Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

Задача о сообщающихся сосудах, или Двадцать лет спустя

В статье рассказывается об оригинальном способе решения задач по теме «Сообщающиеся сосуды».

История одной задачи

В журнале «Потенциал» №4 за 2013 год моё внимание привлекла статья В.В. Вавилова «Моя любимая задача», в которую были включены выдержки из сочинений 11-классников. Мне показалось, что ребята писали сочинения с удовольствием, делясь с нами радостью познания математических истин. Удивительную историю рассказала, например, девочка, познакомившаяся со своей задачей ещё в 7 классе, и сохранившая её в памяти до сих пор. Размышления школьников заставили и меня невольно задуматься о моей любимой задаче. Конечно, выбрать из множества встретившихся в жизни задач одну единственную, назвав её любимой, едва ли возможно. И всё же среди них есть задачи со своей, можно сказать, судьбой. Взять хотя бы задачу о трёх сообщающихся сосудах. О ней я уже много лет рассказываю своим ученикам. Историю знакомства с этой задачей и оригинальным способом её решения мне хотелось бы поведать читателям.

Случилась она ещё в прошлом веке, лет двадцать назад. Задача впервые была предложена на вступительном экзамене на механико-математический факультет МГУ в 1991 году. С тех пор её не раз использовали другие вузы во время конкурсных испытаний и олимпиад. Приведём формулировку задачи.

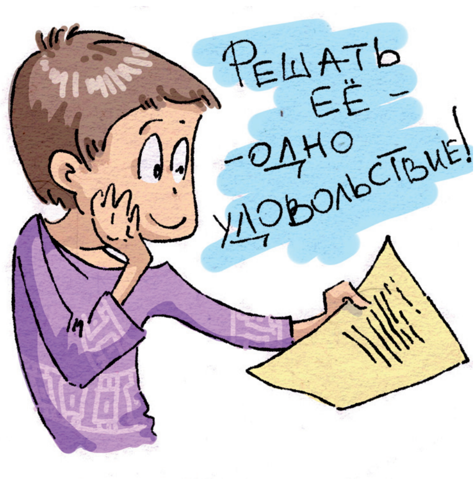
- В трёх одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть. В левый сосуд налили слой воды высотой h_1 = 180 мм, а в правый – высотой h_3 = 228 мм. На сколько сместится уровень ртути в среднем сосуде, если известно, что ртуть из левого и правого сосудов не вытесняется водой полностью? Плотность ртути ρ = 13,6·10^3 кг/м^3, плотность воды ρ_0 = 10^3 кг/м^3.

Прочитав условие задачи, приступил к решению. Решал стандартно, как принято решать задачи на сообщающиеся сосуды, и скоро пришёл к верному ответу. Задача заинтересовала меня тем, что по ходу её решения я увидел одну математическую тонкость при решении системы уравнений. С целью знакомства с этой тонкостью стал предлагать эту задачу 11-классникам, которые решали её тем же стандартным способом.

И вот однажды во время подготовки призёров областной олимпиады к республиканской я познакомил их с данной задачей. До конца занятия оставалось минут пять, я только успел продиктовать условие, а ребята, сделав рисунок, приступить к решению, как раздался звонок. Я собрал листочки с решёнными на занятии задачами и отправился проверять. Каково же было моё изумление, когда на листочке одного восьмиклассника я под небрежно сделанным рисунком увидел запись: «Ответ: 10 мм». И никаких пояснений! Но я-то знал, что это верный ответ!

Читатель, разумеется, догадался, что я едва мог дождаться начала утреннего занятия, на котором вновь встретился с **тем** восьмиклассником. И он оправдал мои ожидания: мальчик рассказал о красивом способе, позволившем ему практически устно решить эту задачу.

Однако прервём на этом месте наш рассказ, чтобы сначала решить задачу обычным способом (если, конечно же, читатель ещё не пробовал самостоятельно это сделать).



Традиционный способ решения

Изобразим на рисунке 1 положение уровней жидкостей в трёх данных сообщающихся сосудах до и после доливания в них воды.

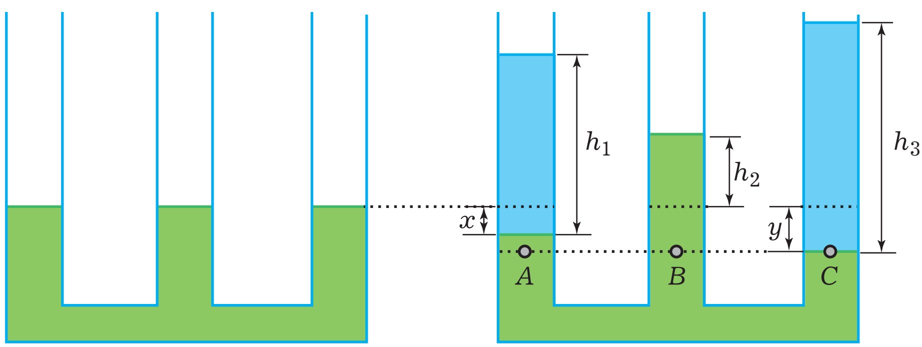


Рис. 1

Пусть в левом сосуде уровень ртути опустится на x, а в правом – на y. Поскольку жидкость несжимаема и площадь сечения сосудов постоянна, уровень ртути в среднем сосуде поднимется на $h_2 = x + y$.

Согласно закону сообщающихся сосудов для однородной жидкости, давления в точках A, B и C, расположенных на одном уровне (уровне границы воды и ртути в правом сосуде), одинаковы.

Давление в точке A создаётся столбом воды высотой h_1 и столбом ртути высотой $(y - x)$:

$$p_A = \rho_0 g h_1 + \rho g(y - x),$$

в точке B – столбом ртути высотой $(x + 2y)$:

$$p_B = \rho g(x + 2y),$$

в точке C – столбом воды высотой h_3:

$$p_C = \rho_0 g h_3.$$

Приравнивая давления в точках B и C, получим:

$$\rho x + 2\rho y = \rho_0 h_3 \Rightarrow x = \frac{\rho_0}{\rho} h_3 - 2y. \quad (*)$$

Аналогично для точек A и C:

$$\rho_0 h_1 + \rho(y - x) = \rho_0 h_3.$$

Подставив в это уравнение выражение для x, получим

$$\rho_0 h_1 + \rho y - \rho_0 h_3 - 2\rho_0 y = \rho_0 h_3,$$

откуда

$$y = \frac{\rho_0}{3\rho}(2h_3 - h_1).$$

Осталось найти x из выражения (*). Однако не будем торопиться приступать к алгебраическим преобразованиям (вот где находится математическая тонкость, о которой говорилось в начале статьи!). Попробуем угадать, каким должно быть выражение для x. Для этого обратите внимание на наличие определённой симметрии в условии задачи: левый сосуд ничуть не лучше, но и не хуже правого!

Если всё же догадаться не удалось, делаем несложные преобразования и получаем

$$x = \frac{\rho_0}{3\rho}(2h_1 - h_3).$$

Сравнив выражения для x и y, убеждаемся в том, что они имеют похожий вид, чего и следовало ожидать.

Итак, нам осталось лишь определить искомую величину:

$$h_2 = x + y = \frac{\rho_0}{3\rho}(h_1 + h_3).$$

Подставив числовые значения, получим $h_2 = 10$ мм.

Ответ. 10 мм.

Решение способом замены

Терпеливо проделав весь традиционный путь решения, мы ожидаем вознаграждения: знакомства со способом восьмиклассника. Ну что же, тогда настроимся на встречу с прекрасным при решении физической задачи: нас ждёт оригинальная логика рассуждений школьника.

Разобьём решение задачи на несколько этапов. Сначала упростим условие: пусть доливают жидкость не в два сосуда сразу, а только в левый, причём для простоты возьмём не воду, а ртуть. Итак, рассмотрим вспомогательную задачу №1.

• В трёх одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть. В левый сосуд налили слой ртути высотой H_1. На сколько сместится уровень ртути в среднем сосуде?

В этой задаче ответ очевиден: во всех сосудах, в том числе и в среднем, уровень ртути поднимется на $H_1/3$ (рис. 2).

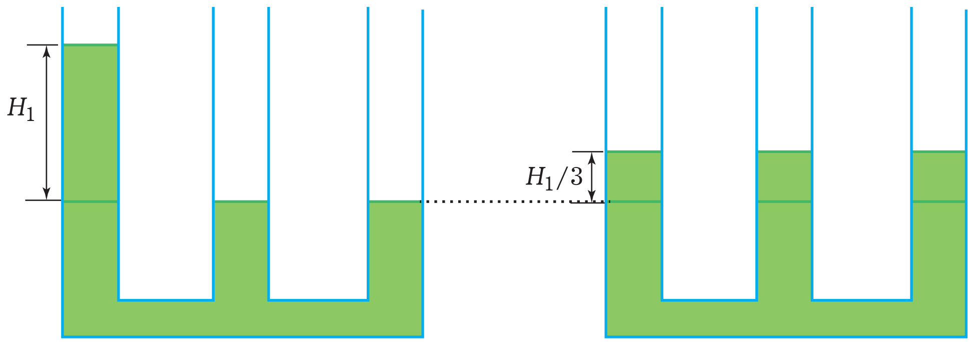


Рис. 2

Хорошо. Усложним немного условие, добавив ртуть в два сосуда сразу. Теперь перед нами вспомогательная задача №2.

- В трёх одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть. В левый сосуд налили слой ртути высотой H_1, а в правый – слой ртути высотой H_3. На сколько сместится уровень ртути в среднем сосуде?

И в этом случае к верному ответу прийти не очень сложно. Мы уже знаем, что после доливания слоя ртути высотой H_1 в левый сосуд уровень ртути в среднем поднялся на $H_1/3$. Очевидно, что доливание слоя ртути высотой H_3 в правый сосуд приведёт к аналогичному результату: уровень ртути в среднем сосуде поднимется на высоту $H_3/3$. Значит, общий подъём уровня ртути в среднем сосуде после доливания жидкости в оба крайних сосуда равен сумме рассчитанных ранее подъёмов:

$$h_2 = \frac{H_1 + H_3}{3}. \qquad (**)$$

А теперь – внимание: самый важный момент решения. Вспомним, что плотность ртути в 13,6 раз больше плотности воды. Значит, столб ртути высотой H давит так же, как слой воды высотой h, если

$$H = \frac{h}{13,6}.$$

На этом физическая часть решения завершена. Остаётся лишь выполнить простые арифметические действия: сложить высоты двух столбов воды 180 мм + 228 мм = 408 мм, поделить этот результат на 13,6 а затем ещё раз на 3, получив в итоге 10 мм. Хотя, скорее всего, восьмиклассник сначала перемножил 13,6 и 3, получил 40,8 и обрадовался, поняв, что он на верном пути. Едва ли такое совпадение чисел 408 и 40,8 могло быть случайным!

Для тех же читателей, кто любит решать задачи в общем виде, доведём буквенное решение до конца, сверив заодно ответ с полученным ранее при решении первым способом.

Ртуть в среднем сосуде «не заметит» подмены воды ртутью в крайних сосудах только в том случае, когда это не приведёт к изменению давления на неё. Значит, можно свободно заменять столб воды высотой h столбом ртути высотой H, если выполняется равенство:

$$\rho_0 g h = \rho g H \Rightarrow H = \frac{\rho_0}{\rho} h.$$

Подставив в формулу (**) выражения $H_1 = \frac{\rho_0}{\rho} h_1$ и $H_3 = \frac{\rho_0}{\rho} h_3$, получим

$$h_2 = \frac{\rho_0}{3\rho}(h_1 + h_3).$$

Замечание о психологии решения задач

Интересно отметить, что за прошедшие годы я много раз проводил своего рода тестирование учеников и преподавателей на этой задаче. И практически во всех случаях тестируемые поступали одинаково: записывали систему уравнений, после чего решали её, выходя, в зависимости от математической техники, на верный или неверный ответ.

Почему почти всегда так происходит? Видимо, срабатывает своеобразный стереотип подхода к решению этой задачи. Можно ли его избежать? Однозначный ответ едва ли существует. Возможно, какую-то руководящую идею в этом направлении высказал Д. Пойа в книге «Как решать задачу»: «Насекомое старается вылететь через оконное стекло и повторяет эту безнадёжную затею снова и снова. Оно не пытается вылететь в рядом расположенное открытое окно, через которое оно попало в комнату. Мышь действует более разумно: попав в клетку, она пытается протиснуться между одними прутьями решётки, затем между другими и т. д. Она варьирует свои попытки, исследует различные варианты. Человек умеет, во всяком случае, должен уметь менять свой подход при решении задач ещё более разумно, умеет исследовать различные возможности с бóльшим пониманием. Человек должен уметь учиться на своих ошибках и недостатках. "Пытайся, пытайся снова" – в этой поговорке заключён совет народной мудрости. Насекомое, мышь и человек следуют этому совету, но если у одного получается более успешно, чем у других, то это происходит потому, что он видоизменяет свою задачу более разумно».

Решение задач способом замены

На этом можно было бы завершить рассказ, но здесь вполне уместным представляется вопрос: можно ли другие задачи решать разобранным выше способом? В каких случаях этот способ позволит существенно упростить решение задачи? Оказывается, практически все задачи на сообщающиеся сосуды можно решить способом замены, причём во многих случаях такое решение приводит к ответу быстрее, чем традиционный способ.

Попробуем убедиться в этом на примере решения двух задач.

Задача 1. В одинаковые сообщающиеся сосуды налили ртуть, поверх неё в один сосуд налили столб масла высотой $h_1 = 48$ см, а в другой – столб керосина высотой $h_2 = 20$ см. Определите разность уровней ртути в обоих сосудах. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность масла $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность керосина $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Добавим сначала в левый сосуд столб масла высотой h_1 (рис. 3). При этом уровень ртути в правом сосуде окажется выше, причём разность уровней будет равна высоте столба ртути, оказывающего такое же давление, как и давление масла высотой h_1. Высота такого столба ртути равна $H_1 = \frac{\rho_1}{\rho} h_1$.

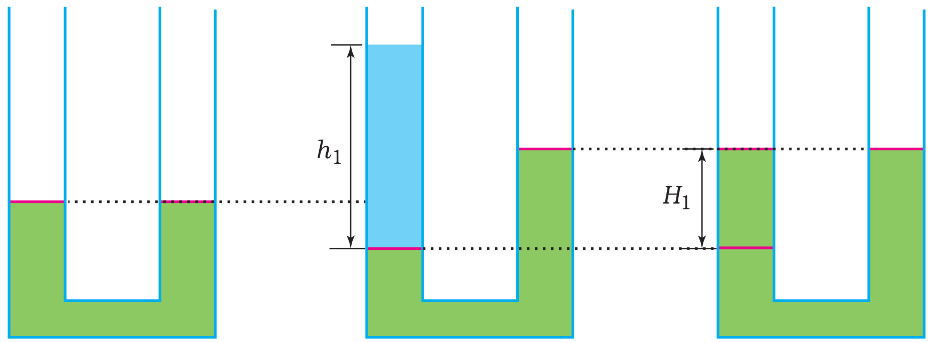


Рис. 3

Если же добавить в правый сосуд столб керосина высотой h_2, то поднимется уровень ртути в левом сосуде. Очевидно, что в этом случае разность уровней равна $H_2 = \frac{\rho_2}{\rho} h_2$.

Нетрудно догадаться, что после доливания жидкостей в оба сосуда искомая разность уровней ртути

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho} = 2 \text{ см}.$$

Ответ. 2 см.

Задача 2. Ртуть находится в U-образной трубке. Площадь сечения левого колена в три раза меньше, чем правого (рис. 4*а*). Уровень ртути расположен на расстоянии h = 0,3 м от верхнего края левого колена трубки. На сколько поднимется уровень ртути в правом колене, если левое колено трубки полностью залить водой?

Решение. Способ замены и в этой задаче позволяет быстро прийти к ответу. Обозначим искомую высоту подъёма ртути в правом колене H_1 (рис. 4*б*). Тогда уровень ртути в левом колене под давлением столба воды высотой h_0 опустится на $3H_1$. Это следует из условия несжимаемости жидкости: при уменьшении объёма ртути в левом сосуде объём ртути в правом сосуде возрастёт на такую же величину; площадь сечения левого колена по условию втрое меньше правого, поэтому уровень ртути в левом колене опустится на расстояние, в три раза большее, чем поднимется ртуть в правом колене. Таким образом, $h_0 = h + 3H_1$.

Если теперь заменить столб воды высотой h_0 столбом ртути, высота которого $H = \frac{\rho_0}{\rho} h_0$, то ртуть, находившаяся в U-образной трубке такой «подмены» не заметит, зато поверхности ртути в обоих коленах трубки будут на одном уровне.

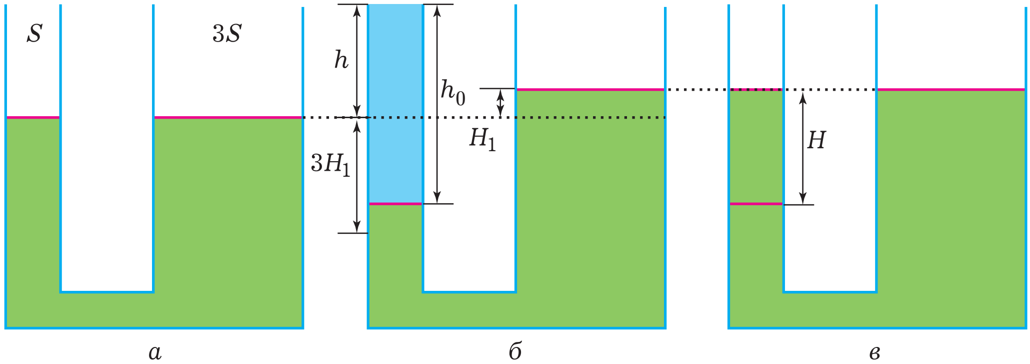


Рис. 4

Из рис. 4 *в* видно, что $H = 4H_1$. Записанные выше уравнения позволяют определить искомую высоту:

$$H_1 = \frac{\rho_0}{4\rho - 3\rho_0} h = 5{,}8 \text{ мм}.$$

Ответ. 5,8 мм.

Способ замены можно успешно применять и в других случаях. Например, плавающее тело удобно заменять жидкостью, вытесняемой погружённой частью тела.

Задача 3. В одно из колен U-образной трубки одинакового сечения, частично заполненной водой, опускают плавать кусочек дерева массой m = 10 г. На какую высоту h поднимется уровень воды в трубке, если её сечение S = 10 см^2?

Решение. По закону Архимеда кусочек плавающего дерева вытесняет своей погружённой частью массу воды, равную массе m этого кусочка. Следовательно, при доливании в одно из колен воды массой m уровень воды в трубке поднимется на ту же высоту, что и при опускании кусочка дерева массы m. Объём воды массой m равен

$$V = \frac{m}{\rho_0},$$

где ρ_0 – плотность воды, поэтому искомая высота

$$h = \frac{m}{2\rho_0 S} = 0{,}5 \text{ см}.$$

Ответ. 0,5 см.

Олимпиадная задача

В заключение рассмотрим задачу, предлагавшуюся на Московской городской олимпиаде школьников по физике в 1999 году. Приведём лишь авторское решение. Если читателю пришёлся по душе описанный в статье способ замены, то, возможно, он придёт к ответу в задаче значительно быстрее, без использования математических преобразований, практически устно.

Задача 4. Система из двух сообщающихся вертикальных цилиндров, заполненных жидкостью плотности ρ, закрыта поршнями массы M_1 и M_2. В положении равновесия поршни находятся на одной высоте. Если на поршень массы M_1 положить груз массы m, то поршень массы M_2 поднимется после установления равновесия на высоту h относительно начального положения. На какую высоту поднимется относительно начального положения равновесия поршень массы M_1, если груз массы m переложить на поршень массы M_2? Трения нет.

Решение. Пусть после того, как на поршень массой M_1 положили груз массой m, этот поршень опустился на расстояние Δh_1, а второй поршень поднялся на высоту Δh_2 относительно начального положения. При этом перепад уровней жидкости в сосудах будет равен $\Delta h_1 + \Delta h_2$, а разность давлений, создаваемая этим перепадом уровней, будет компенсироваться добавочным давлением, которое создаёт груз массой m, лежащий на первом поршне. Отсюда получаем уравнение:

$$\rho g(\Delta h_1 + \Delta h_2) = mg/S_1.$$

Здесь S_1 – площадь поршня массой M_1. Далее, так как объём жидкости под поршнями не изменился, то справедливо соотношение:

$$S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2,$$

где S_2 – площадь поршня массой M_2. Выражая из второго уравнения величину Δh_1 и подставляя её в первое уравнение, найдём высоту, на которую поднимется поршень массой M_2:

$$\Delta h_2 = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)}.$$

По условию задачи эта величина равна h.

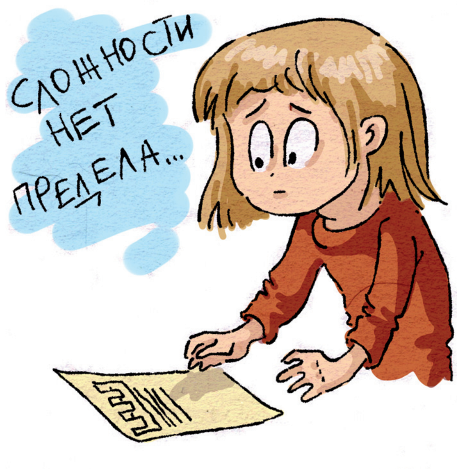
Пусть теперь груз массой m положили на поршень массой M_2.

Проводя аналогичные рассуждения, можно честно найти высоту $\Delta h_1'$, на которую при этом поднимется поршень массой M_1. Однако, зная выражение для Δh_2, ответ можно просто угадать. Действительно, в рассматриваемой системе всё равно, какой поршень считать «первым», а какой – «вторым». Значит, для того, чтобы получить ответ, можно просто перенумеровать все величины в последней формуле, то есть заменить все индексы «1» на индексы «2», и наоборот. В итоге получим

$$\Delta h_1' = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)} = \Delta h_2 = h.$$

Итак, если положить груз массой m на поршень массой M_2, то поршень массой M_1 поднимется относительно начального положения на такую же высоту h, на какую поднимался поршень массой M_2, когда груз массой m клали на поршень массой M_1.

Ответ. На высоту h.



Подведём краткий итог.

Изложенный выше способ замены позволил решить разнообразные задачи на сообщающиеся сосуды, причём в некоторых случаях решение оказывалось короче стандартного. Но на наш взгляд, не менее важно и то, что в процессе решения мы прикоснулись к физически прекрасному: оригинальной логике рассуждений. А красота логических построений в науке, по словам академика А.Б. Мигдала, аналог одухотворённости в искусстве. О том, как проявляется красота в науке, он написал в своей замечательной книге «Поиски истины», которую мы настоятельно рекомендуем читателям.

Задачи для самостоятельного решения

1. В U-образной трубке одинакового сечения находится ртуть. На сколько повысится уровень в правой части трубки, если в левую налить воды так, чтобы она образовала столб высотой 13,6 см? (Ответ: 0,5 см.)

2. Пять одинаковых сообщающихся сосудов (рис. 5) частично заполнены водой. В один из сосудов доливают слой керосина высотой h = 25 см. На сколько поднимется уровень воды в остальных сосудах? (Ответ: 4 см.)

Рис. 5

3. Вертикально расположенная U-образная трубка одинакового сечения частично заполнена ртутью, причём левый конец трубки выше уровня ртути на h_1 = 50,2 см, а правый – на h_2 = 25 см. В оба колена трубки наливают воду так, что они оказываются полностью заполненными. На какую величину Δh переместится уровень ртути в левом колене трубки, если известно, что ртуть из него не вытесняется полностью? Плотность ртути ρ = 13,6 г/см^3, плотность воды ρ_0 = 1 г/см^3. (Ответ: 1 см.)

4. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Диаметр одного сосуда в четыре раза больше диаметра другого. В узкий сосуд наливают столб воды высотой h = 0,7 м. На сколько поднимется уровень ртути в одном сосуде и опустится в другом? (Ответ: 3 мм; 4,8 мм.)

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Причина сомнения

– Почему вы опоздали на полтора часа?

– Со мной случилась пренеприятная история: я выпал из окна.

– С какого же этажа?

– С седьмого.

– И это заняло у вас полтора часа?