



Лукьянов Андрей Александрович

Кандидат физико-математических наук,
доцент, ведущий инженер Лаборатории по работе
с одаренными детьми МФТИ.

Вопросы на понимание и легкие задачи по физике.

2. Кинематика равноускоренного движения

Рассмотрено несколько нетрудных задач *по кинематике равноускоренного движения*. Большая их часть на понимание. Указано на некоторые типичные ошибки начинающих. Статья является продолжением статьи [1], посвященной кинематике кусочно-равномерного движения.

Прямолинейным равноускоренным (или **равномерно ускоренным**) движением материальной точки называется прямолинейное движение точки, при котором величина ускорения (направление его и модуль) всё время остаются неизменными. Пусть равноускоренное движение происходит вдоль оси x (вдоль двух других осей оно может быть другим, например равномерным); основные расчётные формулы будут такими:

– для проекции скорости на ось x :

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t, \quad (1)$$

где $v_{x0} = v_x(0)$ – проекция скорости точки на ось x в начальный момент времени $t = 0$);

– для координаты

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad (2)$$

где $x_0 = x(0)$ – значение координаты точки в начальный момент времени $t = 0$.

Сами величины x , x_0 , v_x , v_{x0} и a_x могут иметь разные знаки в зависимости от конкретного выбора направления оси x и выбора нуля

($x=0$). Например, камень бросают вертикально вверх со скоростью 15 м/с с балкона дома, находящегося на высоте 20 м над поверхностью земли. При выборе направления оси x вертикально вверх и выборе нуля оси $x=0$ на поверхности земли (в данном месте! – не в другом квартале) уравнение (2) запишется в виде

$$x(t) = 20 + 15t - \frac{10t^2}{2} \quad (2a)$$

При этом учтено, что ускорение свободного падения направлено вниз и равно приблизительно $a_x = -g \approx -10 \text{ м/с}^2$. Но мы могли выбрать направление оси и другим, в прямо противоположном направлении (вертикально вниз). И ноль оси могли выбрать иначе, например, совместив ноль с уровнем балкона. Тогда уравнение (2) примет вид

$$x(t) = 0 - 15t + \frac{10t^2}{2} = -15t + \frac{10t^2}{2} \quad (2б)$$

Начиная изучать физику иногда кажется странным, что уравнения (2a) и (2б), описывающие одно и то же движение одного и того же камня, столь не похожи друг на друга. Все же оба они одинаково правильны (см. ниже задачу 8).

Величину t в уравнениях (1)–(2) часто считают положительной, хотя это и не обязательно. Например, мы можем интересоваться, как двигалось тело в моменты времени предшествующие моменту пуска часов ($t=0$); всем им соответствует время $t < 0$.

Если нас совсем не интересует движение точки вдоль других координатных осей (y и z), то формулы пишут в упрощённом виде – опуская индексы:

$$v(t) = v_0 + at, \quad (1')$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (2')$$

Кроме формул (1) – (2) часто бывает полезна и третья формула:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0), \quad (3)$$

которая может быть получена из двух предыдущих (убедитесь в этом самостоятельно).

Теперь – несколько задач. Большинство из них несложные, может быть, кроме последней. Нумерация формул в разных задачах независимая.

1. Известно, что ускорение измеряется в единицах м/с². Автомобилистам часто удобнее изменять ускорение в единицах (км/ч)/с. Например, ускорение 12 (км/ч)/с означает, что скорость каждую секунду увеличивается на 12 км/ч. Выразите ускорение 12 (км/ч)/с в единицах м/с².

Решение.

$$a = 12 \frac{\text{км/ч}}{\text{с}} = 12 \frac{1000 \text{ м} / (3600 \text{ с})}{\text{с}} = \frac{12}{3,6} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 3,3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

2. Автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч по сухому асфальту горизонтальной дороги, резко тормозит, после чего до полной остановки едет «юзом». Трение между покрышками автомобиля и дорогой обеспечивает ускорение 6 м/с². Найти время движения автомобиля до остановки.

Решение. В качестве материальной точки можно взять какую-нибудь точку, например, бампера машины. Направление оси x счита-



ем совпадающим с направлением движения. При этом скорость будет неотрицательна, а ускорение, наоборот, отрицательным. С учётом знаков имеем:

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - |a|t.$$

В момент остановки ($t = \tau$) скорость автомобиля обращается в нуль:

$$v(\tau) = v_0 - |a|\tau = 0.$$

Отсюда находим

$$\tau = v_0 / |a| = \frac{(60 / 3,6) \text{ м / с}}{6 \text{ м / с}^2} \approx 2,8 \text{ с}$$

3. (Домашнее задание) Во сколько раз больше было бы время движения автомобиля до остановки, если бы его скорость перед началом торможения была в 2 раза больше, чем в предыдущей задаче?

Ответ. В 2 раза.

4. Автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч по мокрому асфальту горизонтальной дороги, резко тормозит. Трение между покрышками автомобиля и дорогой обеспечивает ускорение 4 м/с^2 . Найти тормозной путь автомобиля.

Решение. В задаче не спрашивается, как с течением времени изменялись скорость автомобиля и его координата. Поэтому естественно воспользоваться формулой (3) теоретической части статьи:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) = -2|a|(x - x_0). \quad (1)$$

В момент остановки скорость автомобиля обращается в нуль: $v = 0$. Разность координат в этот момент даёт тормозной путь: $x - x_0 = S$, так

что имеем: $-v_0^2 = -2|a|S$, откуда на-

ходим $S = \frac{v_0^2}{2|a|} \approx 35 \text{ м}$.

5. (Домашнее задание) Во сколько раз больше был бы тормозной путь автомобиля, если бы его скорость перед началом торможения была в 2 раза больше, чем в предыдущей задаче?

Ответ. В 4 раза. (Сравнить с ответом задачи 3.)

6. Поезд начинает движение из состояния покоя и движется равноускоренно. На первом километре скорость поезда возросла на 36 км/ч. На сколько возрастёт его скорость на втором километре?



Решение. Введем обозначения: $v_0 = 0$ — начальная скорость поезда, v_1 и v_2 — скорость поезда (например, головной его части) в конце 1-го и в конце 2-го километров, $S_1 = S_2 = S = 1 \text{ км}$. В условии задачи ничего не говорится о времени движения, поэтому естественно воспользоваться формулой (3) теоретической части, в которую время совсем не входит. Для двух отрезков пути имеем:

$$\begin{cases} v_1^2 - 0^2 = 2aS, \\ v_2^2 - v_1^2 = 2aS. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $v_2^2 - 2v_1^2 = 0$, откуда находим $v_2 = \sqrt{2}v_1$. Тогда для приращения скорости получаем:

$$\Delta v_2 = v_2 - v_1 = (\sqrt{2} - 1)v_1 = (\sqrt{2} - 1)\Delta v_1 \approx 15 \text{ км/ч.}$$

Заметим, что в данной задаче не было необходимости переходить к единицам системы СИ (выражать скорость в м/с).

7. Камень, брошенный вертикально вверх, упал на землю через 3 с. С какой скоростью был брошен камень? Какой максимальной высоты достиг камень? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Направим ось x вертикально вверх и начало координат ($x = 0$) выберем на поверхности земли. Уравнения (1)–(2) теоретической части примут вид:

$$v(t) = v_0 - gt \quad (1)$$

$$x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

При этом учтено, что $a_x = -g$, где g – ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли, $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$, или приближённо $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$, или даже $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Какое приближенное значение брать, зависит от точности, с какой нам нужно получить ответ.

Заметим, что формулы (1)–(2) описывают оба этапа движения камня – и вверх, и вниз. Нет никакой нужды записывать отдельно уравнения движения для каждого этапа.

Время подъёма на максимальную высоту t_1 определяется из условия, что в этот момент скорость обращается в нуль:

$$v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0 \quad (1')$$

Отсюда по известной начальной скорости мы могли бы найти время подъёма на максимальную высоту

$$t_1 = v_0 / g. \quad (3)$$

Начальная скорость нам, однако, не известна; она сама подлежит определению в задаче. Для этого воспользуемся уравнением (2) и условием, что в момент падения ($t_2 = 3 \text{ с}$) обращается в нуль координата:

$$x(t_2) = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0. \quad (3')$$

Отсюда по известной начальной скорости мы могли бы найти время t_2 :

$$t_2 \left(v_0 - \frac{gt_2}{2} \right) = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $t_2 = 0$ и

$$t_2 = 2v_0 / g. \quad (4)$$

Первый корень не бессмыслен, но нас не интересует: он отражает тот факт, что камень был подброшен вверх в момент времени $t = 0$ (в этот момент его x -координата тоже равнялась нулю). Второй корень нам поможет. Сравнивая (3) и (4), видим, что время подъёма в два раза меньше полного времени движения t_2 (включающего в себя время подъёма и время падения):

$$t_1 = t_2 / 2. \quad (5)$$

(Это есть следствие пренебрежения сопротивлением воздуха!) Тогда по формуле (3) находим

$$v_0 = gt_1 = gt_2 / 2 \approx 15 \text{ м/с.}$$

Максимальная высота подъёма определяется либо по формуле (2):

$$h_{\max} = x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = gt_1 \cdot t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{g}{2} \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 = \frac{gt_2^2}{8} \approx 11 \text{ м;}$$

либо иначе – по формуле (3) теоретической части, если положить конечную скорость (в высшей точке) равной нулю ($v = 0$):



$$0 - v_0^2 = -2gh_{\max} \Rightarrow \\ \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{gt_2}{2} \right)^2 = \frac{gt_2^2}{8}.$$

8. Мяч, брошенный с балкона вертикально вверх с некоторой начальной скоростью v_0 , упал на землю через $T=4$ с. Балкон находится на высоте $h=20$ м над землей. Определить v_0 . Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения положить равным $g \approx 10$ м/с².

Решение. Решим задачу, делая разный выбор направления оси и нуля оси. Сначала направим ось x вертикально вверх и нуль совместим с поверхностью земли (рис.1). При этом начальная координата мяча будет равна высоте, на которой находится балкон: $x_0 = h = 20$ м; начальная скорость мяча направлена **по** направлению оси, поэтому $v_{x0} = v_0$, а ускорение $a_x = -g = -10$ м/с². Уравнение (2') примет вид:

$$x(t) = 20 + v_0 t - \frac{10t^2}{2}. \quad (1)$$

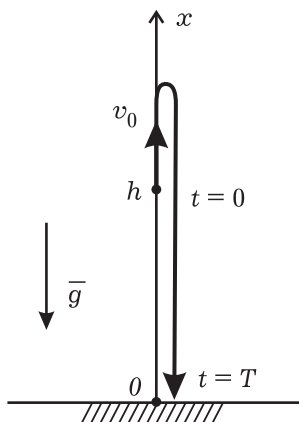


Рис. 1

В момент времени $t=T=4$ с координата мяча обратится в нуль: $x(T) = x(4) = 0$ (в этот момент времени мяч коснется поверхности земли). Тогда согласно (1) получаем уравнение для нахождения v_0 :

$$0 = 20 + v_0 \cdot 4 - \frac{10 \cdot 4^2}{2}.$$

Оно без труда решается: $v_0 = 15$ м/с.

Направим теперь ось x вертикально вниз и совместим нуль оси с точкой вылета мяча с балкона (рис.2). При этом $v_{x0} = -v_0$ (саму величину v_0 считаем положительной), а ускорение $a_x = g = 10$ м/с². Уравнение (2') в этом случае примет вид:

$$x(t) = 0 - v_0 t + \frac{10t^2}{2}. \quad (2)$$

В момент времени $t=T=4$ с координата мяча будет равна расстоянию от балкона до земли, т.е.

$$x(T=4) = h = 20 = -v_0 \cdot 4 + \frac{10 \cdot 4^2}{2},$$

откуда снова получаем $v_0 = 15$ м/с.

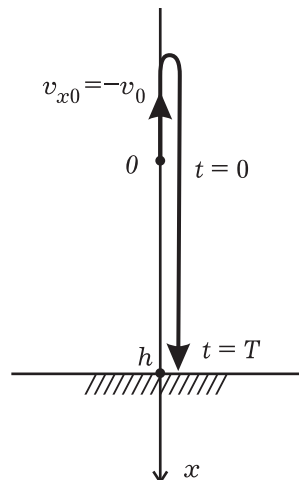


Рис. 2

Обратим внимание на то, что в обоих случаях не было необходимости поэтапного рассмотрения движения мяча – сначала вверх, а потом вниз. Уравнение (2) (как и уравнение (1)) теоретической части справедливо одновременно для обоих этапов.

9. Самостоятельно решите задачу при выборе оси, как показано на рис. 3.

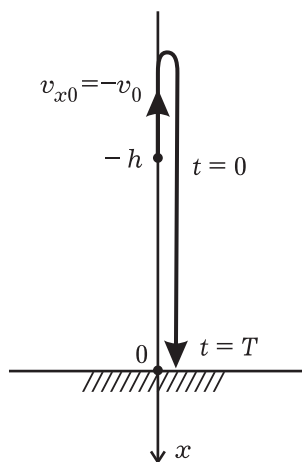


Рис. 3

10. Камень падает вблизи поверхности Земли без начальной скорости. Какой путь пролетит камень: 1) за первые 3 секунды падения и 2) за 3-ю секунду падения? Во сколько раз первый путь больше второго? Спротивлением воздуха пренебречь. $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Решение. В условии имеется подсказка: рядом стоят два похожих, но разных вопроса – о первых **трёх секундах** падения камня и о **третьей секунде**. На экзамене такой подсказки, скорее всего не будет, поэтому надо быть внимательным и находить именно то, о чём спрашивают.

Путь, «пройденный» камнем за первые три секунды найдем по формуле:

$$x(3) = \frac{g \cdot 3^2}{2} \approx \frac{9,8 \cdot 3^2}{2} \approx 44 \text{ м.} \quad (1)$$

Неправильным было бы думать, что в ответе можно оставлять три значащих цифры, т.е. 44,1 м. Даже если предположить, что время (3 секунды) измерено с очень высокой точностью (например, на самом деле мы имели 3,000 сек – с четырьмя значащими цифрами), тем не менее, значение ускорения свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ нам известно лишь с двумя значащими цифрами. Не больше значащих цифр должно быть и в ответе (см. (1)).

Путь, который пролетит камень за третью секунду, найдём как разность двух путей – того, который камень пролетит за 3 секунды, и того, который он пролетит за две секунды, предшествующие последней, 3-й, секунде:

$$\begin{aligned} \Delta x(3) &= x(3) - x(2) = \\ &= \frac{g \cdot 3^2}{2} - \frac{g \cdot 2^2}{2} = \frac{g \cdot (3^2 - 2^2)}{2} = 24,5 \text{ м.} \quad (2) \end{aligned}$$

Строго говоря, и здесь мы должны провести округление. Сколько значащих цифр оставить в ответе в данном случае не так ясно, как в случае формулы (1), т.к. кроме умножений, делений и возведений в степень, в формуле (2) имеется разность двух величин. Самый простой способ решить проблему – вычислить $\Delta x(3) = \frac{g \cdot (3^2 - 2^2)}{2}$, взяв в качестве $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ с тремя значащими цифрами. При этом получаем $\Delta x(3) = 24,525 \approx 24,5 \text{ м}$.

$$\text{Наконец, } \frac{x(3)}{\Delta x(3)} = \frac{3^2}{3^2 - 2^2} = 1,8.$$



11. (Домашнее задание) Камень падает без начальной скорости. За какое время он пролетит: а) первые 3 м пути и б) 3-й метр пути? в) Во сколько раз первое время больше второго? Сопротивлением воздуха пренебречь. $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Ответ. а) $t(3\text{м}) = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{g}} \approx 0,782 \text{ с};$

б) $\Delta t(3\text{-й м}) = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{g}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{g}} \approx 0,144 \text{ с};$

в) 5,45 раз.

12. (*) Мировой рекорд в беге на 100 м составляет 9,58 с (Усейн Болт, 16.08.2009). При этом на разгон спортсменом тратится лишь несколько первых секунд, после чего движение становится приближённо равномерным. Считая движение в первые секунды движением с постоянным ускорением, равным $4,1 \text{ м/с}^2$, определите: 1) время разгона спортсмена, 2) расстояние, затрачиваемое на разгон, и 3) скорость равномерного бега.

Решение. Пусть $S = 100 \text{ м}$, $T \approx 9,6 \text{ с}$, $a = 4,1 \text{ м/с}^2$, τ – время разгона. Тогда имеем:

$$S = \frac{a\tau^2}{2} + v(T - \tau) = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau(T - \tau) = aT\tau - \frac{a\tau^2}{2},$$

или

$$\tau^2 - 2T\tau + \frac{2S}{a} = 0. \quad (1)$$

Решая это уравнение, находим:

$$\tau = T - \sqrt{T^2 - 2S/a} \approx 9,6 - 6,6 = 3,0 \text{ с} \\ (\approx 31\% \text{ от } T = 9,6 \text{ с}).$$

Второй корень квадратного уравнения $\tau = T + \sqrt{T^2 - 2S/a}$ не подходит, т.к. время разгона τ есть лишь часть общего времени бега T , поэтому не может быть больше последнего.

Путь, затрачиваемый спортсменом на разгон:

$$S = \frac{a\tau^2}{2} = 18,6 \approx 19 \text{ м (19\% от 100 м)}.$$

Скорость равномерного движения:

$$v = a\tau \approx 12 \text{ м/с} \approx 44 \text{ км/ч}.$$

Литература

1. Лукьянов А.А. Вопросы на понимание и легкие задачи по физике. 1. Кинематика. // Потенциал, 2018, №10, с. 39-42.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

В гостинице, куда поселились инженер, математик и физик, возник пожар. Инженер выбегает в коридор, видит на стене пожарный шланг, хватается его, открывает воду и заливает очаг возгорания.

Физик, быстро прикинув объем горючих веществ, температуру пламени, теплоемкость воды и пара, атмосферное давление и т.п., наливает в стакан из графина строго определенное количество воды и заливает огонь этой водой.

Математик высказывает в коридор, видит на стене огнетушитель, и, обрадовано воскликнув: «Решение существует!», спокойно возвращается в номер...