Ромашкевич Александр Иосифович
Старший преподаватель кафедры общей физики Московского государственного института электронной техники (технического университета). Автор ряда пособий для школы: «Механика», «Электродинамика», «Молекулярная физика», «Оптика», объединённых в серию «Учимся решать задачи».

Выбор системы отсчёта

Статья адресована школьникам профильных классов с углублённым изучением физики и их учителям. Предлагаемый материал должен привнести определённый вклад в развитие системного мышления учеников.

При решении задач на механическое движение прежде всего необходимо решить, в какой системе отсчёта вы собираетесь работать. Система отсчёта всегда связана с одним из тел системы. В зависимости от этого она может оказаться либо инерциальной, либо неинерциальной, удобной или неудобной для решения. Рациональный выбор системы координат значительно облегчает решение.

1. Инерциальные системы отсчёта

Для начала разберём решение хрестоматийной задачи, кочующей из задачника в задачник в разных редакциях, что объясняется её методической полезностью в процессе обучения.

Задача 1. В момент, когда катер проплывает вверх по реке мимо бакена (неподвижный навигационный знак), ему встречается плот, дрейфующий вниз по реке. Катер продолжил своё движение ещё в течение $\tau = 45$ минут, а потом повернул обратно и догнал плот в 4,5 километрах ниже бакена. Найти скорость течения реки u.

Решение. По умолчанию предполагается, что участок реки прямолинеен, а катер и вода (течение) движутся с постоянными скоростями. Свяжем систему отсчёта с землёй. Вдоль реки проведём ось X, направив её по течению. Ноль оси поместим на бакен. К моменту разворота (через время τ) координата катера будет равна

$$x_{01} = -(v - u)\tau,$$

а координата плота

$$x_{02} = u\tau.$$

Здесь v – скорость катера в стоячей воде (она же относительно воды).

С этого момента начинается «погоня» за плотом. Включаем секундо-

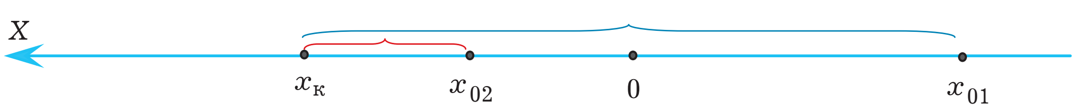

Рис. 1

мер в момент начала погони. Запишем закон движения катера с момента начала «погони»:

$$x_{\text{катера}} = x_{01} + (v+u)t =$$
$$= -(v-u)\tau + (v+u)t,$$

и закон движения плота:

$$x_{\text{плота}} = x_{02} + ut = u\tau + ut.$$

В момент встречи оба тела будут иметь одну и ту же координату $x_{\text{к}}$, поэтому

$$-(v-u)\tau + (v+u)T = u\tau + uT,$$

T – полное время «погони». Из последнего равенства следует:

$$-v\tau + vT = 0,\ T = \tau.$$

Таким образом, плот отплыл от бакена на расстояние

$$x_{\text{плота}} = x_{02} + uT = u\tau + u\tau = 2u\tau,$$

откуда находим скорость течения

$$u = \left(\frac{x_{\text{плота}}}{2\tau}\right) = \frac{4{,}5\ \text{км}}{1{,}5\ \text{ч}} = 3\ \text{км/ч}.$$

А теперь свяжем систему отсчёта с плотом (нарисуем на нём «координатный крест»). Как в этой системе отсчёта ведут себя участники движения?

Плот неподвижен, вода неподвижна, катер движется со скоростью v, которую обеспечивает мотор (скорость катера относительно воды), причём в любую сторону. Отсюда следует: сколько времени катер будет уплывать от неподвижного плота, столько же времени он будет к нему возвращаться. Таким образом, плот и катер «расстались» на 1,5 часа (90 минут). А теперь можно вернуться в неподвижную систему координат (на берег). Поскольку промежуток времени в обеих системах отсчёта один и тот же, согласно условию, за 1,5 часа плот проплыл 4,5 км. Откуда скорость течения

$$u = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3\ (\text{км/ч}).$$

Ответ. $u = 3$ км/ч.

Вполне возможно, что при всей очевидности второго варианта решения у некоторых учеников останется ощущение чего-то недопонятого («как же так, ведь в одну сторону скорость катера была $u - v$, а в другую $u + v$, а время туда и обратно одинаковое?»). Это ощущение возникает из-за того, что нам редко приходилось (или не приходилось вообще) находиться в «мокрой» системе отсчёта. Всё становится на свои места, если из движущейся воды перенести задачу в движущийся поезд. Такая система отсчёта нам хорошо знакома. Пассажир отправляется в хвост поезда («против течения»), а потом возвращается обратно («по течению»). Совершенно очевидно, что при движении пассажира с постоянной скоростью относительно поезда времена движения «туда» и «обратно» будут одинаковыми.

Задача 2. Два аэропорта A и B расположены на расстоянии $L = 1000$ км по прямой. Первый самолёт вылетает из аэропорта A по курсу, составляющему угол $\alpha = 30^{\circ}$ к линии AB. Через время $\tau = 30$ минут из аэропорта B вылетает второй самолёт. Его курс перпендикулярен линии AB. Трассы полёта самолётов показаны на рис. 2. Скорости самолётов одинаковы и равны

$$v_A = v_B = v = 800\ \text{км/ч}.$$

Найти минимальное расстояние S_{min} между самолётами в полёте.

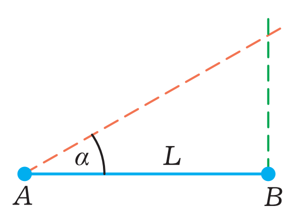

Рис. 2

Решение. Для удобства изложения будем пользоваться терминами «самолёт A» и «самолёт B». Сначала решим задачу в системе отсчёта, связанной с Землёй. Поместим начало координат в точку A.

Отсчитывать время начинаем в момент вылета самолёта B. К этому моменту самолёт A уже находился в точке с координатами (рис. 3):

$$x_0 = v\tau\cos\alpha,$$
$$y_0 = v\tau\sin\alpha.$$

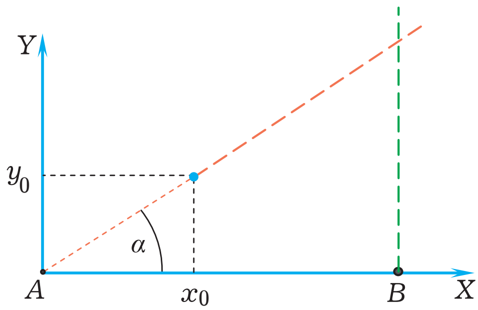

Рис. 3

Дальше самолёт A движется по закону:

$$x_A = v\tau\cos\alpha + v\cos\alpha\cdot t,$$
$$y_A = v\tau\sin\alpha + v\sin\alpha\cdot t,$$

а самолёт B:

$$x_B = L,$$
$$y_B = vt.$$

Расстояние S между самолётами в произвольный момент времени t определяется формулой

$$S^2 = (v\tau\cos\alpha + v\cos\alpha\cdot t - L)^2 + $$
$$+ (v\tau\sin\alpha + v\sin\alpha\cdot t - vt)^2.$$

Остаётся найти минимум функции S (или минимум функции S^2).

Дальше действуем по стандартной схеме: вычисляем производную, приравниваем её к нулю, находим время минимального расстояния и вычисляем S_{min}:

$$(S^2)' = 2(v\tau\cos\alpha + v\cos\alpha\cdot t - L)v\cos\alpha + 2(v\tau\sin\alpha + v\sin\alpha\cdot t - vt)(v\sin\alpha - v) = 0,$$

$$t = \frac{L\cos\alpha - v\tau(1-\sin\alpha)}{2v(1-\sin\alpha)} = 0{,}83 \text{ ч},$$

$$S = \sqrt{(v\tau\cos\alpha + v\cos\alpha\cdot t - L)^2 + (v\tau\sin\alpha + v\sin\alpha\cdot t - vt)^2} \approx 154 \text{ км}.$$

А теперь решаем задачу в системе отсчёта, связанной с самолётом B. Назовём её «подвижной». С помощью этой системы отсчёта мы «остановили» самолёт B на всё время полёта. Зато движение самолёта A теперь становится сложнее.

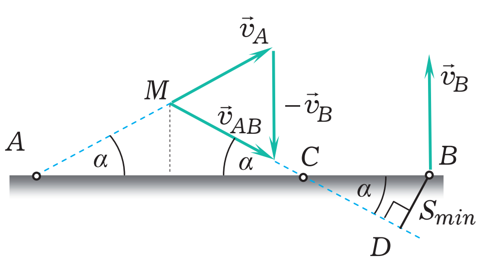

Рис. 4

Траектория движения этого самолёта в подвижной системе представлена на рис. 4 пунктирной линией. Первые 30 минут «подвижная» и «неподвижная» (связанная с Землёй) системы отсчёта идентичны, и траектории самолёта A в них совпадают ($\vec{v}_A = \vec{v}_{AB}$). В течение этого времени (τ) самолёт пролетает расстояние

$$AM = v\tau.$$

В момент начала движения самолёта B скорость самолёта A в подвижной системе меняет направление и, согласно правилу сложения скоростей, становится равной

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B.$$

После построения треугольника скоростей задача становится чисто геометрической. Учитывая, что угол α равен 30°, а $v_A = v_B = v$, легко устанавливаем, что треугольник скоростей $\vec{v}_{AB}$, $\vec{v}_A$, $-\vec{v}_B$ – равносторонний.

В подвижной системе координат минимальное расстояние между самолётами равно отрезку BD (перпендикуляр, опущенный из точки B

на вторую половину траектории самолёта A). Попутно отметим, что длина отрезка одинакова во всех инерциальных системах отсчёта, т. к. классическая механика не знает релятивистских эффектов.

$$S_{min} = CB\sin\alpha = (AB - AC)\sin\alpha =$$
$$= (AB - 2AM\cos\alpha)\sin\alpha =$$
$$= (L - 2v\tau\cos\alpha)\sin\alpha.$$

После вычислений:

$$S_{min} = (1000 - 2\cdot 800\cdot 0,5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot 0,5 \approx$$
$$\approx 154 \text{ (км)}.$$

Ответ. $S_{min} \approx 154$ км.

Выбор варианта решения – дело вкуса. Но во втором случае не потребовалось дифференцирования, а само решение представляется более лаконичным и красивым.

Задача 3. На шероховатую горизонтальную, движущуюся со скоростью v ленту транспортёра въезжает перпендикулярно краю ленты маленькая шайба. Коэффициент трения шайбы по ленте μ, начальная скорость шайбы u. Найти максимальную ширину ленты h, при которой шайба соскальзывает с ленты.

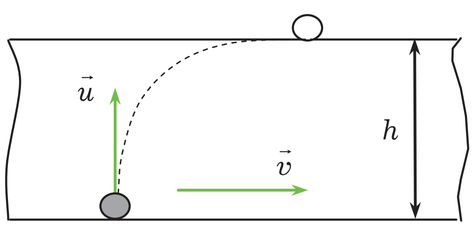

Рис. 5

Решение. Условие задачи подсказывает выбор системы отсчёта. Действительно, в лабораторной системе (земля или помещение) шайба движется по сложной кривой (пунктирная линия на рис. 5). Зато в системе координат, связанной с лентой, движение шайбы будет простым. Начальная скорость шайбы относительно ленты согласно правилу сложения скоростей $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ (рис. 6).

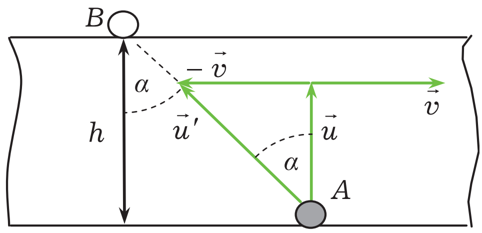

Рис. 6

В дальнейшем сила трения уменьшает эту скорость, но не меняет её направления, т. к. вектор силы трения противоположен вектору скорости $\vec{u}'$. Таким образом, в подвижной СО шайба движется прямолинейно и равнозамедленно. При максимальной ширине ленты скорость шайбы падает до нуля у противоположного края. Применим теорему о кинетической энергии для шайбы в подвижной СО.

В процессе скольжения на шайбу действуют три силы: трение $\vec{F}_{тр}$, тяготение $m\vec{g}$ и реакция опоры $\vec{N}$.

$$0 - \frac{mu'^2}{2} = A_{тр} + A_{mg} + A_N.$$
$$A_{mg} = A_N = 0,$$

т. к. $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны перемещению шайбы.

$$A_{тр} = -F_{тр}S = -\mu mg\cdot AB =$$
$$= -\mu mg\frac{h_{max}}{\cos\alpha} =$$
$$= -\mu mg\frac{h_{max}\sqrt{u^2+v^2}}{v}.$$
$$u'^2 = u^2 + v^2,$$

и соответственно:

$$\frac{m\left(u^2+v^2\right)}{2} = \mu mg\frac{h_{max}\sqrt{u^2+v^2}}{u},$$
$$h_{max} = \frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{2\mu g}.$$

Ответ. $h_{max} = \dfrac{u\sqrt{u^2+v^2}}{2\mu g}.$

В рассмотренных задачах мы переносили решение задачи в более удобную инерциальную систему отсчёта.

2. Простейшая неинерциальная система отсчёта

Пусть система отсчёта связана с телом, движущимся прямолинейно, поступательно с постоянным ускорением $\vec{a}_0$ относительно некоторой инерциальной системы (для простоты будем называть её неподвижной).

Запишем закон Ньютона для материальной точки (МТ) массой m в привычной инерциальной системе отсчёта:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

По правилу сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}',$$

здесь $\vec{a}'$ – ускорение МТ в неинерциальной системе отсчёта, $\vec{a}_0$ – ускорение *той точки неинерциальной системы, в которой в данный момент находится тело*. Если неинерциальная система движется прямолинейно и поступательно с постоянным ускорением $\vec{a}_0$, то это означает, что таковым будет ускорение в любом месте системы в любой момент времени.

После подстановки в закон Ньютона

$$\sum \vec{F}_i = m\left(\vec{a}_0 + \vec{a}'\right), \text{ или}$$

$$\sum \vec{F}_i - m\vec{a}_0 = m\vec{a}'.$$

По сравнению с законом Ньютона в инерциальной СО в неинерциальной появился дополнительный член $-m\vec{a}_0$, который назвали *силой инерции* $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0$ и включили в сумму сил. Физики сделали это только для того, чтобы закон Ньютона принял привычный вид. Это условность. Понятно, что член $-m\vec{a}_0$ не является силой в прямом смысле слова. Реальная сила всегда приложена каким-то материальным объектом (другим телом или полем). А у силы инерции нет такого «родителя».

Поясним простым примером.

Задача 4. Тележка с кронштейном движется по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением $\vec{a}_0$. К кронштейну на нити подвешен шарик. Определить угол отклонения нити от вертикали.

Решение. Сразу после начала движения шарик будет совершать затухающие колебания вокруг некоторого равновесного положения. По умолчанию в условии предполагается, что время релаксации прошло и шарик уже не движется относительно тележки.

Сравним, как будут решать задачу два наблюдателя: первый из «неподвижной» СО, а второй – из неинерциальной СО (сидя на тележке).

Наблюдатель в неподвижной СО (рис. 7) скажет: «Под действием силы тяжести и силы натяжения нити шарик движется с ускорением тележки». И напишет:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

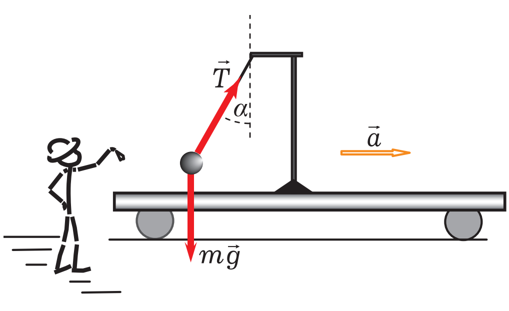

Рис. 7

Наблюдатель в неинерциальной СО (рис. 8), сидящий на тележке, скажет: «Под действием силы тяжести, силы натяжения нити и силы инерции шарик находится в состоянии покоя». И напишет:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0, \text{ или}$$

$$\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a} = 0.$$

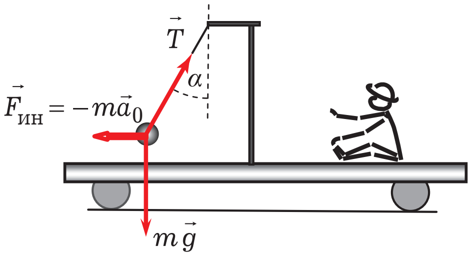

Рис. 8

Оба пришли к одному и тому же уравнению. Чтобы закончить задачу, спроецируем уравнение на традиционные оси координат: ось X направлена по движению тележки, ось Y – вертикальна (рис. 9):

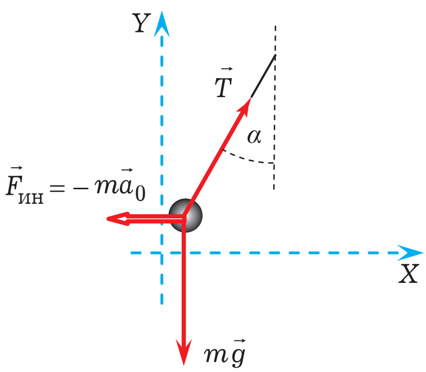

Рис. 9

$$T\sin\alpha = m\vec{a}_0,$$
$$T\cos\alpha = mg.$$

И, поделив одно уравнение на другое, приходим к ответу:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_0}{g}.$$

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_0}{g}$.

Если в рассмотренной задаче преимущества одной СО над другой в смысле сложности нет, то следующий пример доказывает полезность использования неинерциальной системы отсчёта.

В № 9 журнала «Потенциал» за 2013 г. в статье «Кинематические связи в задачах по механике» приводилась задача (№7).

Задача 5. На горизонтальном столе лежит клин с углом α при прилегающей к столу грани (рис. 10). Масса клина M. С клина соскальзывает брусок массой m. Пренебрегая трением между всеми соприкасающимися поверхностями, найти ускорение клина.

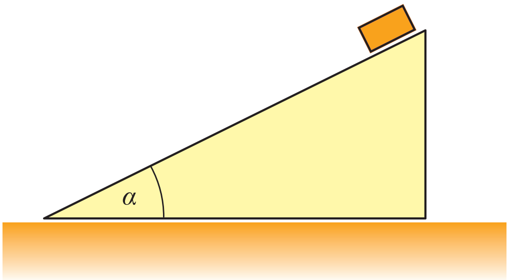

Рис. 10

В ходе решения были составлены четыре уравнения с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} N\sin\alpha = ma_г, \\ mg - N\cos\alpha = ma_в, \\ N\sin\alpha = Ma_к, \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_в}{a_г + a_к}. \end{cases}$$

$a_г$ – горизонтальное ускорение бруска,

$a_в$ – вертикальное ускорение бруска,

$a_к$ – ускорение клина,

N – реакция опоры клина на брусок.

Решение системы отдавалось на откуп читателю, и приводился готовый ответ.

Ответ. $a_к = \dfrac{mg\sin 2\alpha}{2\left(m\sin^2\alpha + M\right)}$.

Здесь же для сравнения решим эту задачу в системе отсчёта, связанной с клином. Эта система неинерциальна (движется с ускорением). Придётся к силам, действующим на тела, добавить по силе инерции

$\vec{F}_{\text{ин}} = -M\vec{a}_{\text{к}}$ и $\vec{f}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_{\text{к}}$ (рис. 11).

Воспользуемся уже введённым обозначением:

$$\left|\vec{N}_1\right| = \left|\vec{F}_{\text{д}}\right| = N.$$

В выбранной системе отсчёта клин неподвижен.

Запишем закон Ньютона для клина в проекции на ось X:

$$N\sin\alpha - Ma_{\text{к}} = 0$$

и для бруска в проекции на ось X':

$$N + ma_{\text{к}}\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0.$$

Мы учли, что проекция ускорения бруска на ось X' равна нулю. Всего два уравнения с двумя неизвестными $(N$ и $a_{\text{к}})$. Исключаем N:

$$-ma\sin^2\alpha + mg\sin\alpha\cos\alpha = Ma,$$

$$a = \frac{mg\sin 2\alpha}{2\left(M + m\sin^2\alpha\right)}.$$

Результат тот же, но усилий явно меньше.

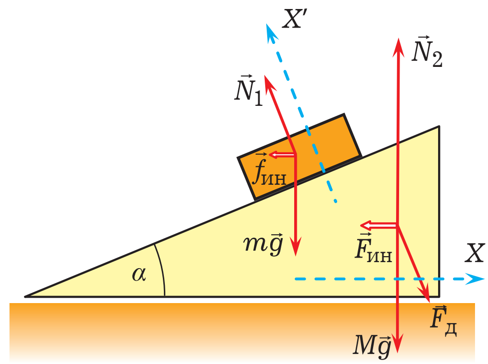

Рис. 11

3. Вращающаяся система отсчёта

Некоторые динамические задачи удобно решать во вращающейся системе отсчёта. Например, тело отсчёта – вращающийся с постоянной угловой скоростью в горизонтальной плоскости диск. Ордината Y направлена вдоль оси вращения, ось X нарисована на диске и проходит через центр вращения (рис. 12).

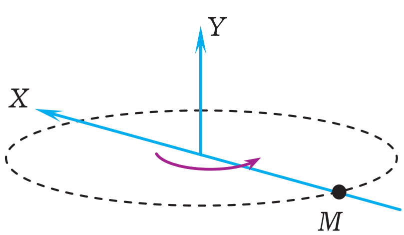

Рис. 12

В такой системе есть одна «неприятность». *Различные точки вращающейся СО имеют разные ускорения относительно неподвижной системы отсчёта.* Поэтому любое смещение материальной точки во вращающейся СО приводит к изменению $\vec{a}_0$ в законе Ньютона:

$$\sum\vec{F}_i = m\left(\vec{a}_0 + \vec{a}'\right),$$

что является причиной появления дополнительного члена в законе Ньютона (ускорение Кориолиса). А это выходит за рамки школьного курса. Поэтому мы вынуждены ограничиться случаем, когда рассматриваемое тело *неподвижно* во вращающейся системе отсчёта. При этом не только $\vec{a}' = 0$, но и $\vec{v}' = 0$.

В этом частном случае второй закон Ньютона имеет одинаковый вид в обеих системах отсчёта:

$$\sum\vec{F}_i = m\vec{a}_{\text{ц}}.$$

Но при наблюдении из неподвижной СО мы говорим: «Сумма сил, действующих на тело (лучше на МТ), обеспечивает телу движение по окружности с центростремительным ускорением $\vec{a}_{\text{ц}}$».

А во вращающейся системе (мы сидим верхом на оси X) записываем закон Ньютона в виде:

$$\sum\vec{F}_i - m\vec{a}_{\text{ц}} = 0,$$

«обзываем» второе слагаемое силой инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_{\text{ц}}$, включаем её в сумму сил и говорим: «Тело находится в состоянии покоя, и следовательно, $\sum \vec{F}_i = 0$».

В чём же разница? Ведь уравнение одно и то же!

Следующая задача даёт ответ на этот вопрос.

Задача 6. Тонкий невесомый стержень согнули под прямым углом так, что длина одной части стержня L, а другой – $2L$ (рис. 13). К концам стержня прикрепили небольшие шарики одинаковой массы. Середину большей стороны шарнирно соединили с вертикальной осью, как показано на рисунке. До какой угловой скорости ω надо раскрутить систему, чтобы горизонтальная часть стержня отклонилась на угол α? Найти α_{max} – максимальный угол отклонения.

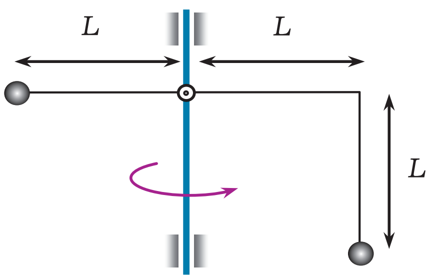

Рис. 13

Решение. Если решать задачу в инерциальной (неподвижной) системе отсчёта, то придётся рассмотреть движение каждого из шариков, а значит, необходимо учесть силы взаимодействия шариков со стержнем. В конце концов придётся решать систему из пяти уравнений с пятью неизвестными.

Решение задачи значительно упрощается во вращающейся системе координат: ось Z направлена вдоль оси вращения, оси X и Y вращаются с вместе со стержнем. В такой системе стержень и скреплённые с ним массы неподвижны, и мы можем рассматривать систему как единое тело, находящееся в равновесии. Теперь силы взаимодействия шариков со стержнем становятся внутренними и, следовательно, не учитываются. Вместо них придётся добавить силы инерции $\vec{F}_{1\text{ ин}}$ и $\vec{F}_{2\text{ ин}}$, действующие на шарики в выбранной неинерциальной системе отсчёта:

$$F_{1\text{ ин}} = m\omega^2 \cdot CB,$$

$$F_{2\text{ ин}} = m\omega^2 \cdot AD.$$

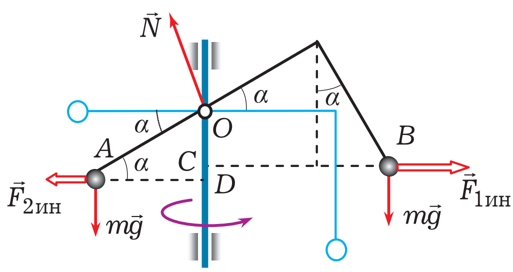

Рис. 14

Для решения задачи достаточно воспользоваться условием равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на систему:

$$\sum M_i = 0.$$

Будем считать сумму моментов относительно шарнира O, что позволяет избавиться от момента реакции опоры шарнира.

$$F_{1\text{ ин}} \cdot OC + mg \cdot AD -$$
$$-F_{1\text{ ин}} \cdot OD - mg \cdot BC = 0.$$

$$m\omega^2 \cdot BC \cdot OC + mg \cdot AD -$$
$$-m\omega^2 \cdot AD \cdot OD - mg \cdot BC = 0.$$

Необходимые отрезки легко находятся из рис. 14:

$$BC = L(\cos\alpha + \sin\alpha),$$
$$OC = L(\cos\alpha - \sin\alpha),$$
$$AD = L\cos\alpha,$$
$$OD = L\sin\alpha.$$

Подставляя эти выражения в уравнение моментов, находим угловую скорость:

$$\omega^2 L\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + g\cos\alpha -$$
$$-\omega^2 L\cos\alpha\sin\alpha - g(\cos\alpha + \sin\alpha) = 0,$$

$$\omega^2 L(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha) - g\sin\alpha = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha - 0,5\sin 2\alpha}}.$$

В этом выражении знаменатель всегда должен оставаться положительным:

$$\cos 2\alpha - 0,5\sin 2\alpha > 0.$$

При стремлении угловой скорости к бесконечности знаменатель стремится к нулю, и, следовательно, уравнение

$$\cos 2\alpha - 0,5\sin 2\alpha = 0$$

определяет максимальный (предельный) угол отклонения стержня:

$$\mathrm{tg} 2\alpha_{max} = 2,$$

$$2\alpha_{max} \approx 63,4^{\circ},$$

$$\alpha_{max} \approx 31,7^{\circ}.$$

Ответ. $\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha - 0,5\sin 2\alpha}}$,

$$\alpha_{\max} \approx 31,7^{\circ}.$$

Если у читателя хватило терпения дочитать статью до этого места, то советуем передохнуть, повторить понятия производной, первообразной и определённого интеграла. А после внимательно разберитесь в решении последней задачи. И вы поймёте, насколько начала математического анализа расширяют ваши возможности в решении физических задач.

Задача 7. В цилиндрическую кастрюлю диаметра d = 40 см налили жидкость на высоту h = 5 см. До какой минимальной угловой скорости надо раскрутить кастрюлю вокруг вертикальной оси симметрии сосуда, чтобы через достаточно большой промежуток времени в центре кастрюли показалось дно?

Решение. Сначала разберёмся, что означают слова «через достаточно большой промежуток времени». Дело в том, что трение между поверхностью кастрюли и жидкостью и между слоями жидкости постепенно вовлекают её во вращение, и через некоторое время все части жидкости будут двигаться вокруг центральной оси с угловой скоростью кастрюли.

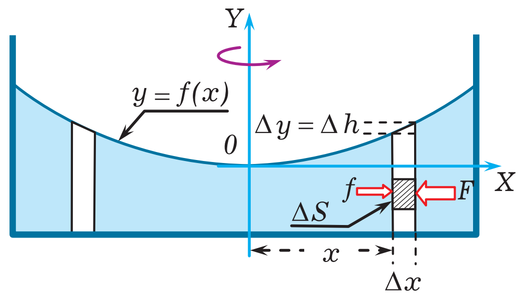

Рис. 15

Этот стационарный режим и предлагается в условии задачи.

То, что поверхность вращающейся в сосуде жидкости принимает вогнутую форму, известно каждому. Попробуем найти аналитическое выражение этой формы.

На рис. 15 представлен разрез кастрюли по плоскости, содержащей ось симметрии (ось Y).

Выделим в жидкости тонкий цилиндрический слой радиуса x, ось которого совпадает с Y.

На поверхности слоя мысленно вырезаем малый фрагмент площадью ΔS. На фрагмент действуют горизонтальные силы F и f. Боковые грани фрагмента находятся на разной глубине, обусловленной кривизной поверхности, а значит, силы давления справа и слева различны:

$$F = p_2\Delta S = \rho g h_2 \Delta S,$$

$$f = p_1\Delta S = \rho g h_1 \Delta S.$$

Результирующая этих сил

$$F_{\text{рез}} = F - f = \rho g \Delta S \Delta y$$

направлена к оси вращения. Чем тоньше цилиндрический слой и меньше ΔS, тем точнее последнее равенство. В пределе

$$F_{\text{рез}} = \rho g \cdot dS \cdot dy.$$

Под действием результирующей силы фрагмент массой

$$dm = \rho dV = \rho \cdot dS \cdot dx$$

движется по окружности радиуса x с угловой скоростью ω. По закону

Ньютона в проекции на радиальное направление

$$F_{рез} = dm \cdot \omega^2 x,$$

$$\rho g \cdot dS \cdot dy = \rho \cdot dS \cdot dx \cdot \omega^2 x,$$

$$dy = \frac{\omega^2}{g} x dx.$$

Проинтегрировав полученное равенство, получим:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C.$$

Это соотношение определяет форму поверхности вращения жидкости.

При $x = 0$, $y_0 = C$ – координата дна «жидкой ямы».

Если поместить начало координат в центр дна кастрюли, то постоянная C приобретает смысл высоты столба жидкости в центре вращения.

Обратите внимание – мы получили результат, не зависящий от плотности жидкости. Иными словами, форма поверхности будет одна и та же для ртути и воды, если их вращать с одинаковой угловой скоростью.

Попробуем для сравнения получить тот же результат во вращающейся системе координат.

Оставим ось Y в покое, а ось X заставим вращаться вместе с жидкостью с угловой скоростью ω. В такой неинерциальной системе координат любой фрагмент жидкости Δm находится в состоянии покоя, но зато испытывает действие дополнительной силы – силы инерции:

$$F_{ин} = \Delta m \omega^2 x,$$

направленной от оси вращения.

Мысленно выделим у поверхности жидкости малый объёмчик жидкости ΔV и рассмотрим условие его равновесия (рис. 16).

На выделенный фрагмент действуют сила тяжести $\Delta m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ (вспомните «тело на наклонной плоскости») и сила инерции $\vec{F}_{ин}$.

Первое необходимое условие равновесия тела: сумма сил, действующих на тело, равна нулю:

$$\Delta m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{ин} = 0.$$

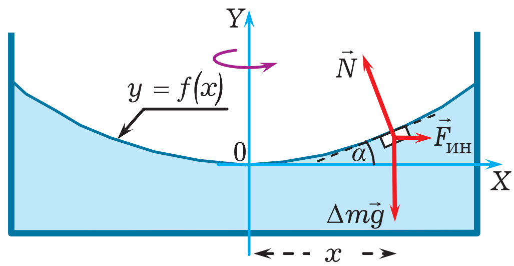

Рис. 16

В проекциях на оси координат X и Y:

$$N \sin\alpha = \Delta m \omega^2 x,$$
$$N \cos\alpha = \Delta m g.$$

Поделим первое равенство на второе:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2}{g} x.$$

Вспоминаем, что тангенс угла наклона на графике – это производная функции $y = f(x)$. В случае простой линейной зависимости производной от аргумента легко «соображаем» вид первообразной без официального интегрирования:

$$y = \frac{\omega^2}{g} \frac{x^2}{2} + C.$$

Первая часть задачи выполнена. Вторая не имеет непосредственного отношения к теме статьи. Но порядок есть порядок, доведём решение до конца. Искомую угловую скорость найдём из условия равенства объёмов жидкости в состоянии покоя и в «раскрученном» состоянии.

В начальном состоянии (кастрюля покоится) объём жидкости

$$V = \pi r^2 \cdot h,$$

(площадь основания на высоту),

$$r = \frac{d}{2}.$$

Чтобы найти объём жидкости

при вращении, сначала совместим начало координат с дном сосуда. По условию кастрюля вращается с угловой скоростью, при которой «водяная яма» касается дна. В этом случае постоянная C обращается в нуль.

На рис. 15 мы уже выделяли элементарный тонкий цилиндрический слой. Нетрудно сообразить, что его объём

$$dV = dS \cdot 2\pi x = y \cdot dx \cdot 2\pi x\,.$$

Сложим все элементарные объёмчики (проинтегрируем от 0 до r):

$$V = \int_0^r \frac{\omega^2 x^2}{2g} \cdot dx \cdot 2\pi x =$$

$$= \frac{\pi\omega^2}{g}\int_0^r x^3 dx = \frac{\pi\omega^2}{4g} r^4.$$

Приравнивая выражения для объёмов, находим угловую скорость:

$$\pi r^2 h = \frac{\pi\omega^2}{4g} r^4,$$

$$\omega = \frac{2\sqrt{gh}}{r} = \frac{4\sqrt{gh}}{d}.$$

После вычислений:

$$\omega = \frac{4\sqrt{9,8 \cdot 0,05}}{0,4} = 7 \text{ (рад/с)}.$$

Ответ. $\omega = \dfrac{4\sqrt{gh}}{d} = 7$ рад/с.

В заключение напомним, что приступая к решению «механической» задачи, попробуйте поразмышлять, в какой системе отсчёта вам будет удобно работать.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Блиц-ответы

– Что представляет собой атомная бомба?
– Гриб на том свете.

***

– Какова суть землетрясения?
– Это эхо внутреннего голоса Земли.

***

– Линия – это…
– След убежавшей точки.

***

– Что такое ржавчина?
– Железо с подмоченной репутацией.

***

– Кого называют экзаменатором?
– Специалиста по уценке знаний.

***

– Что такое небоскрёб?
– Улица, расположенная вертикально.

***

– Как вы представляете себе космос?
– Как сверкающий звёздами полигон для человеческого воображения.

***

– Каков смысл термина «опыт»?
– Это умение не совершать несколько раз одну и ту же ошибку.