1.

Подставляя соответствующие значения в полученную формулу, имеем:

$$S=\left(2(c-1)-\left(\frac{b-5}{2}\right)^2\right)^{3/2}=8.$$

Откуда:

$$2(c-1)=4+\left(\frac{b-5}{2}\right)^2\Leftrightarrow c=3+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b-5}{2}\right)^2.$$

Наименьшее значение параметра c, при котором площадь фигуры равна 8, это $c=3$.

Ответ: 3.

Выясним, может ли трапеция $ABCD$ быть равнобедренной, а если может, то когда.

Для её равнобедренности достаточно, чтобы разности ординат соответственно точек B и A, C и D были равны. Получим:

$$(x_1^2+px_1+q)-(x_0^2+px_0+q)=$$
$$=(-x_0^2+p_1x_0+q_1)-(-x_1^2+p_1x_1+q_1).$$

После простейших преобразований получим, что $p=-p_1$. Но это будет означать , что абсциссы вершин парабол одинаковы. В этом случае, как легко видеть, трапеция превращается в прямоугольник $ABCD$.

Следующая задача предлагалась на XIV-й заочной физико-математической олимпиаде МФТИ.

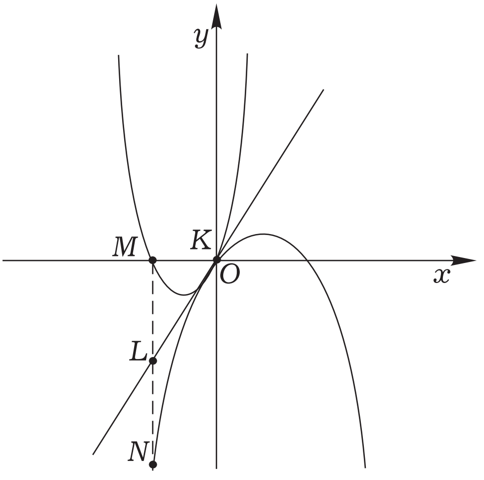
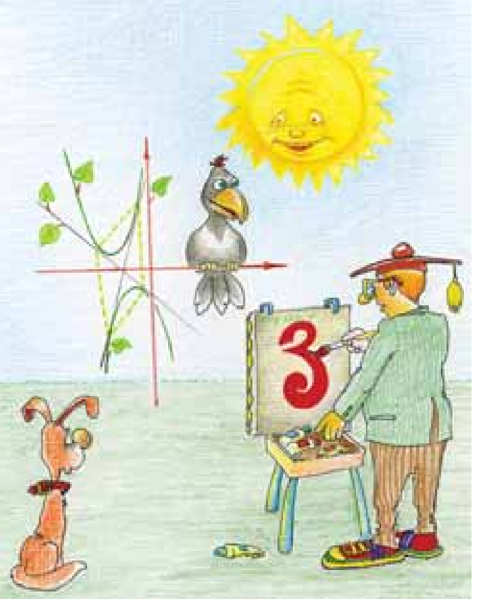


Рис. 2

Задача 2 (МФТИ–2004). Параболы, заданные уравнениями

$$y=2004x^2+ax+b \text{ и } y=-x^2+cx+d,$$

касаются в точке K. Прямая, параллельная оси Ox, пересекает первую параболу в точках K и M, а прямая, параллельная оси Oy, пересекает параболы в точках M и N. В каком отношении делит отрезок MN общая касательная к параболам?



Решение. Так как при параллельном переносе отношение отрезков не меняется, то, не изменяя общности рассуждений, можно считать, что точка K не только точка касания, но и начало координат. Тогда уравнения парабол запишутся в виде

$$y=2004x^2+ax \text{ и } y=-x^2+cx.$$

Точка M в этом случае – вторая точка пересечения первой параболы с осью Ox (рис. 2).

Как и прежде, рассмотрим сначала общее решение этой задачи. Пусть уравнения парабол, проходящих через начало координат, соответственно

$$y=px^2+ax \text{ и } y=-qx^2+cx,$$

где $p>0$, $q>0$. Но так как они касаются в начале координат, уравнение их общей касательной имеет вид $y=ax=cx$, откуда следует, что $a=c$, причём $a>0$. Таким образом, уравнения парабол

$$y=px^2+ax,\ y=-qx^2+ax.$$

Абсцисса точки M равна в таком случае $-\dfrac{a}{p}$, ордината точки N, соот-

ветственно, $-q\dfrac{a^2}{p^2}-\dfrac{a^2}{p}$, модулю которой будет равна длина отрезка MN, т. е. $MN=q\dfrac{a^2}{p^2}+\dfrac{a^2}{p}$, кроме того, $ML=\dfrac{a^2}{p}$,

$$LN=\frac{q^2a^2+a^2p}{p^2}-\frac{a^2}{p}=\frac{q^2a^2}{p^2}.$$

Искомое отношение:

$$\frac{ML}{LN}=\frac{a^2}{p}:\frac{q^2a^2}{p^2}=\frac{p}{q^2}.$$

В частности, если p=2004, q=1, то получим, что $\dfrac{ML}{LN}=\dfrac{p}{q^2}=\dfrac{2004}{1}$.

Ответ: 2004:1.

Задача 3. Из некоторой точки M проведены две касательные MA и MB к параболе $y=x^2$ (рис. 3). Касательная к параболе, параллельная хорде AB, пересекает две первые касательные в точках C и D соответственно. Найдите отношение периметров треугольников MAB и MCD.

Решение. Пусть точки A и B имеют, соответственно, координаты $(a;\ a^2)$, $(b;\ b^2)$. Тогда уравнения касательных AM и BM будут иметь вид:

$$y=2ax-a^2 \ \text{ и } \ y=2bx-b^2.$$

Находя их пересечение, определяем координаты $(x;y)$ точки M:

$$2ax-a^2=2bx-b^2 \Leftrightarrow x=\frac{a+b}{2},$$

$$y=2a\frac{a+b}{2}-a^2=ab.$$

Угловой коэффициент хорды AB

$$k=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b.$$

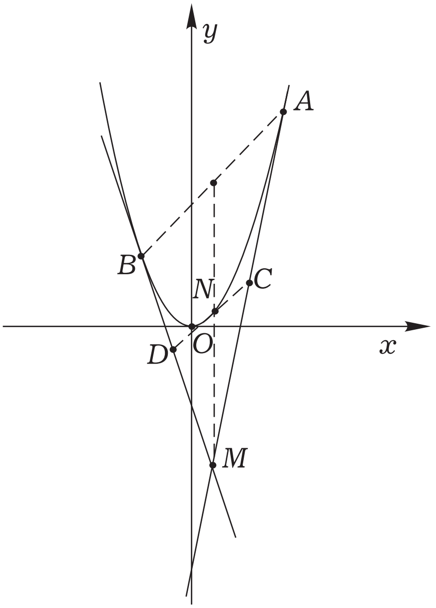


Рис. 3

Уравнение касательной CD имеет вид $y=(2x_0)x-x_0^2$ (см. задачу 1), где x_0 – абсцисса точки касания. Так как касательная CD параллельна этой хорде, то $2x_0=a+b$; следовательно, $x_0=\dfrac{a+b}{2}$, а ордината точки касания

$$y_0 = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Наконец, середина хорды AB имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a^2+b^2}{2}\right)$.

Итак, точка M, точка касания прямой CD с параболой и, наконец, середина хорды AB лежат на одной прямой, параллельной оси параболы!

Мало того, точка касания прямой CD – середина медианы треугольника AMB.

Таким образом, треугольники AMB и CMD подобны с коэффициентом $k = 2$.

Следовательно, периметр треугольника AMB в два раза больше периметра треугольника CMD!

Ответ: $2:1$.

Задача 4 (Московский автомобильный институт). Найдите наименьшее расстояние d между точками, одна из которых принадлежит графику функции $y = 2x^2 + \frac{x}{2} + 3$, а другая – графику функции $y = \sqrt{x}$.

Решение. Наименьшее расстояние между графиками данных функций равно расстоянию между точками $A(x_0; \sqrt{x_0})$ и $B(x_1; 2x_1^2 + \frac{x_1}{2} + 3)$, для которых (рис. 4) прямая AB перпендикулярна касательным, проведённым к графикам в указанных точках.

Уравнения касательных таковы:

$$y = (4x_1 + \frac{1}{2})(x - x_1) + 2x_1^2 + \frac{x_1}{2} + 3,$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \sqrt{x_0}.$$

Первое из них мы научились находить при решении задачи 1, а второе можно получить из аналогичных соображений (подумайте, как?). Отметим, что указанные уравнения касательных легко получаются также и из общего уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(a; f(a))$, которое имеет вид

$$y = f'(a)(x - a) + f(a),$$

где $f'(a)$ обозначает значение производной в точке $x = a$.

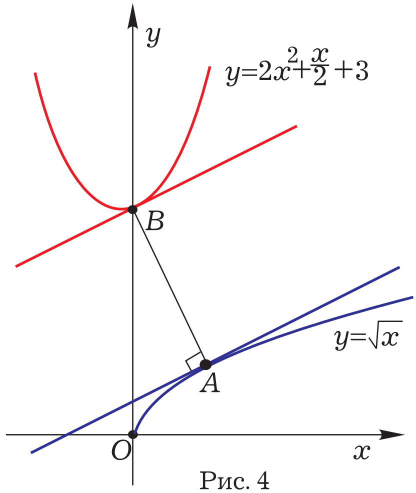


Рис. 4

Так как касательные должны быть параллельны, то, приравнивая коэффициенты при x в их уравнениях, получаем, что $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 4x_1 + \frac{1}{2}$.

Чтобы прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ были перпендикулярны, нужно, чтобы $k_1k_2 = -1$. Действительно, угол между данными прямыми равен углу между прямыми $y = k_1x$ и $y = k_2x$. А условие перпендикулярности этих прямых (см. рис 5) следует из того, что $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ и

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке A, является прямая

$$y=-2\sqrt{x_0}\,(x-x_0)+\sqrt{x_0}.$$

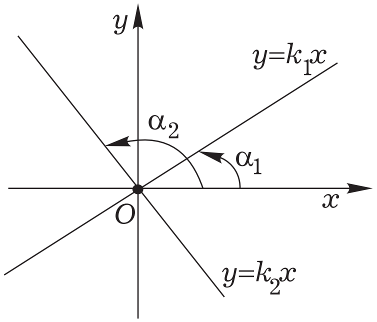


Рис. 5

Так как эта прямая должна проходить через точку B, то

$$y=-2\sqrt{x_0}\,(x_1-x_0)+\sqrt{x_0}=2x_1^2+\frac{x_1}{2}+3.$$

Итак, абсциссы точек A и B удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases}-2\sqrt{x_0}\cdot(x_1-x_0)+\sqrt{x_0}=2x_1^2+\dfrac{x_1}{2}+3,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}=4x_1+\dfrac{1}{2},\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\sqrt{x_0}\cdot(x_1-x_0)+\sqrt{x_0}=\\ =\dfrac{1}{8}\left(4x_1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{95}{32},\\ 4x_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}.\end{cases}$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{x_0}+2(\sqrt{x_0})^3+\sqrt{x_0}=$$
$$=\frac{1}{32\left(\sqrt{x_0}\right)^2}+\frac{95}{32}.$$

Преобразуя это уравнение, получим: $64(\sqrt{x_0})^5+40(\sqrt{x_0})^3-103(\sqrt{x_0})^2-1=0.$ Уравнение

$$64t^5+40t^3-103t^2-1=0,\ t=\sqrt{x_0}\ge 0,$$

имеет корень $t=1$, т.к. сумма его коэффициентов равна 0. Кроме того, разложив на множители или выполнив, например, деление «уголком», уравнение можно записать в виде

$$(t-1)(64t^4+64t^3+104t^2+t+1)=0,$$

которое положительных корней, отличных от 1, ясно, не имеет.

Поэтому $x_0=1, x_1=0$. Таким образом, точка A имеет координаты $(1;\ 1)$, а точка B – $(0;\ 3)$. Расстояние между ними равно $\sqrt{1^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}.$

Ответ: $\sqrt{5}$.

Задача 5. (МФТИ, 2001-2002 г.). Хорда AB параболы $y=x^2$ перпендикулярна касательной к параболе, проходящей через точку A. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB?

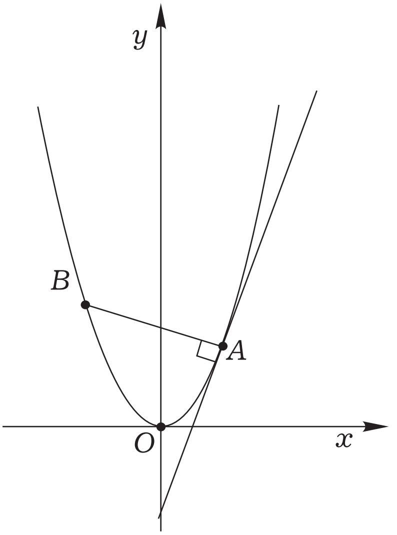


Рис. 6

Решение. Не нарушая общности, будем считать, что точка $A\ (a;\ a^2)$ лежит справа от оси ординат, т.е. пусть $a>0$. Уравнение касательной, проходящей через точку A, имеет вид $y=2ax-a^2$, а перпендикулярной к ней прямой $y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$. Решим уравнение:

$$x^2=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2a}x-(a^2+\frac{1}{2})=0.$$

Учитывая, что первый корень уравнения $x=a$, получаем его второй корень

$$x=-\frac{1}{a}\left(a^2+\frac{1}{2}\right)=-\left(a+\frac{1}{2a}\right).$$

Воспользуемся ещё и тем, что если расстояние принимает наименьшее значение, то его квадрат также минимален. Имеем

$$d^2=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^2+\left(\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2-a^2\right)^2=$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^2+\left(1+\frac{1}{4a^2}\right)^2=$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{1}{4a^2}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^2=$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^2\left(1+\frac{1}{4a^2}\right)=\frac{1}{2a}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^3.$$

Обозначим $t=\frac{1}{2a}$. Тогда

$$d^2=D(t)=t\left(t+\frac{1}{t}\right)^3=$$

$$=t(t^3+3t^2\cdot\frac{1}{t}+3t\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3})=$$

$$=t^4+3t^2+3+\frac{1}{t^2}=$$

$$=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(4t^2+\frac{1}{t^2}\right)+\frac{11}{4}.$$

Функции

$$y=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2 \text{ и } y=4t^2+\frac{1}{t^2}$$

достигают своего наименьшего значения при $t^2=\frac{1}{2}$. Для первой из них это очевидно, а для второй следует из неравенства $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ о среднем арифметическом и среднем геометрическом положительных чисел, в котором равенство достигается только в том случае, когда $a=b$.

Таким образом, $t^2=\frac{1}{2}$ и, тем самым, $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отметим, что если применить производную, то тот же результат следует из того, что

$$D'(t)=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3+3t\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)=$$

$$=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\left(t+\frac{1}{t}+3t-\frac{3}{t}\right)=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\left(4t-\frac{2}{t}\right).$$

Квадрат минимального расстояния

$$d^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3=$$

$$=2\cdot\frac{27}{8}=\frac{27}{4}$$

и, следовательно, минимальная длина хорды AB равна $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Точки касания двух общих касательных к параболам

$$y = x^2 + bx + 3 \text{ и } y = -x^2 + 2x + c$$

(b и c – действительные параметры) являются вершинами четырёхугольника. Найдите наибольшее значение параметра c, при котором площадь четырёхугольника равна 27.

Задача 2. Точки касания двух общих касательных к параболам

$$y = -x^2 + bx - 1 \text{ и } y = x^2 + 4x + c$$

(b и c – действительные параметры) являются вершинами четырёхугольника. Найдите наименьшее значение параметра c, при котором площадь этого четырёхугольника равна 1.

Задача 3. Точки касания двух общих касательных к параболам

$$y = x^2 + bx - 4 \text{ и } y = -x^2 + bx + c$$

(b и c – действительные параметры) являются вершинами четырёхугольника. Найдите наибольшее значение параметра c, при котором площадь четырёхугольника равна 64.

Задача 4. Даны параболы, заданные уравнениями

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2 \text{ и } y = -x^2.$$

К ним проведены две общие касательные AC и BD.

Найдите:

1) значение параметра a, при котором площадь четырёхугольника $ABCD$ будет наименьшей;

2) наименьшую площадь четырёх-угольника $ABCD$;

3) значение параметра a, при котором вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

4) площадь четырёхугольника $ABCD$, если вокруг него можно описать окружность.

5) периметр четырёхугольника $ABCD$, если вокруг него можно описать окружность.

6) угол между касательными, если вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Ответы:

1) $a = -\frac{1}{2}$; 2) $\frac{7}{8}\sqrt{7}$; 3) $a = 0$;

4) $2\sqrt{2}$; 5) $4 + 2\sqrt{2}$; 6) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.