Мукушев Базарбек Агзашулы
Доктор педагогических наук, профессор кафедры физики и информатики Семипалатинского государственного педагогического института, обладатель государственного гранта Республики Казахстан «Лучший преподаватель вуза – 2007».

Вывод формулы закона всемирного тяготения из законов Кеплера

Закон всемирного тяготения открыт благодаря кропотливому труду Исаака Ньютона. Однако в школьном учебнике физики мы изучаем красивую, в то же время кажущуюся «простой» формулу этого закона. В учебнике не обнаруживается долгий научный поиск великого учёного, и невозможно узнать, какие научные предпосылки помогли учёному открыть этот вселенский закон природы. С целью восполнить данный пробел школьного учебника физики нами была написана эта статья.

Статья предназначена ученикам старших классов физико-математического профиля.

Введение

На основе анализа данных многолетнего астрономического наблюдения датского астронома Тихо Браге, немецкий учёный Иоганн Кеплер в начале XVII века эмпирическим путём установил кинематические законы движения планет – так называемые законы Кеплера.

Первый закон Кеплера: каждая планета Солнечной системы движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Второй закон Кеплера: каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади.

Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет. Справедливо не только для планет, но и для их спутников:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

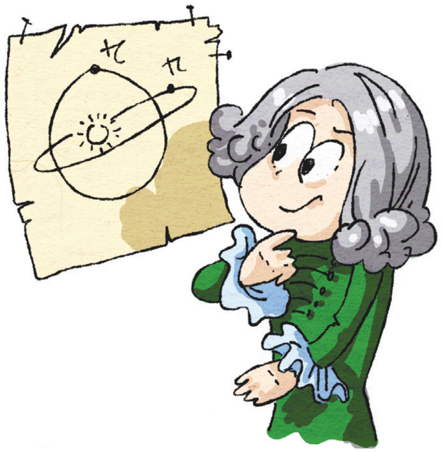
где T_1 и T_2 – периоды обращения двух планет вокруг Солнца, a_1 и a_2 –

длины больших полуосей их орбит.

Все небесные тела – планеты и их спутники, астероиды, кометы, а также различные космические аппараты, – движутся по кеплеровским законам.

1. «Математические начала натуральной философии» о взаимном притяжении планет

Хотя открытие Кеплером трёх законов движения планет и создало прочный фундамент системы мира Коперника, оставалась неясной причина, вследствие которой планеты движутся вокруг Солнца по замкнутым орбитам, не удаляясь от него.



Многочисленные попытки учёных установить эту причину не увенчались успехом, их идеи, хотя и были довольно близкими к истине, не имели строгого научного обоснования. Такое обоснование было дано великим английским учёным Исааком Ньютоном, опубликовавшим в 1687 г. своё знаменитое сочинение «Математические начала натуральной философии». В третьей книге «Начал» была сформулирована теорема: «Силы, которыми главные планеты постоянно отклоняются от прямолинейного движения и удерживаются на своих орбитах, направлены к Солнцу и обратно пропорциональны квадратам расстояния от его центра». Справедливость этой теоремы была доказана Ньютоном строго математически на основании трёх законов Кеплера. Однако помимо доказательства этой теоремы, Ньютон поставил перед собой другую задачу – показать, что природа силы, удерживающей планеты на их орбитах, тождественна природе действующей на земной поверхности силы тяжести, что дало бы ему право утверждать о существовании силы взаимного притяжения между всеми существующими телами. Именно это доказательство тождественности силы земного притяжения силе, удерживающей Луну на её орбите, нашло отражение в школьном учебнике по физике.

Ньютоновское доказательство справедливости закона всемирного тяготения, изложенное в его труде «Математические начала натуральной философии», трудно поддаётся пониманию современного школьника, так как научный стиль великого учёного, жившего в середине XVII века, сильно отличается от сегодняшних правил изложения научных фактов. В связи с этим мы будем излагать ньютоновскую трактовку справедливости вывода закона всемирного тяготения, используя доступный для школьников математический аппарат.

2. Основные характеристики полярной системы координат

По первому закону Кеплера орбитой планеты является эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Для наглядного представления первого закона Кеплера удобна полярная система координат.

Приведём основные характеристики эллипса, находящегося в полярной системе координат.

Если полюс и полярная ось совпадают соответственно с началом O и осью Ox прямоугольной системы координат (рис. 1), то при условии, что для измерения r, x, y использованы равные единицы масштаба, декартовы и полярные координаты связаны следующими формулами преобразования:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},\ x \neq 0.$$

Следовательно, точка M имеет полярные координаты r и φ.

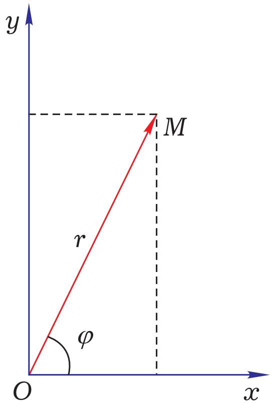


Рис. 1

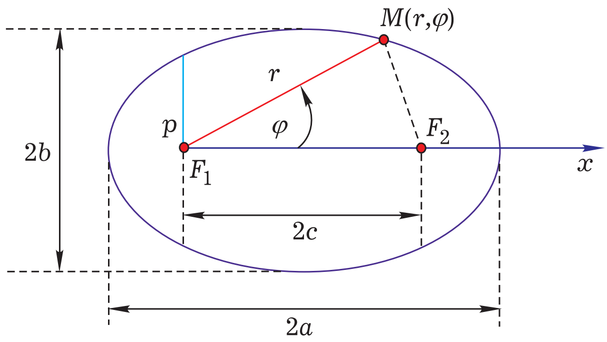


Рис. 2

Если принять фокус эллипса за полюс, а большую ось – за полярную ось, то уравнение эллипса в полярных координатах (r, φ) будет иметь вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где a – большая полуось, b – малая полуось, c – фокальный радиус (полурасстояние между фокусами), p – фокальный параметр, $a^2 = b^2 + c^2$,

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\ \ (0 \le e < 1),\ \ p = \frac{b^2}{a}$$

(рис. 2).

Выберем полярную систему координат так, чтобы её плоскостью являлась плоскость эллиптической орбиты планеты, её полюс находился бы в том из фокусов эллипса, в котором находится Солнце, и чтобы полярная ось была направлена вдоль большой оси эллипса. Тогда первый закон Кеплера может быть аналитически выражен формулой:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{1}$$

где r – полярный радиус, φ – полярный угол, e – эксцентриситет эллипса и p – его параметр.

3. Вывод формулы закона всемирного тяготения

Введём понятие секториальной скорости точки. Секториальной скоростью точки по отношению к какому-либо полюсу называется скалярная величина

$$\varepsilon = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{2} rv\sin(\vec{r},\ \vec{v}),$$

где $\vec{r}$, $\vec{v}$ – радиус-вектор и скорость точки, r, v – модули этих векторов. Если движение точки происходит в плоскости, а полюс совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат xOy, взятой на этой плоскости, то

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(xv_y - yv_x) = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}.$$

Таким образом, секториальная скорость численно равна площади, описываемой полярным радиусом движущейся точки в единицу времени.

Второй закон Кеплера (закон площадей) можно выразить формулой

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = const = A. \qquad (2)$$

Постоянная A в формуле (2) представляет собой удвоенную секториальную скорость, постоянную для данной планеты.

Третий закон Кеплера может быть выражен формулой

$$\frac{a^3}{T^2} = const = B, \qquad (3)$$

где a – большая полуось эллипса, T – период обращения планеты вокруг Солнца, B – общая постоянная для всех планет. Напишем дифференциальное уравнение, показывающее, что приращение кинетической энергии равно работе силы:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fdr, \qquad (4)$$

где v – линейная скорость планеты, m – её масса, F – сила, действующая на планету по направлению к Солнцу.

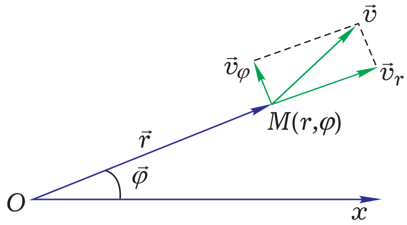


Рис. 3

Материальная точка M движется в полярной системе координат со скоростью $\vec{v}$. В случае плоского движения, заданного в полярных координатах, скорость $\vec{v}$ точки $M(r, \varphi)$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие – радиальную скорость $\vec{v}_r$ и трансверсальную скорость $\vec{v}_\varphi$ (рис. 3): $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$, причём $v_r = \frac{dr}{dt}$ и $v_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}r$. Таким образом, квадрат скорости в полярных координатах выражается формулой

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right) + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

вследствие чего дифференциальное уравнение (4) может быть представлено в виде:

$$\frac{m}{2}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right) + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = F\frac{dr}{d\varphi}. \qquad (5)$$

Но из формулы (2) следует, что $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2}$ и $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -A\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$. Откуда находим

$$\frac{mA^2}{2}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = F\frac{dr}{d\varphi}.$$

Продифференцировав левую часть этого уравнения, получаем (после сокращения на $\frac{dr}{d\varphi}$):

$$-\frac{mA^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = F. \qquad (6)$$

Из формулы (1) получаем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi,$$

откуда следует, что

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\cos\varphi.$$

Вследствие этого равенство (6) можно записать так:

$$-\frac{mA^2}{pr^2} = F. \qquad (7)$$

Мы получили выражение силы, действующей на планету. Эта сила притягивающая, так как она направлена к началу координат (т. е. к Солнцу), на что указывает знак минус (рис. 4). Кроме того, она обратно пропорциональна квадрату расстояния планеты от Солнца.

Рис. 4

Введём обозначение:

$$\frac{A^2}{p} = \beta. \qquad (8)$$

Тогда вместо формулы (7) получим:

$$F = -\beta\frac{m}{r^2}. \qquad (9)$$

Докажем, что коэффициент β один и тот же для всех планет Солнечной системы. Так как площадь эллипса равна πab, то

$$A = 2\cdot\frac{\pi ab}{T}$$

вследствие того что A – удвоенная секториальная скорость. Известно, что $p = \frac{b^2}{a}$. Подставляя выражения для A и p в формулу (8), получаем:

$$\beta = 4\pi^2\cdot\frac{a^3}{T^2} = 4\pi^2 B. \qquad (10)$$

Коэффициент β, входящий в формулу (9), имеет величину, одинаковую для всех планет. Это позволяет утверждать, что сила F, действующая на планету, пропорциональна массе планеты и обратно пропорциональна квадрату расстояния планеты от Солнца.

По третьему закону Ньютона сила действия Солнца на планету равна по величине и противоположна по направлению силе действия планеты на Солнце. Обозначим последнюю силу $F' = \beta'\frac{M}{r^2}$, где M – масса Солнца. Поскольку $F = -F'$, то

$$\beta\frac{m}{r^2} = \beta'\frac{M}{r^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\beta}{M} = \frac{\beta'}{m} = G,$$

где G – величина постоянная. Очевидно, $\beta = GM$, после чего формулу (9) мы можем переписать в виде

$$F = -G\frac{mM}{r^2}. \qquad (11)$$

Это и есть окончательная формула закона всемирного тяготения. Константа G называется гравитационной постоянной. В системе СИ

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{н·м}^2/\text{кг}^2.$$

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Блиц-ответы

– Что представляет собой молния?
– Бесплатное электричество.

* * *

– Почему молния не ударяет дважды в одно и то же место?
– Потому что после первого удара то место уже не существует.