



**Патрушев Глеб Олегович**

*Кандидат физико-математических наук, доцент,  
учитель физики средней школы № 145 г. Красноярск.*



**Якушевич Валерий Иванович**

*Заведующий лабораторией ИМФИ  
Красноярского государственного педуниверситета.*

## Вибрация против трения

В этой статье рассказывается об интересной и, как оказалось, нетривиальной задаче о движении груза на плоскости с трением, которая колеблется с большой частотой вдоль своей образующей. Описаны детали постановки реального эксперимента, теоретический расчет и технические приложения описанного явления. Статья адресована школьникам, а также их учителям и может послужить основой для проведения факультативной, кружковой и научно-исследовательской работы по физике.

### Вначале была задача

В известном сборнике задач по физике [1] под редакцией О.Я. Савченко авторы наткнулись на следующую задачу под номером 3.3.36. «Наклонная плоскость совершает гармонические колебания с большой частотой вдоль своей поверхности (рис. 1). Каково установившееся движение тела, находящегося на ней? Какова средняя скорость этого тела за большое время, если  $tg\alpha \ll \mu$ , где  $\alpha$  – угол наклона плоскости,  $\mu$  – коэффициент трения,

$v_0$  – амплитуда скорости наклонной плоскости?». ».

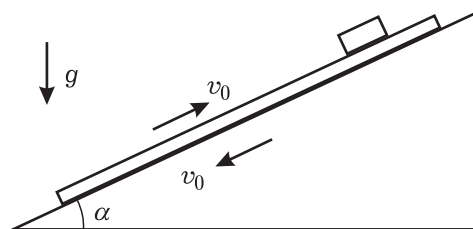


Рис. 1. Геометрия задачи

Удивление вызвал сам факт утверждения о наличии некоего установившегося движения тела. Понятно, что при условии большого трения  $tg\alpha < \mu$  и неподвижной плоскости тело должно покоиться. Было непонятно, почему вдруг высокочастотные колебания плоскости приведут к установившемуся дрейфу тела.

Возникла идея вначале проверить экспериментально этот факт. Авторы действовали вполне в духе Пойа [2]: прежде чем доказывать теорему, нужно удостовериться, что она верна. На наклонную плоскость положили лист оргстекла, к торцу которого присоединили шток, заканчивающийся эксцентрик. Эксцентрик приводился во вращательное движение электродвигателем. Таким образом, вращательное движение вала электродвигателя превращалось в колебательное движение листа оргстекла. Частоту колебаний регулировали, меняя напряжение, подаваемое на двигатель. На рис.2 приведена фотография экспериментальной установки.

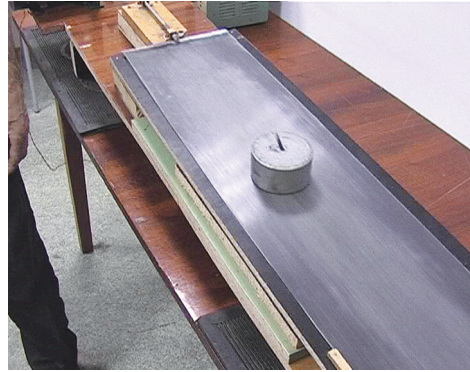


Рис. 2. Постановка эксперимента

Каково же было удивление авторов, когда по достижении определенной частоты колебаний листа оргстекла, первоначально покоившаяся, шайба неожиданно «поплыла» по наклонной плоскости вниз. И если при небольших частотах движение шайбы ещё выглядело «дерганым» и прерывистым, то при большой частоте наблюдалось исключительно плавное равномерное скольжение.

## Теоретический расчёт

Из эксперимента следует, что существует некая установившаяся скорость, с которой шайба соскальзывает вдоль наклонной плоскости при колебаниях последней вдоль ее образующей. Попробуем определить условия, при которых возможно такое установившееся движение груза. Отметим, что при высокой частоте колебаний плоскости практически в любой момент времени между ней и шайбой существует проскальзывание. Постоянно происходит «срыв», так называемая «зона застоя» отсутствует, а значит, существует сила трения скольжения

$F_{тр} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$  (здесь  $\alpha$  – угол наклона плоскости к горизонту). Направление этой силы трения зависит от соотношения между мгновенной скоростью плоскости  $v(t)$  и установившейся скоростью груза  $v_{уст}$  (рис. 3). Если  $v(t) > v_{уст}$ , то сила трения, действующая на груз, направлена вдоль образующей наклонной плоскости вниз, а если  $v(t) < v_{уст}$ , то направление силы трения противоположное. Поскольку плоскость движется гармонически, примем, что её движение про-

исходит по закону синуса с амплитудой  $v_0$ :

$$v(t) = v_0 \sin \omega t = v_0 \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

где  $\omega$  – циклическая частота, а  $T$  – соответственно период колебаний.

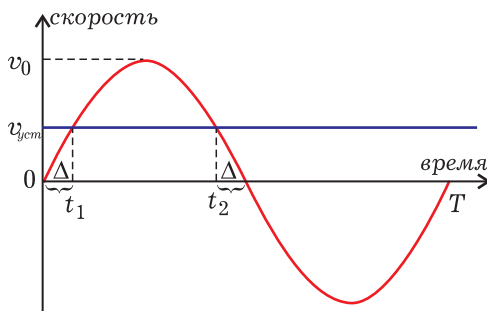


Рис. 3. Графический анализ движения груза

Раз скорость груза установилась (не меняется), то полный импульс, сообщаемый грузу силой сухого трения ( $\mu mg \cos \alpha$ ) и скатывающей силой ( $mg \sin \alpha$ ) должен быть равен нулю за период движения доски. Под скатывающей силой здесь авторы имеют в виду равнодействующую силу тяжести и нормальной силы реакции опоры.

Изобразим на графике скорость доски и груза как функции времени.

Видно, что сила трения направлена вниз в течение интервала времени  $(t_1; t_2)$  и направлена в противоположную сторону всю остальную часть периода.

Напомним, что импульсом постоянной силы называется произведение силы на время её действия, и в силу второго закона Ньютона импульс силы равен изменению импульса тела. Тогда условие равенства нулю сообщённого всеми силами телу импульса за период выразится уравнением:

$$\begin{aligned} mgs \sin \alpha \cdot T + \mu mg \cos \alpha \cdot (t_2 - t_1) = \\ = \mu mg \cos \alpha \cdot (t_1 - 0) + \mu mg \cos \alpha \cdot (T - t_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим промежуток времени  $(0; t_1)$  как  $\Delta$ . Тогда предыдущее выражение примет вид:

$$\begin{aligned} T \cdot \operatorname{tg} \alpha + \mu \left( \frac{T}{2} - 2\Delta \right) = \mu \Delta + \mu \left( \frac{T}{2} + \Delta \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow T \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4\mu \Delta \end{aligned} \quad (2)$$

Займёмся теперь расчётом  $\Delta$ . Оно является решением уравнения  $v_{уст} = v_0 \sin \omega \Delta$ . Поскольку (как следует из эксперимента)  $v_0 \gg v_{уст}$ , то  $\Delta \ll T$ . Поэтому, учитывая, что для малых значений аргумента  $\sin x \approx x$ , получим:

$$\Delta = \frac{v_{уст}}{v_0 \omega} = \frac{v_{уст} T}{2\pi v_0}. \quad (3)$$

После подстановки найденного  $\Delta$  в выражение (2) получаем окончательный ответ для установившейся скорости движения бруска по вибрирующей наклонной плоскости:

$$v_{уст} = \frac{\pi v_0 \operatorname{tg} \alpha}{2\mu}. \quad (4)$$

Проанализируем полученный результат. При нахождении тела на наклонной плоскости во все время

движения действует постоянная скатывающая сила  $F = mgsin\alpha$ . Чтобы движение тела в этом случае было установившимся, необходимо, чтобы ее компенсировала, некая сила, зависящая от скорости, например, по закону  $\beta v$ . Установившаяся скорость, таким образом, получается равной

$$v_{уст} = \frac{F}{\beta} = \frac{mgsin\alpha}{\beta}. \quad (5)$$

### Технические приложения эффекта

На описанном выше явлении «исчезновения» силы сухого трения при вибрации основан разработанный в СССР в 60-е годы XX века вибрационный метод погружения в грунт свай. Работы по теоретическому обоснованию в этой области велись известным математиком академиком Ю.И. Неймарком и профессором Д.Д. Барканом [3, 4], которые строили теории вибропогружения на основе обычных представлений о сопротивлении грунтовой среды при проникновении сваи (между поверхностью вибрирующего элемента и грунтом действуют эквивалентные силы сухого трения). Метод основан на значительном уменьшении при вибрации коэффициента внутреннего трения в грунте и сил трения по боковой поверхности свай. Благодаря этому при вибрировании для погружения свай требуется усилий в десятки раз меньше, чем при забивке.

При вибрационном методе сваю погружают с помощью специальных механизмов – вибропогружателей (рис. 4).

Наличие установившейся скорости у груза фактически эквивалентно возникновению «эффективной» малой силы вязкого трения (которая заменяет собой большую силу сухого трения), линейно зависящей от скорости движения бруска. Эта сила, противодействуя постоянной скатывающей силе, и приводит к установлению движения в направлении постоянной силы.



Рис. 4. Промышленный вибропогружатель свай

Вибропогружатель представляет собой электромеханическую машину вибрационного действия, которая в дополнение к вибрационному колебанию оказывает на сваю статическое давление (в контексте рассмотренной нами задачи – аналог постоянной скатывающей силы). Это обеспечивает высокоэффективное погружение свай в мягких породах. Средняя производительность подобных установок может достигать до 15 свай длиной 6-7 метров каждая за одну рабочую смену (8 часов). Средняя скорость

вхождения сваи в грунт – метры в минуту.

Рабочая частота вибратора при погружении сваи составляет несколько десятков герц, а амплитуда колебаний вибрирующего элемента – 4–5 мм.

На рис. 5 приведён экспериментальный график вертикальных смещений сваи с течением времени.

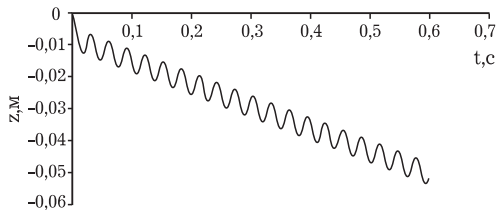


Рис. 5. Смещение сваи со временем (по данным работы [5])

Из него видно, что амплитуда колебаний сваи при погружении  $\approx 4$  мм и стремится к предельному значению амплитуды, соответствующему полному отсутствию связей элемента с грунтом. Таким образом, погружение сваи протекает в условиях «срыва». За счет этого явления свая практически беспрепятственно перемещается около боковой поверхности грунта, при этом значительно уменьшается «присоединенная масса» грунта и, соответственно, доля энергии, расходуемая на упругие колебания окружающего грунта. Постоянство наклона графика к оси времени как раз и соответствует наличию установившейся скорости.

## Задания для самостоятельного исследования

Рассмотрим песочные часы, закрепленные на платформе, которая вибрирует с некоторой частотой в вертикальном направлении. Пусть в спокойном состоянии часы рассчитаны, например, на 1 мин. Будет ли меняться время пересыпания песка в

часах при изменении частоты и амплитуды колебаний платформы? Попробуйте провести эксперимент, а не только ограничиться качественными теоретическими рассуждениями. Поверьте, результаты эксперимента будут достаточно неожиданными!

## Литература

1. Воробьев И.И. и др. Задачи по физике: Учебное пособие Под ред. О.Я. Савченко. 4-е изд., исправленное. – СПб.: Лань, 2001. – 368 с.
2. Поля Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 464 с.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
4. Баркан Д.Д. Виброметод в строительстве. – М.: Госстройиздат, 1959. – 316 с.
5. Васенин В.А. Расчетная оценка параметров колебаний грунта при вибропогружении шпунта и свай // Реконструкция городов и геотехническое строительство. – СПб, 2002. – № 5.