Прохоров Вадим Константинович
Учитель физики
ГБОУ «Школа № 1526 на Покровской» г. Москва.

Вышел в поле заряд…
Часть 2.
Поле магнитное

На точечный заряд, движущийся в магнитном поле действует сила, которую называют силой Лоренца. Если частица заряд которой равен q движется со скоростью V в однородном магнитном поле индукции B, модуль силы Лоренца определяется формулой:

$$F_Л = |q| VB \sin\alpha. \qquad \text{(I)}$$

Здесь $\alpha = \left(\widehat{\vec{V},\vec{B}}\right)$ – угол между векторами $\vec{V}$ и $\vec{B}$. Направление силы Лоренца *для положительно заряженной частицы* определяется следующим образом (в школьном курсе физики эти утверждения объединены в правило левой руки):

- вектор $\vec{F}_Л$ всегда перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы скорости $\vec{V}$ и магнитной индукции $\vec{B}$. Т. е. одновременно выполняются условия: $\vec{F}_Л \perp \vec{V}$ и $\vec{F}_Л \perp \vec{B}$
- с острия вектора $\vec{F}_Л$ кратчайший поворот от вектора $\vec{V}$ к вектору $\vec{B}$ должен наблюдаться *против часовой стрелки.*

Сила Лоренца перпендикулярна скорости и поэтому ее работа всегда равна нулю и, следовательно, она не может изменить кинетическую энергию частицы.

Если на частицу действует только сила Лоренца и $\alpha = 90°$, то частица движется по дуге окружности с постоянной по модулю скоростью (рис. 1).

Запишем второй закон Ньютона для частицы:

$$ma_n = F_Л.$$

Учитывая (I) и то, что ускорение является центростремительным, получим:

$$\frac{mV^2}{R} = |q| VB. \qquad \text{(II)}$$

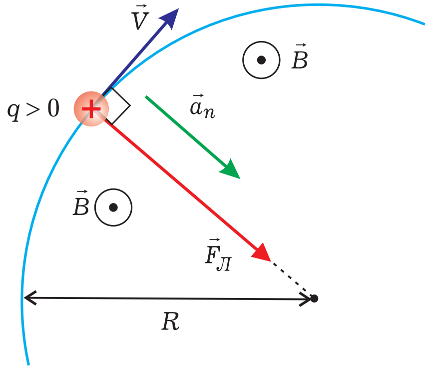

Рис. 1.
Изображены направления силы Лоренца, векторов магнитной индукции, скорости и ускорения движущейся в магнитном поле положительной заряженной частицы.

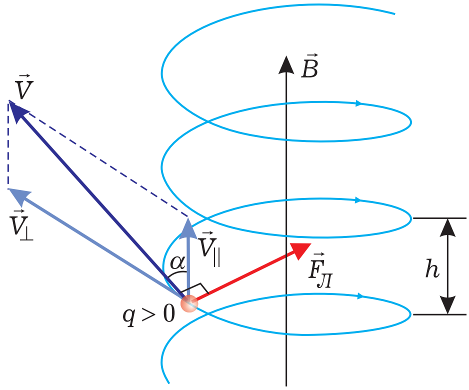

Рис. 2
Положительно заряженная частица влетела в магнитное поле под углом $\alpha(0 < \alpha < 90°)$.

Из него следует, что радиус этой окружности равен:

$$R = \frac{mV}{|q|B}. \qquad \text{(III)}$$

Его называют *ларморовским радиусом*. Учитывая, что $V = \omega R$ из (II) получим выражение для угловой скорости вращения частицы (*циклотронной частоты*):

$$\omega = \frac{|q|B}{m}. \qquad \text{(IV)}$$

Период такого вращения:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B}. \qquad \text{(V)}$$

Если угол между векторами скорости и индукцией не равен нулю $(\alpha \neq 0)$, то траектория частицы представляет собой винтовую линию, «навитую» на линии индукции поля (рис 2). Движение частицы в этом случае представляет собой суперпозицию двух движений: движение по окружности вокруг линии индукции и равномерное движение вдоль этих линий.

Вектор скорости частицы можно представить как сумму двух составляющих: $\vec{V}_\parallel$ и $\vec{V}_\perp$ (соответственно параллельная и перпендикулярная вектору индукция $\vec{B}$). Из рисунка 2 видно, что: $V_\parallel = V\cos\alpha$, $V_\perp = V\sin\alpha$. Тогда радиус винтовой линии (ларморовский радиус) равен:

$$R = \frac{mV_\perp}{qB} = \frac{mV\sin\alpha}{qB}. \qquad \text{(VI)}$$

Еще один параметр траектории – шаг винтовой линии h – расстояние, на которое переместилась частица вдоль линий магнитного поля за время, равное одному периоду вращения (рис 2):

$$h = V_\parallel T = \frac{2\pi mV\cos\alpha}{|q|B}. \qquad \text{(VII)}$$

Примеры решения задач.

Задача 1. (ЕГЭ, 2012 г.)

Заряженная частица ускоряется постоянным электрическим полем конденсатора, напряжение на обкладках которого 1280 В. Затем она влетает в однородное магнитное полеле, модуль вектора магнитной индукции которого равен 200 мкТл, и движется по дуге окружности радиусом 60 см в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции. Определите по этим данным отношение заряда частицы к её массе (удельный заряд).

Решение.

Будем считать, что начальная скорость частицы в электрическом поле равна нулю. Тогда кинетическая энергия, которую приобретает частица, разгоняясь в электрическом поле, равна работе силы, действующей на частицу со стороны этого поля:

$$qU = \frac{mV^2}{2}.$$

Далее запишем формулу (III):

$$R = \frac{mV}{qB}.$$

Исключая скорость V из этих двух уравнений, получим выражение для искомого удельного заряда:

$$\frac{q}{m} = \frac{2U}{B^2R^2}.$$

Ответ: $1{,}78 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Задача 2. («Физтех», 2016 г.)

Частица массой $m = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл пролетает область однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}03$ Тл, изменив направление своего движения на угол $\alpha = 0{,}8$ рад (рис. 3). Начальная скорость частицы перпендикулярна границе поля и силовым линиям поля.

1) Найти отношение скорости V при вылете из поля к скорости V_0 при влёте в поле. Дать объяснение.

2) Найти время пролёта частицы через магнитное поле.

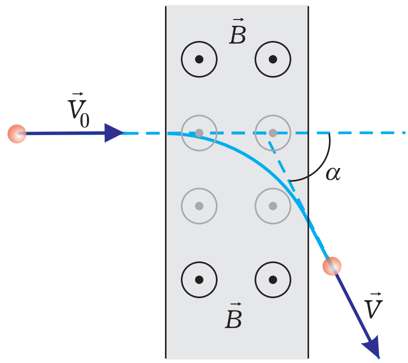

Рис. 3

Решение.

1) Ответ на первый вопрос очевиден: на частицу действует только сила Лоренца, которая всегда перпендикулярна скорости, и ее работа при любом движении равна нулю. Следовательно, кинетическая энергия частицы остается постоянной и модуль скорости тоже: $\frac{V}{V_0} = 1.$

2) Для ответа на второй вопрос воспользуемся определением угловой скорости:

$$\omega = \frac{\alpha}{\tau}.$$

ω – угловая скорость вращения частицы в магнитном поле (циклотронная частота). Используя формулу (IV), получаем:

$$\frac{|q|B}{m} = \frac{\alpha}{\tau}.$$

Откуда получаем:

$$\tau = \frac{m\alpha}{|q|B} = 550 \text{ нм}.$$

Ответ: 1) 1; 2) 550 нм.

Задача 3. («Росатом», 2015)

В двух полупространствах созданы однородные магнитные поля с индукциями B_1 и B_2 ($B_2 = 2B_1$), векторы которых параллельны (рис. 4). Частица с зарядом $-q$ и массой m находится на границе раздела полей и имеет скорость V_0, направленную перпендикулярно границе раздела. Найти среднюю скорость смещения частицы вдоль границы раздела полей за большое время.

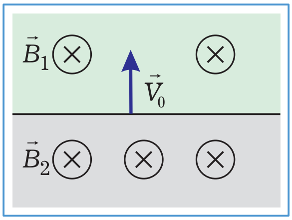

Рис. 4

Решение.

Траектория частицы изображена на рисунке 5. Влетая в область с индукцией B_1 перпендикулярно границе раздела в точке 1, описывает в этой области полуокружность вылетает из этой области в точке 2 и тут же влетает в область с магнитным полем индукции B_2. В этой области частица также движется по полуокружности. Радиусы кривизны в соответствие с формулой (III) различны и равны соответственно (так сила Лоренца не совершает работы – скорость частицы по модулю остается постоянной и равной V_0):

$$R_1 = \frac{mV_0}{|q|B_1},\ R_2 = \frac{mV_0}{|q|B_2}.$$

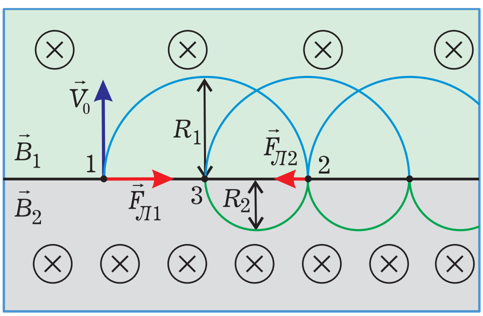

Рис. 5

В точке 3 частица вылетает из второй области, вновь попадает в первую область и все повторяется вновь. Время одного такого цикла – движения из точки 1 в точку 3 равно:

$$\tau = \pi\omega_1 + \pi\omega_2 = \pi(\omega_1 + \omega_2),$$

где $\omega_1 = \frac{|q|B_1}{m}$, $\omega_2 = \frac{|q|B_2}{m}$ – циклотронные частоты в полях B_1 и B_2 соответственно. Здесь учтено, что вектор скорости поворачивается на угол π в каждой области.

Перемещение за время τ равно:

$$s = 2R_1 - 2R_2 = 2(R_1 - R_2).$$

Тогда средняя скорость:

$$V_{ср} = \frac{s}{\tau} = \frac{2(R_1 - R_2)}{\pi(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Решая все эти уравнения и учитывая условие задачи получаем:

$$V_{ср} = \frac{2V_0}{3\pi}.$$

Ответ: $V_{ср} = 2V_0/3\pi$.

Задача 4. («Физтех», 2018 г.)

В область однородного магнитного поля с индукцией B = 1 Тл и шириной $L = 20\sqrt{3}$ см влетает со скоростью V = 1 мм/с положительно заряженный шарик очень малого радиуса с отношением заряда к массе $\gamma = q/m = 10^{-2}$ Кл/кг (рис. 6). Направление скорости перпендикуляр-

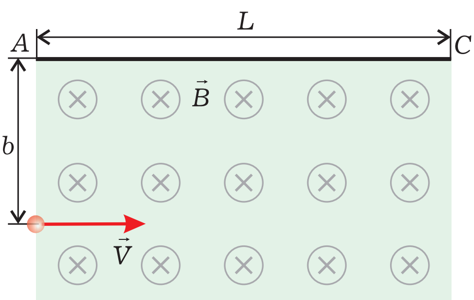

Рис. 6

но направлению магнитного поля и левой границе поля. На расстоянии $b = 15$ см от места, где шарик влетает в область магнитного поля, параллельно его начальной скорости и вектору индукции, располагается непроводящая стена AC.

1) Найдите радиус кривизны траектории шарика в поле.

2) Найдите угол между стеной и вектором скорости шарика непосредственно перед первым ударом.

3) Найдите время движения шарика в поле.

Удары шарика о стену считать абсолютно упругими. Силами сопротивления и силой тяжести пренебречь.

Решение.

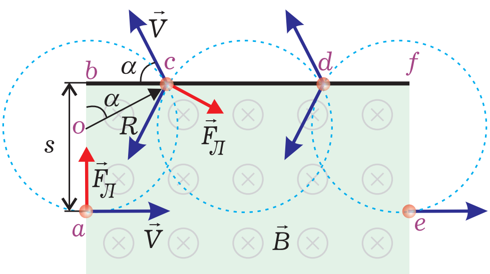

Рис. 7

Удары о стенку абсолютно упругие, поэтому скорость шарика по модулю остается все время постоянной и радиус кривизны, который в соответствие с (II) равен:

$$R=\frac{mV}{|q|B}=\frac{V}{\gamma B}=\frac{10^{-3}\ \text{м/с}}{10^{-2}\ \text{Кл/кг}\cdot 1\ \text{Тл}}=10\ \text{см}, \tag{1}$$

тоже остается постоянным. Примерная траектория изображена на рисунке 7. Она состоит из дуг окружностей одного и того же радиуса R, определяемого формулой (1). Далее пользуемся геометрическими соображениями.

Угол α находим из прямоугольного треугольника obc:

$$\cos\alpha=\frac{s-R}{R}=\frac{sB\gamma}{V}=0{,}5,\ \text{т. е. } \alpha=\pi/3.$$

Из этого же треугольника найдем расстояние от края стенки до точки первого удара $|bc|=R\cdot\sin\alpha=5\sqrt{3}$ см. Второй удар о стенку произойдет в точке d и скорость шарика перед вторым ударом также направлена под углом α. Очевидно, что $|cd|=2|bc|=10\sqrt{3}$ см. А тогда расстояние от точки второго удара до правого края стенки получается равным $|df|=5\sqrt{3}$ см. Таким образом, траектория симметрична относительно середины области магнитного поля, и шарик, после двух ударов о стенку, вылетает из этой области параллельно самому себе.

При движении из точки a в точку c вектор скорости поворачивается на угол $\varphi=\pi-\alpha$ и время движения из a в c равно:

$$\tau_0=\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi-\alpha}{\gamma B}=\frac{2\pi}{3\gamma B}.$$

Полное время пребывания шарика в поле равно

$$\tau=4\tau_0=\frac{8\pi}{3\gamma B}.$$

Ответ: 1) 10 см, 2) $60°$, 3) 837 с.

Интересны также задачи, в которых заряд движется под действием нескольких сил, включая силу Лоренца.

Задача 5. (ЕГЭ, 2012 г.)

В однородном магнитном поле, вектор индукции которого $\vec{B}$ направлен вертикально вниз, равномерно вращается в горизонтальной плоскости против часовой стрелки шарик массой m с отрицательным зарядом q, подвешенный на нити длиной L (конический маятник). Угол отклонения нити от вертикали α, скорость движения шарика V. Найдите индукцию магнитного поля. Сделайте схематический рисунок, указав силы, действующие на шарик.

Решение.

На заряженный шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила Лоренца $\vec{F}_Л$, сила натяжения нити $\vec{T}$ (рис. 8). Шарик движется по окружности – ускорение его является центростремительным. Сила Лоренца направлена от центра окружности. В этом нет ничего странного т. к. окружность сформирована не только силой Лоренца, но и другими силами. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на оси координат.

$$\frac{mV^2}{R} = T\sin\alpha - F_Л$$

$$0 = T\cos\alpha - mg$$

где $F_Л = qVB\sin 90°$

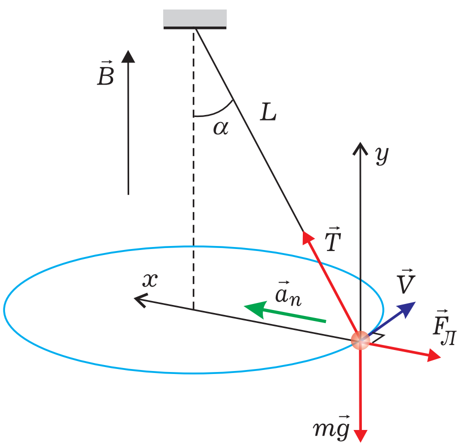

Рис. 8

Перепишем уравнения в виде:

$$T\sin\alpha = \frac{mV^2}{R} + qVB$$

$$T\cos\alpha = mg$$

Исключаем из этих уравнений силу натяжения T, разделив уравнения друг на друга, и учитывая, что $R = L\sin\alpha$, получаем после преобразований искомое значение индукции поля:

$$B = \frac{m}{q}\left(\frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{V} - \frac{V}{L\sin\alpha}\right).$$

Задача 6. («Физтех», 2016 г.)

Бусинка массой m с положительным зарядом q может скользить вдоль закреплённой длинной спицы. Бусинка со спицей помещены в однородное магнитное поле с индукцией B (см. рисунок 9). Угол между вектором индукции и спицей равен $\alpha = \arcsin 2/5$. Бусинке сообщают скорость v_0. Коэффициент трения между бусинкой и спицей равен μ. Действие силы тяжести не учитывать.

1) Найти силу трения, действующую на бусинку в момент, когда ее скорость станет $v_0/3$.

2) На какое расстояние сместится бусинка к моменту, когда ее скорость станет $v_0/3$?

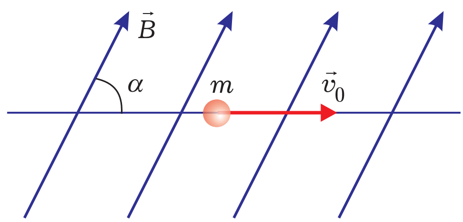

Рис. 9

Решение.

Изобразим ситуацию в таком ракурсе, чтобы все силы, действующие на бусинку, лежали в плоскости рисунка (рис. 10) Когда бусинке сообщают скорость, то на нее начинает действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно спице. Она прижимает бусинку к спице и со стороны спицы на бусинку действует сила трения – движение бусинки будет замедленным.

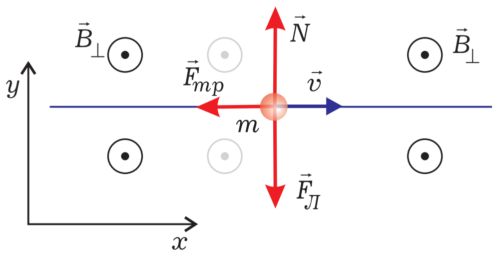

Рис. 10

Уравнение движения имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}_Л + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Проецируя на оси

$$ma = -F_{тр}$$

$$N = F_Л$$

Учитывая, что

$$F_{тр} = \mu N,$$

$$F_Л = |q| vB\sin\alpha,$$

получаем, что сила трения зависит от скорости:

$$F_{тр}(v) = \mu|q|vB\sin\alpha.$$

В момент, когда $v = \dfrac{v_0}{3}$ сила трения равна:

$$F_{тр}(v) = \frac{2}{15}\mu|q|v_0B.$$

Уравнение движения перепишем следующим образом:

$$m\frac{dv}{dt} = -(\mu|q|B\sin\alpha)v$$

$$dv = -\frac{\mu|q|B\sin\alpha}{m}vdt.$$

Преобразуем, учитывая, что $vdt = ds$, где ds – малый элемент пути:

$$dv = -\frac{\mu|q|B\sin\alpha}{m}ds.$$

Переходим к конечным приращением (s_1 – путь, пройденный бусинкой от момента начала движения до момента, когда скорость становится равной $v_0/3$):

$$\frac{v_0}{3} - v_0 = -\frac{\mu|q|B\sin\alpha}{m}s_1,$$

Отсюда:

$$s_1 = \frac{5}{3}\frac{mv_0}{\mu qB}.$$

Ответ: 1) $F_{тр}(v) = \dfrac{2}{15}\mu|q|v_0B$, 2) $s_1 = \dfrac{5}{3}\dfrac{mv_0}{\mu qB}$.

Задача 7.

Из начала координат со скоростью v_0, направленной вдоль оси x, в область, где созданы однородные параллельные оси y электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B, влетает положительно заряженная частица массой m с зарядом q (рис. 11). Определите, на каком расстоянии от начала координат частица во второй раз (не считая начального) пересечет ось y.

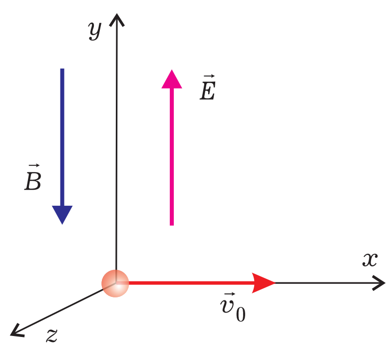

Рис. 11

Решение.

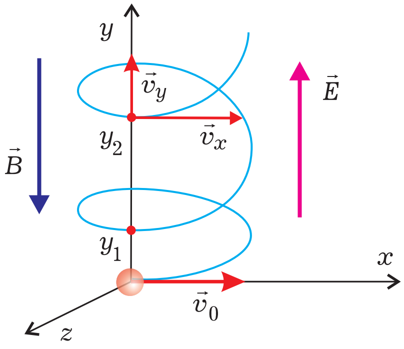

Рис. 12

Под действием магнитного поля частица будет равномерно вращаться по окружности вокруг линий магнитного поля, а под действием электрического поля двигаться с постоянным ускорением a_y вдоль силовых линий электрического поля. Траекторией движения частицы будет винтовая линия, шаг которой будет возрастать от витка к витку (рис. 12).

Движение вдоль оси y будет равноускоренным и координата будет определяться формулой (начальная скорость вдоль оси y равна нулю):

$$y = \frac{a_y t^2}{2}.$$

Траектория пересекает ось у в моменты времени $t_N = NT$, где T – период вращения, N – целое число ($N = 0, 1, 2, ...$)

$$a_y = \frac{qE}{m} \quad T = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

$$y_N = \frac{a_y}{2} N^2 T^2 = \frac{2\pi^2 mEN^2}{|q|B^2}$$

Для $N = 2$ получим:

Ответ: $y_2 = \dfrac{8\pi^2 mE}{|q|B^2}$.

Задача 8.

Маленькая положительно заряженная частица движется в однородном магнитном поле в вязкой среде. Сила сопротивления среды, действующая на частичку, прямо пропорциональна ее скорости. В начальный момент времени скорость частицы равна v_0 и была направлена перпендикулярно линиям индукции. Вектор перемещения частицы к моменту, когда скорость частицы впервые оказалась направлена противоположно начальной скорости, составляет острый угол φ с вектором $\vec{v}_0$. Какой путь s прошла частица до остановки? Силой тяжести пренебречь. Известно, что в вакууме эта частица в этом магнитном поле движется с угловой скоростью ω.

Решение

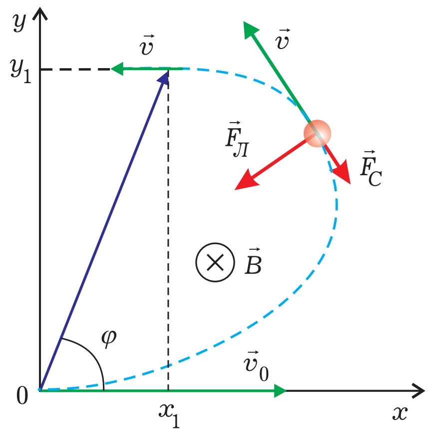

Рис. 13

Частица движется под действием силы Лоренца $F_Л$ и силы сопротивления среды F_C (рис. 13):

$$ma_x = F_{Л\,x} + F_{C\,x}$$

$$ma_y = F_{Л\,y} + F_{C\,y}$$

Заметим, что т. к. $\vec{F}_Л \perp \vec{v}$, то:

$$F_{Л\,x} = -qBv_y$$
$$F_{Л\,y} = qBv_x \qquad (1)$$

Сила сопротивления пропорциональна скорости (k – коэффициент пропорциональности):

$$F_{cx} = -kv_x$$
$$F_{cy} = -kv_y\,. \qquad (2)$$

С учетом (1) и (2) уравнения движения имеют вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -qBv_y - kv_x \qquad (3)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = qBv_x - kv_y \qquad (4)$$

Учтем, что $v_x dt = dx$, $v_y dt = dy$, а также выражение (IV) перепишем (3) и (4):

$$dv_x = -\omega dy - kdx$$
$$dv_y = \omega dx - kdy$$

Так как ω и k – величины постоянные, то можно перейти к конечным приращениям:

$$\Delta v_x = -\omega\Delta y - k\Delta x \qquad (5)$$
$$\Delta v_y = \omega\Delta x - k\Delta y. \qquad (6)$$

В момент, когда скорость частицы в первый раз направлена противоположно начальной скорости y-ая проекция скорости равна нулю $v_y = 0$, а координаты частицы равны x_1 и y_1, причем

$$y_1 = x_1 tg\varphi. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) находим коэффициент k:

$$k = \frac{\omega}{tg\varphi}. \qquad (8)$$

Для определения пути, пройденного частицей, заметим, что модуль ее скорости уменьшается за счет действия силы сопротивления. Сила Лоренца «не участвует» в уменьшении модуля скорости, она только закручивает траекторию в спираль. Если бы силы Лоренца не было, то частица двигалась бы по прямой, ее скорость также уменьшалась бы от v_0 до 0, и путь она прошла бы точно такой же, как и в магнитном поле.

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kv$$

или

$$\Delta v = -kv\Delta t.$$

Здесь $\Delta v = 0 - v_0 = -v_0$, $v\Delta t = s$ – путь, пройденный телом до остановки. Учитывая (8), окончательно имеем:

$$s = \frac{v_0}{k} = \frac{v_0}{\omega}tg\varphi.$$

Ответ: $s = (v_0/\omega)tg\varphi.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Электрон влетает в однородное магнитное поле. В точке A он имеет скорость v, которая составляет с направлением поля угол α (рис. 14). При какой индукции магнитного поля электрон окажется в точке C? Заряд электрона равен e, его масса равна m, расстояние $AC = L$.

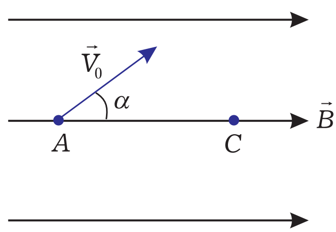

Рис. 14

2. Две бусинки, каждая с положительным зарядом q и массой m, могут скользить без трения по жёсткому непроводящему стержню, который согнут под прямым углом. Систему помещают в однородное магнитное поле с индукцией B и приводят во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной стержню и параллельной направлению магнитного поля (рис. 15). Оказалось, что шарики находятся в равновесии (относительно стержня) на одном и том же расстоянии R от оси O при двух значениях заряда q, равных q_1 и q_2.

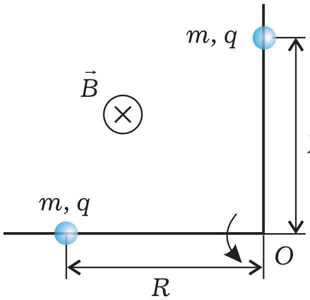

Рис. 15

1) Найти ω, считая известными m, R, q_1 и q_2.

2) Найти B, считая известными m, R, q_1 и q_2.

Силой тяжести, силами сопротивления, а также магнитным полем, индуцированным бусинками, пренебречь.

3. Определите, какую максимальную скорость разовьёт отрицательно заряженное тело, скользящее по наклонной плоскости в магнитном поле индукции B и в поле тяжести. Масса тела m, заряд по модулю равен q. Магнитное поле параллельно наклонной плоскости и перпендикулярно полю тяжести. Угол наклона плоскости к горизонту α. Коэффициент трения о плоскость μ.

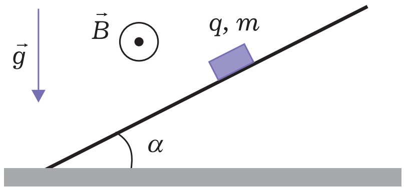

Рис. 16

Ответы:

1) $B = 2\pi n \dfrac{mv}{eL}\cos\alpha,\ n = 1, 2, \ldots$

2) $\omega = \sqrt{\dfrac{kq_1q_2}{2\sqrt{2}mR^3}},\ B = \sqrt{\dfrac{km(q_1+q_2)^2}{2\sqrt{2}q_1q_2R^3}}.$

3) если $\mu \le tg\alpha$,

$v = \dfrac{mg}{\mu qB}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$

если $\mu > tg\alpha$, $v = 0$.

В печатной версии журнала «Потенциал» №6 2019, в статье «Вышел в поле заряд... Часть 1. Поле электрическое», решение задачи №4 на стр.23, опубликовано не полностью. Полное решение задачи 4:

Решение.

Потенциальная энергия диполя равна сумме потенциальных энергий зарядов. Пусть потенциалы электрического поля в точках, где расположены заряды диполя равны φ_1 и φ_2 (рис. 1).

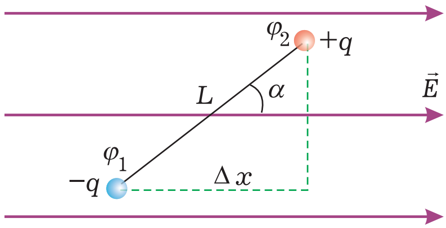

Рис. 1

Тогда потенциальные энергии отрицательного и положительного зарядов равны соответственно:

$$W_1 = -q\varphi_1, \quad W_2 = q\varphi_2.$$

Тогда суммарная потенциальная энергия равна:

$$W = W_1 + W_2 = -q\varphi_1 + q\varphi_2 =$$

$$= -q(\varphi_1 - \varphi_2) = q(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1)$$

Т. к. электрическое поле однородно, то разность потенциалов и напряженность связаны соотношением (III) из которого следует, что

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -E(x_2 - x_1) = -E\Delta x \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$W = -qE\Delta x = -qEL\cos\alpha. \qquad (3)$$

Из (3) следует:

– при $\alpha = 0$, $W = -qEL$;

– при $\alpha = 90°$, $W = 0$;

– при $\alpha = 180°$, $W = qEL$;

Если повернуть диполь на 180° из исходного положения (рис. 9), то его потенциальная энергия будет равна:

$$W = qE\Delta x = qEL\cos\alpha. \qquad (4)$$

Предлагаем читателю получить этот результат самостоятельно.

Ответ: формула (3).

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Провидцы говорили, что….

* * *

Придёт время, когда наука опередит фантазию…

Ж. Верн

* * *

Мы знаем, что масса и энергия переходят друг в друга….Возможно, будущие исследователи откроют какой-нибудь способ освобождения этой энергии, которая позволит её использовать.

Ф. Астон

* * *

Когда дела плохи, не забывайте о том, что это приближает время, когда они пойдут успешно.

Р. Вудворт

* * *

Теперь мы можем сказать, что в науках о природе идея о единстве и связанности всех явлений в мире и чувство мира как неделимого целого никогда не достигали той ясности и глубины, какой они мало-помалу достигают в наши дни.

А.Л. Чижевский