Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, лаборатория по работе с одарёнными детьми МФТИ.

Всего лишь движение с постоянным ускорением, но ещё один сюрприз теории относительности

Теория относительности уже более 100 лет удивляет нас. Все мы, изучавшие механику Ньютона, привыкли к тому, что *ускорение любого тела во всех инерциальных системах (ИСО) одно и то же*. А потому, если оно *постоянно* в одной ИСО, то оно, конечно, *постоянно* и в любой другой ИСО (раз уж ускорения равны друг другу!). Но это *не верно в теории относительности*!

Лет 40 назад автора статьи привлекло внимание следующее замечание в книге Р. Толмена «Относительность, термодинамика и космология» [1] (с. 40):

«Отметим одно интересное обстоятельство. Из соотношений (следовала ссылка на формулы преобразования компонент скорости при переходе от одной ИСО к другой; см. далее формулу (1)) **вытекает, что, если скорость постоянна в системе S′, то она постоянна и в системе S. Из уравнений же** (здесь была ссылка на формулы преобразования компонент ускорения; см. ниже формулу (7)) **следует, что постоянное ускорение в системе S′, вообще говоря, не приводит к постоянному ускорению в системе S. В самом деле, компоненты ускорения в S зависят не только от ускорения в S′, но также и от компонент скорости в этой системе, которые изменяются со временем**».

Замечание автора книги было всего в 8 строк, ещё через 3 строчки соответствующий параграф книги закончился, и нигде далее автор книги к этому вопросу не возвращался.

Автор настоящей статьи просмотрел множество книг, затрагивающих вопросы СТО (прежде всего учебники для вузов с физическим уклоном), однако нигде не нашёл обсуждения этого вопроса. О том, что *ускорение не есть инвариант преобразований Лоренца*, говорится. Но о том, что **из постоянства ускорения в одной ИСО не следует его *постоянство* во всех других ИСО**, – так расставленного ударения автор не заметил (разве только упустил что-то написанное в книгах «между строк»).

Цель настоящей работы вполне конкретна – ответить на вопрос: **«Если в одной ИСО тело движется с постоянным ускорением, то как это движение будет выглядеть (как конкретно!) с точки зрения наблюдателя в *другой ИСО*?»**

Начнём с того, что тонкость, о которой говорит Р. Толмен, легче всего уяснить, взглянув уже на формулу преобразования скорости (а не на формулу преобразования ускорения, о которой знают далеко не все, даже студенты-физики, по крайней мере студенты младших курсов):

$$u = \frac{u' + V}{1 + Vu'/c^2}. \qquad (1)$$

Пусть в штрихованной ИСО тело движется с постоянным ускорением; положим в (1)

$$u' = u'(t') = a't' \qquad (2)$$

(везде далее рассматривается чисто одномерное движение, поэтому, чтобы не загромождать формулы, индексы «x» при u_x и a_x не будут выписываться), тогда, как легко видеть, получающаяся зависимость скорости u от времени t

$$u = \frac{a't' + V}{1 + Va't'/c^2} \qquad (1')$$

оказывается существенно **нелинейной**, что уже само по себе указывает на то, что движение в **не** штрихованной системе *будет едва ли движением с постоянным ускорением.*

Конечно, формула (1′) – это пока ещё не совсем то, что нужно. Она даёт лишь зависимость скорости u в системе S как функцию времени t' (измеренном по часам системы S'); наша же цель – получить явную зависимость скорости u в **не** штрихованной системе от **не** штрихованного же времени t.

Итак, надо перейти в формуле (1′) от времени t' к времени t. Сделать это нетрудно. Здесь можно действовать, например, так, как поступают в книжках для начинающих (ещё не знающих о производных), когда для случая движения тел с *постоянной скоростью* получают формулу сложения скоростей (1) из формул преобразований Лоренца (ПЛ). А поступают так. Запишем формулы ПЛ:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad (3\text{-}4)$$

и положим в них $x' = x'(t') = u't'$:

$$x = \frac{u't' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{u' + V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}t', \qquad (3')$$

$$t = \frac{t' + Vu't'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1 + Vu'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}t'. \qquad (4')$$

Самое простое здесь – поделить одно уравнение на другое; в результате из *равномерности* движения тела в системе S' со скоростью u'(x'/t'=*const* = u') немедленно получается *равномерность* движения в системе S:

$$\frac{x}{t} = \frac{u' + V}{1 + Vu'/c^2} = const \equiv u$$

со скоростью u (даваемой формулой (1)).

В случае движения тела с **постоянным** в системе S' **ускорением** (возвращаемся к нашей задаче) в формулах (3-4) необходимо положить

$$x'(t') = \frac{a't'^2}{2}. \qquad (2')$$

в итоге вместо (3′-4′) будем иметь более сложную (нелинейную) систему уравнений:

$$x = \frac{a't'^2/2 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad (5)$$

$$t = \frac{t' + Va't'^2/2c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (6)$$

Здесь простой приём деления одного уравнения системы на другое не проходит. Однако и систему уравнений (3′-4′) не обязательно было решать просто. Решим её «сложно»: выразим из (4') время t' через время t:

$$t' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vu'/c^2} t \equiv t'(t). \qquad (4'')$$

Подставляя (4″) в (3′), снова получаем известный результат

$$x(t) = \frac{u' + V}{1 + Vu'/c^2} t = ut.$$

Поступим аналогичным образом и с системой (5-6). Из соотношения (6) найдём зависимость $t'=t'(t)$. Здесь мы, правда, имеем чуть более сложное уравнение относительно t', а именно, квадратное:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{a'\beta}{2c} t'^2\right), \qquad (6')$$

где введены стандартные в СТО обозначения $\beta = V/c$ и $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Далее для определенности считаем, что $V>0$ и $a'>0$. Решая уравнение (6'), получаем искомую зависимость $t'=t'(t)$:

$$t' = \frac{c}{a'\beta}\left(\sqrt{1 + \frac{2a'\beta}{\gamma c} t} - 1\right) = \frac{c^2}{a'V}\left(\sqrt{1 + \frac{2Va't}{\gamma c^2}} - 1\right) \qquad (6'')$$

(решение со знаком минус перед корнем квадратным даёт время t ненужного знака, – и это решение отброшено как «нефизическое»).

Далее можно поступать поразному. Для тех, кто знаком с формулой преобразования ускорения

$$a = \frac{(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 + Vu'/c^2)^3} a', \qquad (7)$$

или иначе, учитывая, что в нашем случае $u'=a't'$ и, соответственно,

$$a = \frac{(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 + Va't'/c^2)^3} a', \qquad (7')$$

можно рекомендовать такой путь: подставить (6″) непосредственно в (7′). В результате довольно быстро получаем искомую зависимость ускорения a в **не** штрихованной системе S от времени t (тоже **не** штрихованного):

$$a(t) = \frac{(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 + 2Va't/\gamma c^2)^{3/2}} a'. \qquad (8)$$

Далее интегрированием находим зависимости скорости и координаты от времени:

$$u(t) = \frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1 - V^2/c^2}{\sqrt{1 + 2Va't/\gamma c^2}}\right), \qquad (9)$$

$$x(t) = \frac{c^2}{V} t + \frac{c^4}{a'\gamma V^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Va't}{\gamma c^2}}\right) \qquad (10)$$

(здесь приняты во внимание начальные условия $u(t=0)=V$ и $x(0)=0$).

Для тех, кто ещё не знаком с формулой преобразования ускорения (7), есть путь несколько более длинный: подставить (6″) в формулу (1); в результате снова приходим к формуле (9), из которой дифференцированием получаем формулу (8), а интегрированием получаем формулу (10). Формулу (10) можно получить и без интегрирования – прямой подстановкой (6″) в формулу (5) и далее, как говорится, после не слишком приятных, но в принципе простых преобразований ...

Зависимости (8-10) полностью решают поставленную выше задачу. **Основной вывод** из них следующий: **если в какой-то одной ИСО тело движется с постоянным ускорением** ($u' = u'(t') = a't'$, $x'(t') = \frac{a't'^2}{2}$ **), то во всех других ИСО это движение будет более сложным**.

Полученные явные формулы (8-10) легко допускают как построение графиков, так и рассмотрение предельных случаев. Хотя зависимости (8-10) довольно сложны, соответствующие им графики не слишком интересны – никаких немонотонностей («резонансов») здесь не наблюдается (см. рис. 1-3).

По поводу предельных случаев скажем следующее. Естественное желание рассмотреть в формулах (8-10) случай $t \to \infty$ здесь вообще неосуществимо. Последнее обстоятельство связано с тем, что движение с *постоянным ускорением* $u' = a't'$ не может быть реализовано бесконечно долго (даже теоретически); существует очевидное ограничение на время t' в штрихованной системе

$$t' < c / a' \equiv t'_{max}, \qquad (11)$$

в течение которого ещё можно реализовать движение с *постоянным ускорением*.

Согласно (6′) и (11′) существует ограничение и на времена в **не** штрихованной системе:

$$t < t_{max} \equiv \frac{t'_{max} + Va't'^2_{max} / 2c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} = \frac{c + V/2}{a'\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad (12)$$

(его, кстати, необходимо учитывать, прежде чем «заставлять» компьютер строить графики).

Скажем ещё, что движение с *постоянным ускорением* $u' = a't'$ весьма непросто реализовать. Для этого нужно иметь силу, которая бы

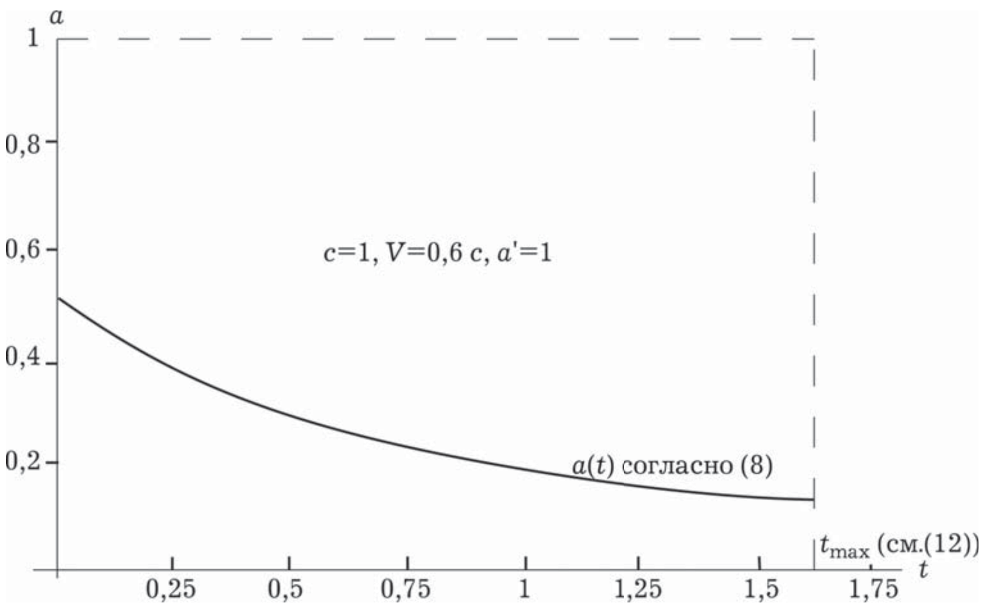

Рис. 1. Зависимость ускорения в не штрихованной инерциальной системе отсчёта от времени в этой ИСО

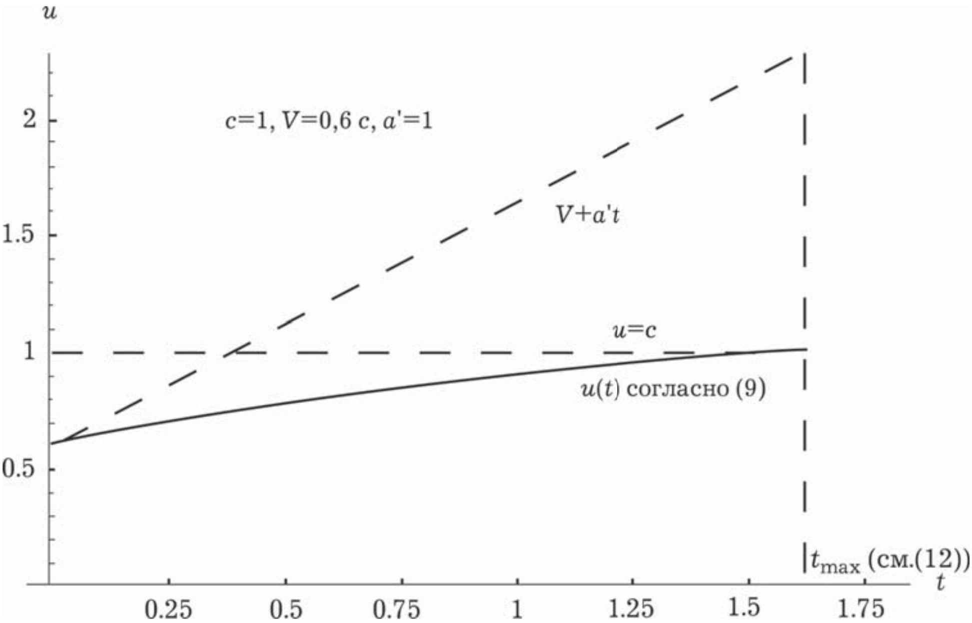

Рис. 2. Зависимость скорости в не штрихованной инерциальной системе отсчёта от времени в этой ИСО

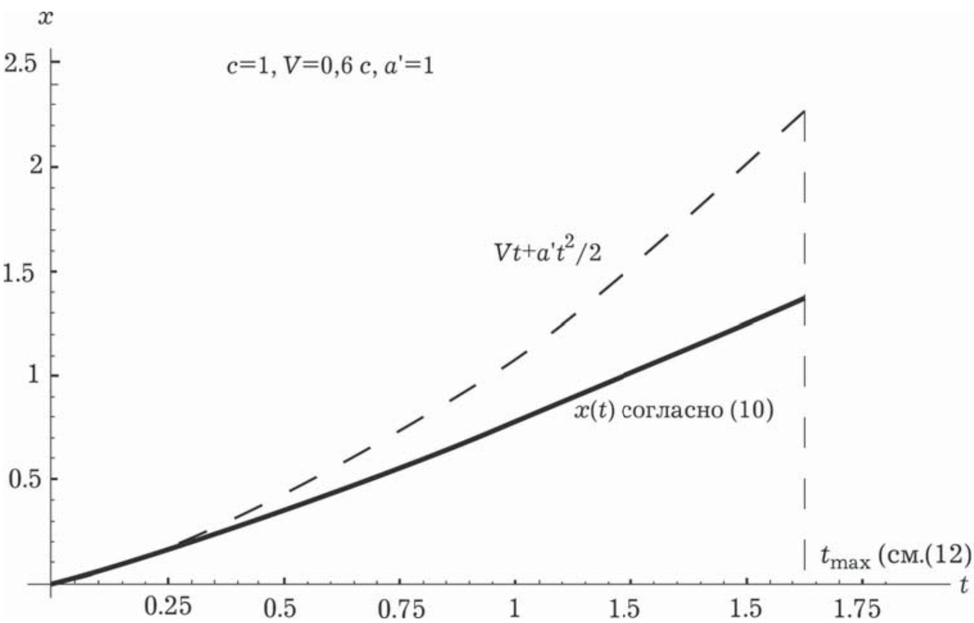

Рис. 3. Зависимость координаты в не штрихованной инерциальной системе отсчёта от времени в этой ИСО

обладала следующим свойством. Согласно основному уравнению динамики СТО

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{m_0 u'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}\right)=F', \qquad (13)$$

сила в штрихованной системе отсчёта должна весьма специфическим образом зависеть от времени:

$$F'(t')=\frac{m_0 a'}{(1-a'^2 t'^2/c^2)^{3/2}}, \qquad (13')$$

и при $t' \to t'_{\max} = c/a'$ эта сила должна стремиться к бесконечности.

Полезно с учащимися обсудить ещё вопрос: откуда взялись эти сложности, все эти **нелинейности**? Не ошибаемся ли мы? Ведь **преобразования Лоренца линейны.** В том ли всё дело, что мы рассмотрели «*нелинейный*» закон движения (2′)? Не совсем так: в механике Ньютона никаких нелинейностей при переходе от одной ИСО к другой не возникает. Всё дело в том, что мы сами, физики, интересуясь такими величинами, как скорость и ускорение, интересуемся **в СТО** некими **нелинейными** комбинациями координат и времени. Например, формулы

$x=\gamma(x'+Vt')$ и $t=\gamma(t'+(V/c^2)x')$)

пока ещё представляют собой **линейные** преобразования, но уже их простейшая комбинация x/t **не линейна** по координате и времени из-за «сложного» знаменателя в формуле:

$$\frac{x}{t}=\frac{x'+Vt'}{t'+(V/c^2)x'},$$

что, в конечном счёте, связано с тем, что $t' \neq t$. (Вспомним: все наши «неприятности» возникли как раз вследствие **нелинейности** закона сложения скоростей (1) по скорости u'.)

В заключение автор считает нужным сказать следующее. Он намеренно избегал в тексте термина **«равноускоренное движение**», говоря о **«движении с постоянным ускорением**». Дело в том, что в теории относительности под **равноускоренным** движением традиционно понимают немного другое, а именно:

- «*прямолинейное движение, при котором остаётся постоянной величина ускорения … <u>в собственной (в каждый момент времени) системе отсчета</u>*» (см. книгу Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [2], с. 39);
- «*равноускоренным движением в релятивисткой кинематике <u>естественно считать</u> такое движение, для которого ускорение постоянно имеет одно и то же значение … <u>в сопутствующей</u> телу в данный момент времени …* (инерциальной) *системе координат*» (цитата – из книги В. Паули [3], с. 113).

Такое движение в теории относительности называют еще *гиперболическим*. Примером *гиперболического движения* является, например, движение электрона *в постоянном электрическом поле*, т.е. движение под действием **постоянной силы**. Гиперболическое движение, если только наблюдать за ним всё время в одной и той же ИСО (а не переходить непрерывно из одной сопутствующей телу ИСО в другую) **не есть движение с постоянным ускорением.**

Рассмотренный в настоящей статье вопрос о движении тела с **постоянным ускорением**, разумеется, представляет интерес чисто *методи-*

ческий. Впрочем, именно как *методический*, он кажется всё же не лишенным элемента сюрприза, подчёркивая отличия механики Ньютона от механики Эйнштейна, причём отличия не только формульные, но по сути дела.

Заинтересовавшихся изложенным автор отсылает к статье [4] (расширенному варианту данной статьи).

Литература

1. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология. – М.: Наука, 1974. – 529 с.

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, т. II, Теория поля. – 6-ое изд. – М.: Наука, 1973. – 504 с.

3. *Паули В.* Теория относительности. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 336 с.

4. *Лукьянов А.А., Иванов А.А.* О ускоренном движении тел с точки зрения наблюдателей в различных инерциальных системах отсчёта в специальной теории относительности. // Физическое образование в вузах, 2004, т. I, № 4, с. 17–26.

Каледоскоп Каледоскоп Каледоскоп

Беседа будущих знаменитостей

Когда семилетний Моцарт давал концерт во Франкфурте-на-Майне, к нему обратился мальчик лет четырнадцати:

– Как замечательно ты играешь! Мне никогда так не научиться.

– Отчего же. Попробуй. И если не получится, начни писать ноты.

– Да я пишу… Стихи

– Писать хорошие стихи, вероятно, ещё труднее, чем сочинять музыку.

– Да нет, совсем легко. Ты попробуй.

Собеседником Вольфганга Моцарта был Иоганн Вольфганг Гёте.

Из высказываний А. Эйнштейна

«Наука – это неустанная многовековая работа мысли».

«Если говорить честно…мне хотелось не только знать, как устроена природа (и как происходят природные явления), но и по возможности достичь цели, может быть утопической и дерзкой на вид, - узнать, почему природа является именно такой, а не другой».

«Цель учёного состоит в том, чтобы дать логически непротиворечивое описание природы. Логика для него означает то же, что законы пропорции для художника».

«В научном мышлении всегда присутствует элемент поэзии. Настоящая наука и настоящее искусство требуют однородного мыслительного процесса».