



Лукьянов Андрей Александрович

*Кандидат физико-математических наук,
доцент, сотрудник лаборатории МФТИ
по работе с одарёнными детьми.*

В какой мере металлы сопротивляются протеканию по ним электрического тока

В каком смысле мало сопротивление металлов протеканию по ним электрического тока? Означает ли малость электрического сопротивления малость также и «силы трения» со стороны атомов кристаллической решётки, действующей на электроны, переносчики заряда при протекании тока? Какие особенности этой «силы трения» приводят к закону Ома – линейной зависимости между током и напряжением?

Все мы привыкли к тому, что электрическое сопротивление металлов чрезвычайно мало. Именно малость сопротивления металлических проводов сделало проводку в домах такой, какая она есть: все электроприборы в квартире включены параллельно друг другу, и к каждому подведено практически одно и то же напряжение, например 220 вольт, даже если все электроприборы включены в удалённые друг от друга розетки или подключены к сети с помощью удлинителя.

Все, кто когда-либо рассчитывал сопротивления электрических цепей, знают также, что сопротивления «тонких проводов» на схемах (так называемых соединительных проводов) считаются равными нулю (считаются пренебрежимо малыми по сравнению с сопротивлениями других элементов схем).

Многие слышали, уверен, и про короткое замыкание (КЗ) в цепях. «Попытка заменить» лампу накаливания медной проволочкой немедленно привела бы к тому, что в луч-

шем случае в доме «выбило пробку». Электрическое сопротивление в этом месте цепи стало бы чрезвычайно маленьким, а учитывая, что все электроприборы включены параллельно друг другу (в том числе и то место, которое до проволоочки занимала лампа), электрический ток через всю квартиру стал бы чрезвычайно большим (равным 220 вольтам, делённым на очень маленькое сопротивление проволоочки; конкретные оценки сопротивления см. ниже). «Пробка» или специальный автомат отслеживают, чтобы ток через всю квартиру не был опасно большим (например, не превышал 10 ампер), и отключают квартиру от сети, как только суммарный ток превышает опасное значение (например, из-за короткого замыкания).

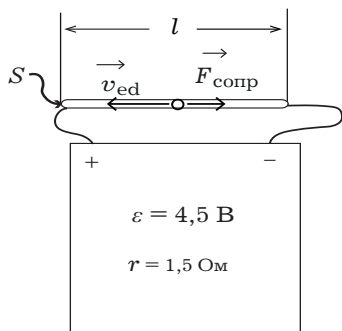


Рис. 1

Итак, электрическое сопротивление металлических проводов мало. Автор намерен, однако, рассказать об одном сюрпризе сопротивления проводов, который в своё время стал сюрпризом и для него самого.

Рассмотрим простую задачу. Возьмём батарейку, например квадратную батарейку карманного фонаря с ЭДС (электродвижущей силой) $\varepsilon = 4,5 \text{ В}$ и внутренним сопротивле-

нием $r = 1,5 \text{ Ом}$. Реальные сопротивления батареек могут быть очень разными по величине, но чаще всего они бывают порядка ома (в сильно подсевших батарейках внутренние сопротивления могут быть заметно больше – до нескольких сотен ом). Конкретное значение $r = 1,5 \text{ Ом}$ взято автором в значительной степени для простоты расчётов.

Возьмём ещё медную проволочку диаметром $d = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$ и длиной $l = 5 \text{ см} = 5 \times 10^{-2} \text{ м}$ и устроим с её помощью короткое замыкание батарейки (см. рис. 1). Вычислим сопротивление R медной проволоочки и сравним его с внутренним сопротивлением батарейки. Для проволоочки по формуле $R = \rho \frac{l}{S}$, где $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ – удельное сопротивление меди, $S = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,8 \times 10^{-7} \text{ м}^2 \approx 10^{-6} \text{ м}^2$, получаем значение электрического сопротивления $R \approx 0,001 \text{ Ом}$, т.е. много меньше внутреннего сопротивления батарейки.

По этой причине при вычислении силы тока в цепи $J = \varepsilon / (R + r)$ можно пренебречь слагаемым R в знаменателе; в результате для силы тока короткого замыкания получаем значение

$$J \approx \varepsilon / r = 3 \text{ А}. \quad (1)$$

Это совсем не маленький ток, и автор не советовал бы читателю продолжительное время делать КЗ даже батарейки: она быстро разрядится. (А ещё сильно нагреется, так как в ней будет выделяться джоулево тепло.)

Пока никаких сюрпризов, впрочем, не видно: сопротивление короткого замыкания оказалось много меньше внутреннего сопротивления батарейки. Чего, как говорится, и ожидали.

Продолжим, однако, наши оценки. Для проволоочки с площадью поперечного сечения $S \approx 10^{-6} \text{ м}^2$ получается очень не маленькая плотность тока

$$j = J/S \approx 4 \times 10^6 \text{ А/м}^2.$$

(При плотностях тока 10^8 А/м^2 и выше за счёт выделения в металлах большого джоулева тепла они без интенсивного теплоотвода обычно плавятся, даже взрываются.)

Теперь самое важное! Электрический ток в медной проволочке переносится электронами. При постоянной силе тока и соответственно при постоянной плотности тока постоянной будет и скорость $v_{\text{ед}} = v$ упорядоченного движения электронов (последнюю называют также скоростью дрейфа электронов). Она связана с плотностью тока соотношением

$$j = env, \quad (2)$$

где $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл}$ – абсолютное значение заряда электрона, n – концентрация электронов проводимости (их число в единице объёма). В металлах эти концентрации чрезвычайно велики; для меди $n \approx 8,4 \times 10^{28} \text{ 1/м}^3$. По формуле (2) тогда получаем чрезвычайно маленькую скорость упорядоченного движения электронов

$$v \approx 0,00028 \text{ м/с} \approx 0,3 \text{ мм/с}. \quad (3)$$

Нас будет интересовать здесь не величина скорости, а другое. Спросим себя, что обеспечивает постоянство этой скорости при постоянном напряжении? Ответ известен: 1) сопротивление, оказываемое движению электронов атомами кристаллической решётки, и 2) то, что сила сопротивления пропорциональна скорости (см. ниже!).

Электроны ускоряются электрическим полем в металле, но при постоянной в среднем скорости элек-

тронов сила $e \cdot E$ со стороны электрического поля (E – напряжённость электрического поля), действующая на один электрон проводимости, уравнивается силой сопротивления, действующей на него со стороны ионных остовов кристалла:

$$f_{\text{сопр}} = eE. \quad (4)$$

Понятно, что эта сила невелика. Подсчитаем, однако, суммарную силу сопротивления, действующую на все электроны проволоочки (проволочку считаем прямой; при этом векторное сложение сил сведётся к арифметическому):

$$\begin{aligned} F_{\text{сопр}} &= N \cdot f_{\text{сопр}} = nV \cdot f_{\text{сопр}} = \\ &= nSl \cdot f_{\text{сопр}} = nSl \cdot eE. \end{aligned} \quad (5)$$

Напряжённость электрического поля связана с плотностью тока простым соотношением

$$E = \rho \cdot j \quad (6)$$

(аналогом соотношения $U = RJ$). Поэтому для вычисления суммарной силы сопротивления, действующей на все электроны проволоочки, получаем формулу

$$\begin{aligned} F_{\text{сопр}} &= nSl \cdot eE = nSl \cdot e\rho \cdot j = \\ &= nSl \cdot e\rho \cdot \frac{J}{S} = en\rho \cdot l \cdot J. \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка в формулу (7) числовых значений

$$\begin{aligned} e &= 1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл}, \quad n \approx 8,4 \times 10^{28} \text{ 1/м}^3, \\ \rho &= 1,7 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}, \quad l = 5 \text{ см} = 5 \times 10^{-2} \text{ м} \\ \text{и } J &\approx \varepsilon/r = 3 \text{ А (1) даёт значение силы} \\ F_{\text{сопр}} &\approx 34 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (8)$$

Но это сила тяжести Mg для массы $M = 3,5 \text{ кг}$! Для сравнения масса самой проволоочки в 10 000 раз меньше:

$$\begin{aligned} m &= \rho'V = \rho'Sl \approx 0,00035 \text{ кг} \approx 0,35 \text{ г} \\ (\rho' &= 8,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \text{ – плотность меди}). \end{aligned}$$

Сила $F_{\text{сопр}} \approx 34 \text{ Н}$ приложена к электронной подсистеме кристалла. Но по третьему закону Ньютона точ-

но такая же по модулю сила, но противоположно направленная, действует со стороны всех электронов проводочки на ионные остовы кристалла (рис. 2):

$$F_{i \rightarrow e} = F_{e \rightarrow i} = F_{\text{сопр}}. \quad (9)$$

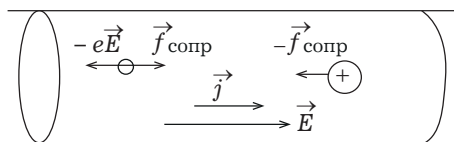


Рис. 2

Однако если к проводочке массой $m \approx 0,35$ г приложить силу $F_{\text{сопр}} \approx \approx 34$ Н, то она приобретёт ускорение $a = F_{\text{сопр}} / m \approx 9,8 \times 10^4$ м/с², что примерно в 10 000 раз больше ускорения свободного падения! Почему мы никогда не видим таких огромных ускорений проводочек и не ощущаем действия никаких могучих сил на проводники при протекании по ним электрического тока?

И ещё. А если напряжение то подключается к проводнику, то отключается? Или подводится переменное (синусоидальное) напряжение. Почему в этих случаях мы не чувствуем могучих дрожаний проводника? Ведь пока ток в проводнике был равен нулю, была равна нулю и сила со стороны электронов, действующая на ионный остов кристалла. Однако как только пошёл ток, возникнет большая сила $F_{\text{сопр}}$. Многое здесь представляется странным не искушенному в физике читателю.

Большая величина силы $F_{\text{сопр}}$, кажется, плохо согласуется ещё с одним фактом – малостью суммарного импульса всех электронов в проводочке с током (не одного электрона,

а всех!). Оценим этот суммарный импульс:

$$P_{\Sigma} = N_e m_e v = n \cdot Sl \cdot m_e \cdot \frac{j}{en} = \frac{J}{e} m_e l \approx \approx 8,5 \times 10^{-13} \text{ кг} \cdot \text{м/с}. \quad (10)$$

Этот импульс кажется совершенно ничтожным. Если импульс электрона проводимости меняется с частотой 50 Гц, т.е., грубо говоря, время изменения направления импульса на прямо противоположное порядка $\Delta t = 1/100$ с, то для этого потребуется всяго лишь сила порядка

$$8,5 \times 10^{-13} \times 1/100 \text{ Н},$$

т.е. порядка 10^{-14} Н, но никак не 34 Н. Как малое изменение импульса может быть связано с большой силой $F_{\text{сопр}}$?

Итак, возникли следующие вопросы.

1. Почему мы никогда не видим ускорений проводочек и не ощущаем действия никаких огромных сил на проводники при протекании по ним электрического тока, хотя по оценкам эти силы огромны? Почему мы не чувствуем могучих дрожаний проводника при протекании по нему переменного тока?

2. Как большая сила $F_{\text{сопр}}$ может вызвать малюсенькое изменение импульса?

3. Почему сила тока в законе Ома, $J = U / R$, пропорциональна именно первой степени напряжения (а, например, не корню квадратному из напряжения)?

Ответ на первый вопрос может разочаровать своей простотой.

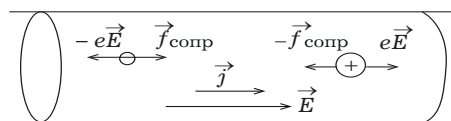


Рис. 3

Дело в том, что суммарный электрический заряд всех электронов проводимости проволоочки и всех ионных остовов с огромной точностью равны друг другу, но противоположны по знаку. Электрическое поле действует как на электроны, так и на ионные остовы. Суммарная сила со стороны электрического поля, действующая на электронную систему, равна силе со стороны электрического поля на ионные остовы, но противоположно ей направлена. Сумма этих двух сил, дающая силу со стороны электрического поля на всю проволоочку, равна нулю; см. рис. 3, отличие которого от рис. 2 только в одном: мы «вспомнили», что электрическое поле действует не только на электроны, но и на ионные остовы кристалла. Для простоты считается, что каждый атом металла «отдаёт» всему кристаллу один электрон, который далее участвует в проводимости. В меди лишь один электрон из 29 электронов атома отрывается от атома и становится принадлежностью всего куска металла (становится электроном проводимости). Отданный атомом всему кристаллу электрон не покидает металл, но может сравнительно свободно перемещаться по всему кристаллу. Большая часть электронов не покидает атомы, образуя вместе с атомными ядрами атомные остовы. При потере одного электрона (с зарядом $-e$) атом приобретает электрический заряд $+e$. В меди концентрация электронов проводимости равна концентрации атомов (ионных остовов) в кристалле:

$$\begin{aligned} n_e &= n_{\text{атомов}} = n_i = \frac{\rho'}{M/N_A} = \frac{\rho'}{M} N_A = \\ &= \frac{8,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{63,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль} = \\ &= 8,47 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{м}^3}. \end{aligned}$$

«Алгебра» сил довольно проста:

$\vec{F}_e = N_e \cdot (-e)\vec{E}$ (сумма сил, действующих на все электроны проводимости проволоочки со стороны электрического поля);

$\vec{F}_i = N_i \cdot (+e)\vec{E} = -\vec{F}_e$ (сумма сил, действующих на все ионные остовы проволоочки со стороны электрического поля); $N_e = N_i$;

$\vec{F}_e + \vec{F}_{\text{сопр}} = 0$ (сумма сил на подсистему электронов проводимости в стационарных условиях);

$\vec{F}_{\text{сопр}} = \vec{F}_{i \rightarrow e} = -\vec{F}_{e \rightarrow i}$ (по третьему закону Ньютона);

$\vec{F}_{e \rightarrow i} + \vec{F}_i = 0$ (сумма сил на ионные остовы в стационарных условиях);

$\vec{F}_{i \rightarrow e} + \vec{F}_{e \rightarrow i} + \vec{F}_e + \vec{F}_i = 0$ (сумма сил, действующих на все электроны и на все ионные остовы проволоочки; учтены как силы со стороны электрического поля, так и силы со стороны одной подсистемы на другую).

Теперь разберёмся со вторым вопросом «Как большая сила $F_{\text{сопр}}$ может вызвать маленькое изменение импульса подсистемы электронов проводимости?»

При протекании по металлу электрического тока электрическое поле разгоняет электроны проводимости, непрерывно увеличивая их импульс. Одновременно сопротивление со стороны атомов кристаллической решётки действует в прямо противоположном направлении, уменьшая их импульс (стремясь обнулить его). При протекании постоянного электрического поля (при этом ускорение электронов равно нулю, а скорость упорядоченного движения постоянна) два этих процесса компенсируют друг друга: $\Delta P_{\text{эл.поля}} - \Delta P_{\text{сопр}} = 0$, или иначе $F_{\text{эл.поля}} \Delta t - F_{\text{сопр}} \Delta t = 0$ для любого промежутка времени Δt . Оценим

время τ , необходимое, чтобы силы сопротивления «обнулили» импульс всех электронов проводимости проволоочки

$$P_{\Sigma} = N_e m_e v = n \cdot S l \cdot m_e \cdot \frac{J/S}{en} \approx \\ \approx 8,5 \times 10^{-13} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

(см. (10)) при мгновенном выключении электрического поля:

$$\Delta t = \frac{P_{\Sigma}}{F_{\text{сопр}}} \approx \frac{8,5 \cdot 10^{-13}}{34} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ с.} \quad (11)$$

Это чрезвычайно малое время (вовсе не секунды, даже не сотые её доли): силы сопротивления со стороны атомных остовов кристалла чрезвычайно интенсивно тормозят подсистему электронов проводимости.

В равной мере велик и эффект электрического поля. В отсутствие сопротивления за время Δt подсистема электронов проволоочки приобрела бы импульс

$$P_{\Delta t} = N_e \cdot e E \cdot \Delta t = n_e l S \cdot e \frac{U}{l} \Delta t = \\ = n_e S \cdot e \cdot \varepsilon R / (R+r) \Delta t \approx \\ \approx n_e S \cdot e \cdot \varepsilon R / r \Delta t = \\ = n_e S \cdot e \cdot \varepsilon \rho \frac{l}{S \cdot r} \Delta t = n_e e \cdot \varepsilon \rho \frac{l}{r} \Delta t = \\ = 8,4 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-16} \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \times \\ \times \frac{5,0 \cdot 10^{-2}}{1,5} \cdot 4,5 \cdot \Delta t \approx 34 \cdot \Delta t \text{ кг} \cdot \text{м/с}, \quad (12)$$

т.е. за одну секунду – импульс 34 кг · м/с. При этом по проволочке протекал ток

$$J_{\Delta t} = en_e v \cdot S = \frac{e}{m_e} n_e S l \cdot m_e v \frac{1}{l} = \\ = \frac{e}{m_e} P_{\Delta t} \cdot \frac{1}{l} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{0,91 \cdot 10^{-30}} 34 \cdot \Delta t = \\ = 1,2 \cdot 10^{14} \text{ А},$$

с невообразимо большой плотностью тока

$$j_{\Delta t} = \frac{J_{\Delta t}}{S} \approx \frac{1,2 \cdot 10^{14} \Delta t}{0,79 \cdot 10^{-6}} \approx 1,5 \cdot 10^{20} \text{ А/м}^2. \quad (14)$$

Скорость упорядоченного движения электронов должна была бы стать невозможно большой

$$v_{\Delta t} = \frac{j_{\Delta t}}{en_e} \approx \frac{1,5 \cdot 10^{20} \cdot \Delta t}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,4 \cdot 10^{28}} \approx \\ \approx 1,1 \cdot 10^{10} \text{ м/с},$$

больше скорости света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с). Реально такого разгона электронов электрическим полем нет благодаря «малому» сопротивлению проволоочек.

Для электронов в проволочке, соединяющей полюса батарейки (см. рис. 1) $v \approx 0,3$ мм/с (см. (3)). И эта скорость кажется большинству учащихся неправдоподобной, теперь слишком маленькой: электрону, чтобы преодолеть расстояние в 5 см (длину проволоочки), понадобятся почти 3 минуты! Весьма трудно согласовать столь малую скорость движения электронов с тем фактом, что, например, лампочка карманного фонаря включается практически сразу после того, как мы нажмём кнопку «Вкл.» фонарика.

Удивление рассеется, если понять, что нет никакой необходимости, чтобы электроны в проводах за малую долю секунды прошли от одного полюса батарейки к лампочке, затем прошли по нити лампочки, а далее ушли к другому полюсу батарейки. Требуется лишь достаточно *быстро и одновременно* привести в движение все электроны проводимости в проводах. Это и будет означать, что пошёл ток.

Ситуация здесь похожа на ту, что мы имеем с водой в водопроводных трубах. Если вы знаете, что вода к вам поступает, скажем, из водоподготовки Х, то вы, открывая кран, разумеется, не подумаете, что вода, которая вот-вот потекла из крана, лишь мгновением раньше покинула очистные сооружения Х и успела преодо-

леть весь путь (в несколько километров) от них до вашей квартиры. Из крана в данное мгновение потекла вода, которая покинула очистные сооружения X много раньше. И она уже давно была в трубе, готовая вытечь из вашего крана. Она уже и в вашей квартире непосредственно перед краном находилась, возможно, несколько часов. Нужно было лишь «открыть ей ход» и «подтолкнуть».

Что же «подталкивает» электроны в проводах? Электрическое поле. В проводниках для того, чтобы в них установилось «толкающее» электрическое поле, требуется весьма незначительное время – порядка длины провода L , делённой на скорость света: $L/(3 \times 10^8 \text{ м/с})$. Даже при длине провода в 3 тысячи километров оно составляет всего 1/100 секунды. Для бытовых проводов это время много меньше, поэтому свет в комнате загорается практически сразу после щелчка выключателя.

Итак, сопротивление, оказываемое атомами кристаллической решётки на движение электронов, – вещь чрезвычайно важная. Без него не объяснишь вещей, вполне обычных в электротехнике.

А как объяснить самую обычную «вещь» в электротехнике – закон Ома? Почему сила тока в законе Ома, $J = U/R$, пропорциональна именно первой степени напряжения? Выше уже говорилось, что постоянство скорости упорядоченного движения электронов (постоянство тока) при постоянном напряжении обеспечивает сопротивление, оказываемое движению электронов атомами кристаллической решетки, и (!) то, что эта сила сопротивления пропорциональна скорости. Не зависящая от скорости сила сопротивления не может обеспечить выполнимость закона Ома.

Причина здесь та же, что и в известном примере из механики. Пусть санки скатываются с горки с углом наклона α и коэффициентом трения скольжения μ между полозьями санок и горкой. На санки вдоль горки будут действовать две силы – «скатывающая сила» $mg \sin \alpha$, компонента силы тяжести вдоль направления спуска, и сила трения

$$F_{\text{тр}} = \mu \cdot mg \cos \alpha.$$

Санки при этом будут двигаться с постоянным ускорением

$$a = g \sin \alpha - \mu \cdot g \cos \alpha,$$

а не с постоянной скоростью.

В случае электрона в металле ситуация другая. Пусть в некоторый (начальный) момент времени $t = 0$ в металле появляется электрическое поле $\vec{E}$ (например, за счёт подключения металлической проволоки к полюсам батарейки). Запишем второй закон Ньютона для отдельного электрона проводимости

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} + \vec{f}_{\text{сопр}} \quad (16)$$

и учтём зависимость силы сопротивления, действующей на электрон со стороны атомов кристалла, от скорости $\vec{v}$ упорядоченного движения электрона

$$\vec{f}_{\text{сопр}} = -\alpha \vec{v}. \quad (17)$$

Мы сразу написали правильную зависимость силы сопротивления от скорости – линейную зависимость. В результате имеем дифференциальное уравнение

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \alpha \vec{v}. \quad (16')$$

Мы не станем его решать (хотя старшеклассникам это уже вполне доступно). Немного порассуждаем. Будем считать, что в момент включения электрического поля $t = 0$ скорость упорядоченного движения электронов равнялась нулю $\vec{v}(0) = 0$.

Нулю в этот момент равнялась и сила сопротивления (17). Электрон под действием электрического поля начнёт разгоняться, т.е. начнёт увеличивать свою скорость упорядоченного движения (в направлении против поля: знак заряда у электрона отрицательный). С увеличением скорости появится и начнёт расти сила сопротивления. При этом замедлится разгон электрона. Разгон электрона вовсе прекратится, когда сила сопротивления вырастет настолько, что сумма сил $-e\vec{E} - \alpha\vec{v}$ обратится в нуль. Формально математически это произойдёт не в какой-то определённый момент времени, но, как говорят математики, асимптотически при $t \rightarrow \infty$. Не стоит опасаться бесконечности (к вопросу о ней мы ещё вернемся). Действуем формально. При стремлении $-e\vec{E} - \alpha\vec{v}$ к нулю ускорение электрона стремится к нулю $\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow 0$, а скорость стремится к значению

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}_\infty = -\frac{e\vec{E}}{\alpha}. \quad (18)$$

Плотность тока при этом стремится к значению

$$\vec{j} \rightarrow (-e)n\vec{v}_\infty = \frac{ne^2}{\alpha}\vec{E}, \quad (19)$$

а сила тока $J = jS$ стремится к величине

$$J = jS \rightarrow \frac{ne^2}{\alpha}SE. \quad (20)$$

С учётом связи между напряжённостью поля и напряжением $E = \frac{U}{l}$ получаем закон Ома – пропорциональность электрического тока и напряжения

$$J \rightarrow \frac{ne^2}{\alpha}S\frac{U}{l} \Rightarrow J \propto U. \quad (21)$$

Если ввести обозначение для коэффициента пропорциональности в формуле (21)

$$\frac{1}{R} = \frac{ne^2}{\alpha} \cdot \frac{S}{l}, \quad (22)$$

то получаем закон Ома в стандартных обозначениях.

Вспомним ещё формулу для выражения сопротивления проводника через удельное сопротивление ρ , длину проводника l и площадь поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S};$$

тогда можно написать формулу для удельного сопротивления

$$\rho = \frac{\alpha}{ne^2}. \quad (23)$$

В неё вошла величина α , о которой мы пока не говорили. Из уравнения (16') видно, что величины

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ и } \alpha\vec{v}$$

имеют одинаковую размерность. Это значит, что величина α измеряется в единицах кг/с, т.е. величина α может быть представлена в виде дроби

$$[\alpha] = \frac{M}{T}.$$

В рассматриваемой задаче у нас ускоряется электрон, а не какая-то другая частица. Поэтому вполне логично положить массу M равной массе именно электрона, $M = m_e$, т.е.

$\alpha = \frac{m_e}{\tau}$. В результате получаем

$$\rho = \frac{m_e}{ne^2} \frac{1}{\tau} \quad (23')$$

или

$$\tau = \frac{m_e}{ne^2} \frac{1}{\rho}. \quad (23'')$$

Подстановка числовых значений для меди даёт

$$\tau \approx \frac{0,91 \cdot 10^{-30}}{8,4 \cdot 10^{28} (1,6 \cdot 10^{-19})^2 1,7 \cdot 10^{-8}} \approx (24) \\ \approx 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ с,}$$

что совпадает с оценкой (11). Совпадение, разумеется, не случайное.

Скажем ещё, почему не стоит опасаться предельного перехода $t \rightarrow \infty$ при получении формулы (18). Предельный переход нужно понимать так, что мы интересуемся временами много больше не возраста Вселенной, но много больше очень малой величины $\tau = 2,5 \cdot 10^{-14}$ с. В большинстве экспериментов мы имеем дело с временами, безусловно, много большими этой величины.

Итак, оказывается, закон Ома (пропорциональность силы тока напряжению) связан с линейной зависимостью от скорости силы сопротивления со стороны атомов кристаллической решётки на электроны проводимости, $\vec{f}_{\text{сопр}} = -\alpha \vec{v}$.

Если бы зависимость силы сопротивления была другой, закон Ома имел бы другой вид. Например, пусть $f_{\text{сопр}} \propto v^2$, т.е.

$$\vec{f}_{\text{сопр}} = -\beta \cdot v \cdot \vec{v}.$$

Тогда второй закон Ньютона для электрона запишется в виде

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \beta \cdot v \cdot \vec{v}. \quad (16^*)$$

Повторяя приведённые выше рассуждения, получаем в этом случае

$$t \rightarrow \infty: \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow 0 \Rightarrow v^2 \rightarrow v_{\infty}^2 = \frac{eE}{\beta}, \quad (18^*)$$

т.е. $v_{\infty} \propto \sqrt{E}$ и

$$j \rightarrow env_{\infty} \propto \sqrt{E}, \quad (19^*)$$

$$J = jS \rightarrow J_{\infty} \propto \sqrt{E}. \quad (20^*)$$

Тогда с учётом $E = \frac{U}{l}$ получаем

$$J_{\infty} \propto \sqrt{U}. \quad (21^*)$$

Какую зависимость силы тока от напряжения мы реально (в эксперименте) видим в металлах? Линейную:

$J = \frac{U}{R}$, так что сопротивление R практически не зависит от приложенного к металлу напряжения вплоть до таких больших значений напряжения, что проводник начинает разрушаться. Это и убеждает физиков считать, что сила сопротивления $\vec{f}_{\text{сопр}} = -\alpha \vec{v}$, действующая на электрон проводимости со стороны атомов кристаллической решётки, пропорциональна именно первой степени скорости упорядоченного движения $\vec{v}$.

Подчеркнём: речь идёт именно о скорости *упорядоченного* движения электронов под действием электрического поля. Электроны в металле и в отсутствие электрического поля движутся, причём движутся очень быстро. Скорость этого, хаотического, движения электронов в металлах порядка 10^6 м/с (всего раз в 150 меньше скорости света в вакууме, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с). Важная особенность хаотического движения электронов состоит в том, что вся масса электронов как целое никуда не перемещается: в коллективе, состоящем из большого числа электронов в отсутствие тока, сколько электронов движется в одном направлении, столько же движется в противоположном направлении.

Когда включается электрическое поле (например, к проводнику подключают батарейку), электроны металла начинают сложное движение. Оно напоминает движение молекул воздуха в вагоне. Молекулы движутся и в покоящемся вагоне, притом довольно быстро – со скоростями порядка 450 м/с (быстрее скорости звука в воздухе). Когда вагон трогается,

вся масса молекул в вагоне начинает перемещаться вместе с вагоном с весьма малой скоростью, продолжая быстрое хаотическое движение. Примерно такая картина наблюдается и в металле, когда по нему начинает течь электрический ток. Электроны не перестают очень быстро хаотически двигаться. Но на это движение накладывается медленное движение всей массы электронов как целого, например, со скоростью 0,3 мм/с (см. выше оценку (3)). Всё же сила сопротивления оказывается пропорциональной не большой скорости хаотического движения электронов, а малой скорости упорядоченного движения. Можно сказать, что этому нас учит закон Ома.

В большинстве металлов он очень точно выполняется вплоть до плотностей тока $j = J/S$ (S – площадь поперечного сечения проводника), приводящих к разрушению металла [1]. Для меди критическая плотность тока порядка

$$10^8 \text{ А/м}^2 = 10^4 \text{ А/см}^2 = 10^2 \text{ А/мм}^2.$$

Невелики и предельно допустимые напряжённости электрического поля в металлах – для меди примерно 2 В/м, т.е. всего 0,02 В/см.

В металлах отклонения от закона Ома (линейной зависимости тока от

напряжения) обычно не превышают долей процента, т.е. в формуле $J = U/R$ сопротивление R можно с хорошей точностью считать не зависящим от напряжения U .

Иная ситуация в полупроводниках. В них на много порядков меньше концентрации носителей заряда, участвующих в переносе тока. Поэтому при тех же напряжёностях электрического поля, что и в металлах, джоулев нагрев в полупроводниках значительно слабее. В итоге в полупроводниках вполне могут существовать, например, поля с напряжённостью 10^7 В/м. Однако ещё раньше, при более слабых полях [2, 3], в полупроводниках наблюдается заметное отклонение от линейной зависимости $J = U/R$. Это можно трактовать так: формально оставим формулу $J = U/R$, но скажем, что сопротивление зависит от приложенного напряжения

$$J = U/R(U).$$

Зависимости $R(U)$ бывают весьма сложными, и мы их обсуждать здесь не будем; прямого отношения к нашим вопросам они не имеют. Всё же и в полупроводниках область применимости закона Ома чрезвычайно широкая.

Список литературы

1. Парселл Э. Берклеевский курс физики, т. II: Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1971. – 448 с.
2. Левинштейн М. Е., Симин Г. С. Знакомство с полупроводниками. – М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 208 с. (С. 196–197.)
3. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников. – М.: Наука, 1977. – 672 с. (Гл. XVI)