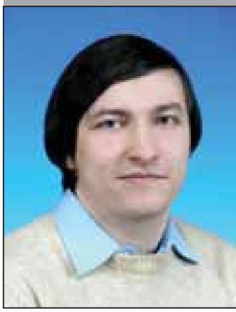

Чудновский Александр Витальевич
Аспирант факультета общей и прикладной физики Московского физико-технического института (МФТИ), преподаватель кафедры общей физики МФТИ.

Увеличение линзы

В статье рассмотрены методы решения задач, связанных с поперечным, продольным и угловым увеличениями тонкой линзы. Выведены формулы для вычисления данных увеличений, и проанализирована их связь с качественными характеристиками получаемого изображения. Разобраны задачи уровня вступительных экзаменов. Предложены аналогичные задачи для самостоятельного решения.

1. Введение

Элементом, который чаще всего встречается в задачах по геометрической оптике, несомненно является линза. Поэтому для успешного решения олимпиадных и экзаменационных задач по оптике необходимо знание свойств линзы, основным из которых является создаваемое ею увеличение.

В большинстве случаев хорошим приближением для реальной линзы является модель *тонкой линзы*, в которой предполагается, что углы между лучами, создающими изображение и главной оптической осью, малы, а также что лучи мало удаляются или приближаются к оптической оси при прохождении линзы. Все дальнейшие расчёты будут выполнены в рамках модели *тонкой линзы*.

Зная положение предмета относительно линзы и её фокусное расстояние, можно определить положение изображения двумя основными способами: построением и вычислением. Второй способ позволяет производить количественный анализ, а потому является более предпочтительным.

Рассмотрим в качестве предмета отрезок AB, перпендикулярный главной оптической оси и расположенный на расстоянии a от линзы с фокусным расстоянием f (рис. 1). На рисунке изображён частный случай, когда предмет и его изображение находятся на одинаковых расстояниях от линзы, однако приведённые ниже формулы справедливы и в общем случае произвольного положения предмета. Фокусы линзы на всех рисунках отмечены буквами F.

В соответствии с правилами построения в линзе изображение будет иметь вид отрезка $A'B'$, перпендикулярного главной оптической оси, а расстояние b от него до линзы связано с a и f формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Отсюда можно найти положение предмета при известном положении изображения:

$$a = \frac{bf}{b - f}, \qquad (2)$$

либо положение изображения при известном положении предмета:

$$b = \frac{af}{a - f}. \qquad (3)$$

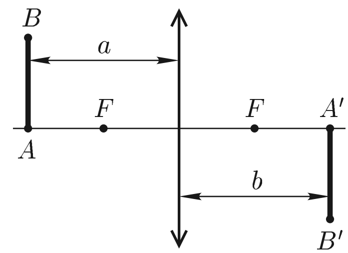

Рис. 1

2. Правило знаков

Во все приведённые в статье расчётные формулы величины a, b и f следует подставлять с учётом знака.

1. Фокусное расстояние $f > 0$ для *собирающей* (положительной) линзы и $f < 0$ для *рассеивающей* (отрицательной). Поясним на примерах. Если в задаче сказано «собирающая линза с фокусным расстоянием 10 см», то в формулы подставляем именно $f = 10$ см. Если в задаче сказано «рассеивающая линза с фокусным расстоянием 10 см», то в формулы подставляем $f = -10$ см. А если в условии введено обозначение для f с неправильным знаком, например, сказано «рассеивающая линза с фокусным расстоянием $f = 10$ см», то в формулы вместо f следует подставлять $-|f|$, так как менять данные в условии обозначения обычно не разрешается. Если в условии не указан тип линзы (собирающая или рассеивающая), но дано значение её фокусного расстояния, то по его знаку можно однозначно определить тип линзы.

2. Величина a является по сути координатой предмета вдоль оси, совпадающей с главной оптической осью и направленной в ту сторону, *откуда* идут лучи (на рисунке 1 ось a направлена влево). Если предметом является материальное тело, то лучи идут *от него* и всегда $a > 0$. Такой предмет называется *действительным*. Существует понятие *мнимого предмета*, который возникает как изображение в предыдущей оптической системе и может располагаться по другую сторону от линзы (в области $a < 0$), но этот случай мы рассматривать не будем. Далее всюду предполагается $a > 0$. Вообще, в большинстве литературы, если не оговорено особо, то под предметом подразумевается действительный предмет.

3. Аналогично b — координата изображения вдоль оси, совпадающей с главной оптической осью, но направленной в ту сторону, *куда* идут лучи (на рисунке 1 ось b направлена вправо). Изображение — это место пересечения лучей или их продолжений, причём в случае пересечения самих лучей изображение называется *действительным*, а в случае пересечения их продолжений — *мнимым*. Лучи, создающие изображение в линзе, начинаются от плоскости линзы, следовательно, если $b > 0$, то изображение действительное, а если $b < 0$, то — мнимое.

Продемонстрируем использование правила знаков на примерах.

Задача 1. При каких расстояниях a от предмета до линзы с фокусным расстоянием f будет получаться действительное изображение, а при каких —

мнимое? Рассмотрите случаи собирающей и рассеивающей линз.

Решение. Будем искать a, при которых изображение будет действительным, тогда при других a оно будет мнимым. Изображение будет действительным, если $b > 0$, или с учётом (3), если

$$\frac{af}{a-f} > 0. \qquad (4)$$

1. Пусть $f > 0$, тогда (4) эквивалентно $a > f$, что согласуется с известным правилом: собирающая линза даёт действительное изображение, если предмет находится дальше фокуса.

2. Пусть $f < 0$, тогда $f = -|f|$ и (4) можно записать в виде:

$$-\frac{a|f|}{a+|f|} > 0,$$

что невозможно при $a > 0$. Таким образом, рассеивающая линза всегда создаёт мнимое изображение.

В задачах часто даются неявные указания на тип изображения и линзы.

Задача 2. На экране получено изображение карандаша в линзе. Определите тип линзы.

Решение. Мнимое изображение не может быть получено на экране, значит, изображение действительное. С помощью рассеивающей линзы нельзя получить действительное изображение, следовательно, линза собирающая.

3. Поперечное увеличение

Пусть l и l' — размеры предмета и его изображения, измеренные вдоль перпендикуляра к главной оптической оси, тогда *поперечное увеличение* $\Gamma_\perp$ определяется следующим образом: если изображение *прямое*, то $\Gamma_\perp = l'/l > 0$, а если изображение *перевёрнутое*, то $\Gamma_\perp = -l'/l < 0$.

В школе увеличение часто вводят как отношение l'/l без учёта знака, но это лишь затрудняет решение задач, так как приходится отдельно рассматривать случаи прямого и перевёрнутого изображений.

Изображения можно классифицировать на *увеличенные* (больше предмета, то есть $|\Gamma_\perp| > 1$) и *уменьшенные* (меньше предмета, или $|\Gamma_\perp| < 1$).

Для вычисления поперечного увеличения линзы рассмотрим оптическую схему (рис. 2), идейно совпадающую с изображённой на рисунке 1, но имеющую другие пропорции. Поскольку луч, проходящий через оптический центр O, не преломляется, то треугольники ABO и $A'B'O$ подобны, откуда

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{b}{a}.$$

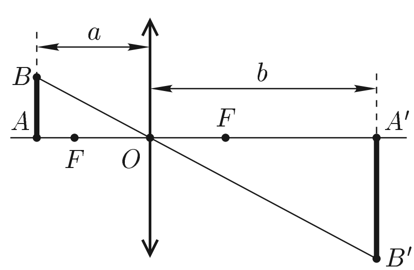

Рис. 2

Из построения видно, что изображение перевёрнутое, когда предмет и изображение находятся по разные стороны от линзы (то есть a и b одного знака), и что изображение прямое, когда предмет и изображение находятся по одну сторону от линзы (то есть a и b разных знаков), поэтому, исходя из определения поперечного увеличения,

$$\Gamma_\perp = -\frac{A'B'}{AB} = -\frac{b}{a}. \qquad (5)$$

Отметим, что в случае действительного предмета ($a > 0$) знаки b и $\Gamma_\perp$ всегда разные, следовательно, все действительные изображения перевёрнутые, а все мнимые — прямые.

Используя выражения (2) и (3), можно представить поперечное увеличение в трёх видах:

$$\Gamma_\perp = -\frac{b}{a}, \qquad (6)$$

$$\Gamma_\perp = \frac{1}{1 - a/f}, \qquad (7)$$

$$\Gamma_\perp = 1 - \frac{b}{f}. \qquad (8)$$

Выбирать одну из этих формул будем, исходя из известных величин в каждой конкретной задаче.

Задача 3. Найдите увеличение изображения, полученного на экране, если предмет расположен в 5 раз дальше от экрана, чем линза. Охарактеризуйте изображение качественно.

Решение. Изображение получено на экране, значит, оно действительное ($b > 0$) и $a + b = 5b$, откуда $a = 4b$. Используя (6), находим $\Gamma_\perp = -b/a = -1/4$, откуда видно, что изображение перевёрнутое и уменьшенное.

Задача 4. Найдите расстояния a от предмета до линзы с фокусным расстоянием f, при которых размер изображения на экране будет составлять 1/2, 1 и 2 от размеров предмета вдоль перпендикуляра к главной оптической оси.

Решение. Используя (7), находим

$$a = f\left(1 - \frac{1}{\Gamma_\perp}\right).$$

Изображение получено на экране, значит, оно действительное и перевёрнутое. Подставляя $\Gamma_{\perp 1} = -1/2$, $\Gamma_{\perp 2} = -1$ и $\Gamma_{\perp 3} = -2$, получим

$$a_1 = 3f, \quad a_2 = 2f, \quad a_3 = 1{,}5f.$$

Отметим, что увеличение $\Gamma_\perp = -1$ (сохранение исходного размера) наблюдается, когда предмет и изображение расположены на одинаковых и равных $2f$ расстояниях от линзы (рис. 1).

Задача 5. При каких расстояниях a от предмета до линзы с фокусным расстоянием f будет получаться увеличенное изображение, а при каких — уменьшенное? Рассмотрите случаи собирающей и рассеивающей линз.

Решение. Будем искать a, при которых изображение будет увеличенным, тогда при других a оно будет уменьшенным. Из условия $|\Gamma_\perp| > 1$, используя (7), получим:

$$|1 - a/f| < 1. \qquad (9)$$

1. Пусть $f > 0$, тогда (9) эквивалентно $a < 2f$, что согласуется с известным правилом: собирающая линза даёт увеличенное изображение, если предмет находится на расстоянии менее $2f$ от линзы.

2. Пусть $f < 0$, тогда $f = -|f|$ и (9) можно записать в виде: $|1 + a/|f|| < 1$, что невозможно при $a > 0$. Таким образом, рассеивающая линза всегда создаёт уменьшенное изображение.

Задача 6. Прямое изображение предмета в линзе с фокусным расстоянием f получено с четырёхкратным увеличением. На каком расстоянии x от изображения находится ближайший к нему фокус?

Решение. Воспользуемся (8):

$$\Gamma_\perp = 1 - \frac{b}{f} = 4,$$

откуда $b = -3f$. Вне зависимости от знаков b и f искомое расстояние

$$x = \big||b| - |f|\big| = 2|f|.$$

Поскольку изображение прямое, то оно мнимое, линза собирающая и $x = 2f$.

Задача 7. С помощью линзы с фокусным расстоянием f на экране получено изображение с трёхкратным увеличением. На сколько и в какую сторону следует передвинуть экран, чтобы, не перемещая линзу, на нём можно было получить изображение с пятикратным увеличением?

Решение. Изображение получено на экране, значит, оно действительное и перевёрнутое ($\Gamma_{\perp 1} = -3, \Gamma_{\perp 2} = -5$), а линза собирающая. Воспользуемся (8):

$$\Gamma_{\perp 1} = 1 - \frac{b_1}{f}, \qquad \Gamma_{\perp 2} = 1 - \frac{b_2}{f}.$$

Вычтем одно уравнение из другого и выразим смещение:

$$\Delta b = b_2 - b_1 = f(\Gamma_{\perp 1} - \Gamma_{\perp 2}) = 2f.$$

Поскольку $f > 0$, то $\Delta b > 0$ и экран нужно перемещать *от линзы*.

Встречаются задачи, в которых нахождение увеличения не является основным вопросом, а используется как дополнительный критерий.

Задача 8. С помощью тонкой линзы на экране получено уменьшенное изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние между предметом и экраном в 4,5 раза больше фокусного расстояния линзы. На каком расстоянии от линзы располагается предмет?

Решение. Изображение получено на экране, значит, оно действительное ($b > 0$) и можно записать:

$$a + b = \frac{9}{2}f, \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Исключая b, получаем:

$$2a^2 - 9fa + 9f^2 = 0,$$

откуда $a_1 = 3f$, $a_2 = 1{,}5f$. По формуле (7) рассчитаем увеличение для каждого из положений предмета: $\Gamma_{\perp 1} = -0{,}5$, $\Gamma_{\perp 2} = -2$. Поскольку по условию изображение уменьшенное, то выбираем первый корень.

4. Продольное увеличение

Пусть l и l' — размеры предмета и его изображения, измеренные вдоль главной оптической оси, и пусть изображение топологически подобно предмету (не разрывается), тогда *продольное увеличение* $\Gamma_\parallel$ определяется следующим образом: если предмет и изображение ориентированы вдоль главной оптической оси одинаково, то $\Gamma_\parallel = l'/l$, а если по-разному, то $\Gamma_\parallel = -l'/l$.

Прежде всего поясним условие неразрывности изображения. В соответствии со свойствами линзы изображение отрезка является отрезком всегда, кроме одного случая: если предмет пересекает фокальную плоскость собирающей линзы, то изображение его точки пересечения с фокальной плоскостью оказывается на бесконечности, а изображение самого предмета имеет вид двух лучей, уходящих на бесконечность. Для рассеивающей линзы подобного ограничения нет, и в ней изображение действительного предмета всегда неразрывно. В качестве математического пояснения происхождения данного условия отметим, что при $a = f$ знаменатель в формуле (3) обращается в ноль. Далее будут рассматриваться только неразрывные изображения.

В остальном определения поперечного и продольного изображений идейно идентичны. При определении знака продольного увеличения не используются такие характеристики изображения как *прямое* или *перевёрнутое*, так как по сложившейся традиции эти термины относятся только к ориентации изображения в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. Отметим также, что типы ориентации изображения вдоль и поперёк главной оптической оси не обязаны совпадать. Для лучшего понимания этого факта рассмотрим вспомогательный пример с зеркалом.

Задача 9. Охарактеризуйте ориентацию изображения и увеличение предмета в плоском зеркале.

Решение. Возьмём в качестве предмета прямоугольный треугольник ABC и построим его изображение $A'B'C'$ в зеркале (рис. 3). У плоского зеркала нет главной оптической оси, но в качестве её аналога можно рассматривать перпендикуляр к плоскости зеркала. Рассмотрев отрезки BC и $B'C'$, делаем вывод, что изображение прямое и $\Gamma_\perp = 1$. А на примере отрезков AB и $A'B'$ видим, что предмет и изображение симметричны относительно плоскости зеркала, то есть ориентированы поразному вдоль перпендикуляра к ней. Следовательно, по определению $\Gamma_\parallel = -1$. Итак, в продольном направлении изображение оказалось перевёрнутым, а в поперечном — прямым.

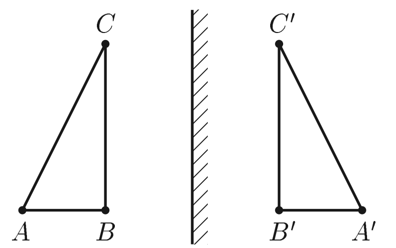

Рис. 3

Для вычисления продольного увеличения линзы рассмотрим предмет в форме отрезка AB, расположенного на главной оптической оси, и его изображение $A'B'$ (рис. 4). Пусть a_1, a_2, b_1 и b_2 — соответственно координаты точек A и B предмета и точек A' и B' изображения, тогда из выбора обозначений для точек следует $a_1 > a_2$.

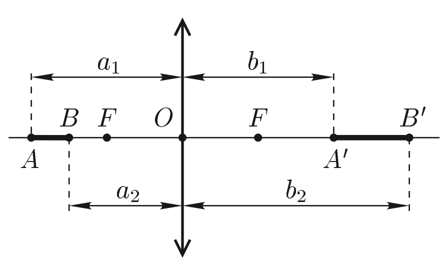

Рис. 4

Для выполнения условия неразрывности изображения достаточно, чтобы точки A и B находились по одну сторону от фокуса, точнее, чтобы выражения $(a_1 - f)$ и $(a_2 - f)$ были одного знака (в такой формулировке критерий правильно работает также в случаях рассеивающей линзы и мнимого предмета). Отсюда с учётом $a_1 > a_2$ следует, что

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} < \frac{a_2 f}{a_2 - f} = b_2. \qquad (10)$$

Неравенство $b_1 < b_2$ означает, что изображение будет ориентировано вдоль главной оптической оси так же, как и предмет (рис. 4), то есть $\Gamma_\parallel > 0$. Если же отрезок AB пересекает фокальную плоскость (точнее, выражения $(a_1 - f)$ и $(a_2 - f)$ имеют разные знаки), то $b_2 > b_1$ и $\Gamma_\parallel < 0$. Таким образом, знак продольного увеличения $\Gamma_\parallel$ однозначно определяет разрывность изображения.

Возвращаясь к рисунку 4, можно записать по определению:

$$\Gamma_\parallel = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

Используя (3) для обоих концов отрезка, получим после приведения к общему знаменателю и сокращения дроби:

$$\Gamma_\parallel = \frac{1}{1 - a_1/f} \cdot \frac{1}{1 - a_2/f}, \qquad (11)$$

или

$$\Gamma_\parallel = \Gamma_{\perp 1} \cdot \Gamma_{\perp 2}, \qquad (12)$$

где $\Gamma_{\perp 1}$ и $\Gamma_{\perp 2}$ — поперечные увеличения на концах отрезка.

По аналогии с увеличенным и уменьшенным изображениями можно ввести «удлинённое» ($|\Gamma_\parallel| > 1$) и «укороченное» ($|\Gamma_\parallel| < 1$) изображения, но эти определения не являются общепринятыми и встречаются крайне редко.

Все изложенные качественные свойства линзы, предмета и изображения сведены в приведённую далее обобщающую таблицу.

Задача 10. Концы палочки, пересекающей главную оптическую ось под неизвестным углом, расположены на расстояниях $a_1 = 2f$ и $a_2 = 5f$ от плоскости собирающей линзы с фокусным расстоянием f. Найдите продольное увеличение палочки.

Решение. Подчеркнём, что продольное увеличение — это увеличение вдоль главной оптической оси, а не вдоль какого-то избранного направления в предмете. В силу формулы линзы величина b зависит только от a и f, но не от расстояния от предмета до главной оптической оси. Таким образом, тот факт, что палочка не параллельна главной оптической оси, никак не влияет на продольное увеличение. По формуле (11) находим $\Gamma_\parallel = 1/4$.

Условие	Свойство
$f > 0$	Собирающая линза
$f < 0$	Рассеивающая линза
$a > 0$	Действительный предмет
$a < 0$	Мнимый предмет
$b > 0$	Действительное изобр.
$b < 0$	Мнимое изобр.
$\Gamma_\perp > 0$	Прямое изобр.
$\Gamma_\perp < 0$	Перевёрнутое изобр.
$\|\Gamma_\perp\| > 1$	Увеличенное изобр.
$\|\Gamma_\perp\| < 1$	Уменьшенное изобр.
$\Gamma_\parallel > 0$	Неразрывное изобр.
$\Gamma_\parallel < 0$	Разрывное изобр.
$\|\Gamma_\parallel\| > 1$	«Удлинённое» изобр.
$\|\Gamma_\parallel\| < 1$	«Укороченное» изобр.

Задача 11. Концы палочки изображаются в линзе с поперечными увеличениями $\Gamma_{\perp 1}$ и $\Gamma_{\perp 2}$. Найдите продольное увеличение палочки. Выполните расчёт для двух случаев:

1. $\Gamma_{\perp 1} = -2$, $\Gamma_{\perp 2} = -3$;
2. $\Gamma_{\perp 1} = -4$, $\Gamma_{\perp 2} = 5$.

Решение. По формуле (12) для каждого из случаев находим:

$$\Gamma_{\parallel 1} = 6, \qquad \Gamma_{\parallel 2} = -20.$$

Поскольку $\Gamma_{\parallel 2} < 0$, то изображение разрывное и продольное увеличение для него не определено.

Задача 12. Маленькое тело расположено на расстоянии $1{,}5f$ от собирающей линзы с фокусным расстоянием f. Во сколько раз объём изображения тела больше объёма самого тела?

Решение. Поскольку тело маленькое, то будем полагать найденное по формуле (7) поперечное увеличение $\Gamma_\perp = -2$ одинаковым для всех точек тела, а продольное увеличение, как следует из (12), $\Gamma_\parallel = \Gamma_\perp^2 = 4$. Пусть Δx, Δy и Δz — размеры тела соответственно вдоль главной оптической оси и вдоль двух перпендикулярных ей и взаимно-перпендикулярных направлений, тогда размеры изображения:

$$\Delta x' = \Gamma_\parallel \Delta x,$$
$$\Delta y' = \Gamma_\perp \Delta y,$$
$$\Delta z' = \Gamma_\perp \Delta z.$$

Отношение объёмов

$$\frac{V'}{V} \sim \frac{\Delta x' \Delta y' \Delta z'}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \Gamma_\parallel \Gamma_\perp^2 = \Gamma_\perp^4 = 16.$$

Задача 13. Предмет имеет форму квадрата, две стороны которого параллельны главной оптической оси линзы, а две другие пересекают ось под прямым углом и изображаются с поперечными увеличениями $\Gamma_{\perp 1} = -1$ и $\Gamma_{\perp 2} = -2$. Как выглядит изображение квадрата? Во сколько раз площадь изображения больше площади предмета? Можно считать, что центр квадрата лежит на главной оптической оси.

Решение. Увеличенное изображение одной из сторон квадрата возможно только в собирающей линзе. Из формулы (7) находим расстояния от перпендикулярных оптической оси сторон квадрата до линзы: $a_1 = 2f$, $a_2 = 1{,}5f$. Изображение квадрата имеет вид трапеции (рис. 5).

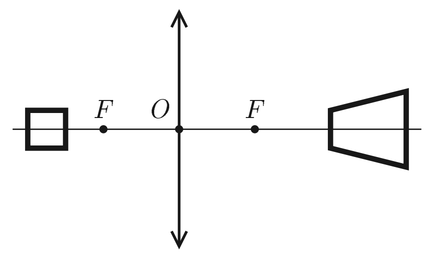

Рис. 5

Пусть l — длина стороны квадрата, тогда основания трапеции $l_1 = |\Gamma_{\perp 1}| l$ и $l_2 = |\Gamma_{\perp 2}| l$, а её высота $h = \Gamma_\parallel l = \Gamma_{\perp 1}\Gamma_{\perp 2} l$. Отношение площадей:

$$\frac{S'}{S} = \frac{h(l_1 + l_2)/2}{l^2} = \frac{1}{2}\Gamma_{\perp 1}\Gamma_{\perp 2}|\Gamma_{\perp 1} + \Gamma_{\perp 2}| = 3.$$

Если бы центр квадрата не лежал на главной оптической оси, то изображение было бы несимметричной трапецией, но её площадь осталась бы прежней.

5. Угловое увеличение

Рассмотрим луч, прошедший через линзу (рис. 6). Пусть до линзы он шёл под углом α к главной оптической оси, а после — под углом β, тогда *угловое увеличение* $\Gamma_\angle$ определяется следующим образом: если оба луча отклоняются в одну сторону от оси, то $\Gamma_\angle = \beta/\alpha$, а если в разные, то $\Gamma_\angle = -\beta/\alpha$.

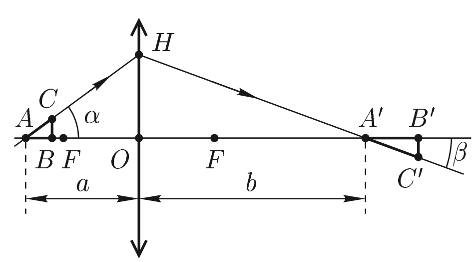

Рис. 6

При расчётах углового увеличения углы α и β предполагаются малыми, то есть используются приближения $\operatorname{tg}\alpha \approx \approx \sin\alpha \approx \alpha \ll 1$ и $\operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta \approx \beta \ll 1$. Продемонстрируем два способа вывода формулы для углового увеличения.

Способ 1. Пусть A и A' — точки пересечения луча с главной оптической осью, тогда A' является изображением точки A, $a = AO$, $b = A'O$ (рис. 6). Из треугольников AOH и $A'OH$:

$$\alpha \approx \frac{OH}{AO}, \qquad \beta \approx \frac{OH}{A'O}.$$

Поскольку лучи отклоняются в разные стороны от главной оптической оси, то по определению

$$\Gamma_\angle = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{AO}{A'O} = -\frac{a}{b} = \frac{1}{\Gamma_\perp}.$$

Способ 2. Построим маленький прямоугольный треугольник ABC с катетом AB, лежащим на главной оптической оси, и катетом BC, перпендикулярным ей (рис. 6). Его изображение — треугольник $A'B'C'$ — будет иметь катет $A'B'$, лежащий на главной оптической оси, и катет $B'C'$, перпендикулярный ей. Из этих треугольников:

$$\alpha \approx \frac{BC}{AB}, \qquad \beta \approx \frac{B'C'}{A'B'}.$$

Поскольку треугольники маленькие, то

$$-\frac{B'C'}{BC} \approx \Gamma_\perp, \quad \frac{A'B'}{AB} = \Gamma_\parallel \approx \Gamma_\perp^2, \quad (13)$$

где $\Gamma_\perp$ — поперечное увеличение, рассчитанное для точки A. Лучи отклоняются в разные стороны от главной оптической оси, значит, по определению

$$\Gamma_\angle = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-B'C'/BC}{A'B'/AB} = \frac{\Gamma_\perp}{\Gamma_\parallel} = \frac{1}{\Gamma_\perp}.$$

Итак, угловое увеличение

$$\Gamma_\angle = \frac{1}{\Gamma_\perp}. \qquad (14)$$

Далее рассматриваются наиболее сложные задачи, так как для их решения требуется понимание всех трёх типов разобранных увеличений.

Задача 14. Муха пересекает главную оптическую ось линзы под углом α и со скоростью v. С какой скоростью u и под каким углом β к оптической оси движется изображение мухи в этот момент? Поперечное увеличение $\Gamma_\perp$ изображения мухи известно. Углы α и β считайте малыми.

Решение. Воспользуемся рисунком 6 и обозначениями, введёнными во втором способе вывода формулы для углового увеличения. Пусть муха находится в точке A и движется вдоль AH, тогда изображение мухи находится в точке A' и движется вдоль HA', откуда

$$\beta = |\Gamma_\angle| \cdot \alpha = \frac{\alpha}{|\Gamma_\perp|}.$$

За малое время Δt муха переместится в точку C, а её изображение — в точку C'. Проекции перемещения мухи на главную оптическую ось и на перпендикуляр к ней:

$$AB = v_x\Delta t, \quad BC = v_y\Delta t.$$

Аналогично для её изображения:

$$A'B' = u_x\Delta t, \quad B'C' = u_y\Delta t.$$

Используя соотношения (13), получим:

$$u_x = \Gamma_\parallel v_x, \qquad u_y = |\Gamma_\perp| v_y,$$

откуда

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\Gamma_\parallel^2 v_x^2 + \Gamma_\perp^2 v_y^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{\Gamma_\parallel^2 v_x^2} = \Gamma_\parallel v_x \approx \Gamma_\parallel v = \Gamma_\perp^2 v,$$

где были использованы приближения: $\Gamma_\perp v_y \ll \Gamma_\parallel v_x$ (следствие $\beta \ll 1$) и $v_x \approx \approx v$ (следствие $\alpha \ll 1$).

Отметим, что результат ($u = \Gamma_{\|}v$) можно было записать сразу, если догадаться, что при малых углах поперечная составляющая скорости почти не влияет на модуль скорости.

Задача 15. Спичка расположена вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием f. Изображение спички в 10 раз короче самой спички. Луч, вышедший из спичечной головки под углом $1°$ к оси, после прохождения через линзу пошёл под углом $5°$ к оси. На каком расстоянии от линзы находится второй конец спички?

Решение. В месте расположения спичечной головки модуль углового увеличения $|\Gamma_{\angle}| = 5°/1° = 5$. В условии не указано, в одну ли сторону отклоняется луч до и после линзы, поэтому знак увеличения пока не известен.

Из формулы (14) получим модуль поперечного увеличения в месте расположения спичечной головки:

$$|\Gamma_{\perp 1}| = \frac{1}{|\Gamma_{\angle}|} = 0{,}2.$$

По условию продольное увеличение спички $\Gamma_{\|} = 0{,}1$, тогда из (12) находим модуль поперечного увеличения для второго конца спички:

$$|\Gamma_{\perp 2}| = \frac{\Gamma_{\|}}{|\Gamma_{\perp 1}|} = 0{,}5.$$

Поскольку оба поперечных увеличения по модулю меньше 1, то спичка находится на расстоянии более $2f$ от линзы, а её изображение действительное и перевёрнутое ($\Gamma_{\perp 2} = -0{,}5$). Из формулы (7) выражаем a, при котором достигается это увеличение: $a = 3f$.

6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 16. С помощью тонкой линзы с фокусным расстоянием f на экране получено изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние между предметом и экраном в 9 раз больше расстояния от предмета до ближайшего к нему фокуса линзы. На каком расстоянии a от линзы находится предмет?

Ответ. $a = 1{,}5f$.

Задача 17. Расстояние между предметом и линзой в 2 раза больше расстояния между фокусами. Найдите поперечное увеличение изображения.

Ответ. $\Gamma_{\perp 1} = -1/3$, $\Gamma_{\perp 2} = 1/5$.

Задача 18. Короткая палочка длиной l расположена вдоль главной оптической оси линзы. Длина её изображения $l_1 = 2l$. Палочку повернули так, что она оказалась под углом $\alpha = 45°$ к оптической оси, а центр палочки остался на прежнем месте. Найдите длину l_2 её нового изображения в линзе.

Ответ. $l_2 = l\sqrt{3}$.

Задача 19. На каком расстоянии от линзы с фокусным расстоянием f следует расположить маленький предмет, чтобы его продольное увеличение в 8 раз превосходило угловое? Для какой линзы это возможно?

Ответ. $a = f/2$, $f > 0$.