Дворянинов Сергей Владимирович
*Кандидат физико-математических наук, доцент.
Редактор журнала «Математика в школе»,
автор статей в журналах «Квант»,
«Математическое образование», «Физика»,
«Математика для школьников», «Фрактал».*

Устойчивость и трение, энергия и эвольвента окружности

Нельзя сказать, что качели – только детская забава. И взрослый человек не прочь на досуге провести время в кресле-качалке. В повторяющихся движениях вверх-вниз, туда-сюда есть что-то завораживающее, сродни шуму набегающих на берег и отступающих назад в море волн. А может, качели извлекают из глубин памяти смутные воспоминания о том, когда человек, совсем крошечным, засыпал в качающейся колыбельке…

Чем качели интересны

Физика качелей проста и очевидна. Положение равновесия качелей устойчиво. Человек на качелях движется по дуге окружности. Из крайнего нижнего положения он поднимается вверх. А всё стремится вниз: санки катятся с горки, ручей бежит под уклон. Потом на уроках физики школьники узнают о потенциальной энергии, о том, что всякая система стремится к состоянию, в котором потенциальная энергия минимальна.

Человек на качелях самостоятельно, без посторонней помощи может раскачаться довольно сильно (как – об этом рассказано в статье «Как раскачаться на качелях?», «Потенциал», № 04(52), 2009, с. 75 – 80). Сейчас же рассмотрим свободные колебания с постоянной амплитудой.

Конечно, качели – хоть и элементарная с точки зрения техники конструкция, но серьёзная. Тут требуются крепкие опоры, прочная верёвка. Сейчас же мы расскажем о другом, более простом варианте качелей.

Доска на бревне

Пусть на поверхности шара в его верхней точке покоится тело малых размеров массой m. В отсутствие трения это положение равновесия неустойчиво. Малейший толчок или перемещение тела в другую точку на шаре приведёт к движению тела m вниз и даже к отрыву его от поверхности шара.

Пусть теперь в верхней точке V шара (или цилиндра) находится в равновесии тонкая однородная линейка (рис.1). Скользить по поверхности шара линейка не может. Выясним, является ли это положение линейки устойчивым.

Положите на стол круглый карандаш, а на карандаш линейку так, чтобы она находилась в равновесии. Слегка надавите на край и отпустите её. Линейка вернётся в исходное положение, продолжит движение и начнёт качаться, как маятник у настенных часов.

Если действовать так же, но в больших масштабах, то можно положить на бревно доску. Можно выбрать такое её положение, что её длинная часть будет уравновешивать вас, стоящего на другом, коротком её конце. Это положение равновесия устойчиво, как устойчива линейка на карандаше.

Теперь, наклоняясь вперёд-назад, вы можете вывести эту систему из положения равновесия и немного покачаться.

Устойчивость линейки на карандаше или доски на бревне установлена экспериментально. А каким может быть теоретическое описание явления устойчивости? Рассмотрим несколько вариантов.

Плечо силы

В положении равновесия центр тяжести линейки точка M совпадает с точкой касания. Трение препятствует скольжению линейки, линейка перекатывается по карандашу без проскальзывания. Пусть точка K – новая точка касания – лежит справа от начальной точки касания. Ясно, что при этом центр тяжести (середина линейки) оказывается по левую сторону от точки K. Сила тяжести создаёт момент, который возвращает линейку в исходное положение. Отсюда уже следует, что при отклонении линейки её центр тяжести поднимается. А как эта высота зависит от угла поворота линейки?

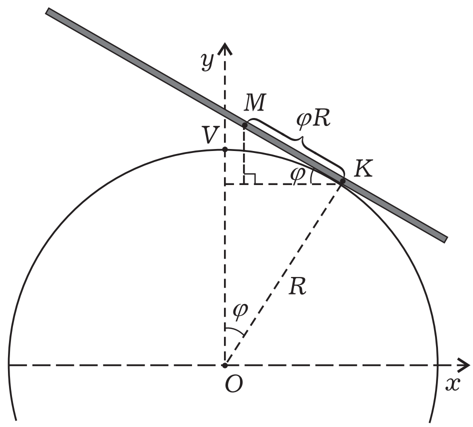

Рис. 1

Рассматриваем изменение потенциальной энергии

Пусть линейку вывели из положения равновесия и она повернулась на угол φ. Теперь новая точка касания K линейки и шара находится на расстоянии φR от середины линейки точки M, где R – радиус шара. Можно сказать, что шар без трения прокатился по линейке. При этом длина дуги VK равна φR. Рассмотрим, как при таком движении линейки меняется высота h точки M относительно горизонтального диаметра шара. Заметим, что потенциальная энергия линейки равна $W_p = mgh$ (m – масса линейки) и, стало быть, высота прямо пропорциональна потенциальной энергии (и наоборот).

Начальная высота равна R. После поворота на угол φ новая высота (измеряемая от горизонтального диаметра окружности) равна

$$h(\varphi) = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi.$$

Производная

$$h'(\varphi) = R(-\sin\varphi + \sin\varphi + \varphi\cos\varphi) =$$

$$= R\varphi\cos\varphi > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, на промежутке $[0; \frac{\pi}{2})$ функция $h(\varphi)$ возрастает и, соответственно, при отклонении линейки от горизонтального положения равновесия её центр тяжести поднимается вверх, потенциальная энергия увеличивается. Это и означает, что начальное горизонтальное положение линейки устойчиво.

Заметим, что при отсутствии трения начальное положение равновесия линейки неустойчиво.

На обычных качелях движение происходит по дуге окружности. А каков путь центра тяжести доски при её прокатывании по бревну?

Рассматриваем траекторию точки *M*

Точка K имеет координаты $K(R\sin\varphi; R\cos\varphi)$, уравнение прямой OK таково: $y = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}x$. Центр окружности O – начало системы координат. Прямая MK перпендикулярна прямой OK, следовательно, её угловой коэффициент равен $(-\mathrm{tg}\,\varphi)$. Она проходит через точку K. Это позволяет написать уравнение прямой MK:

$$y = -(x - R\sin\varphi)\mathrm{tg}\,\varphi + R\cos\varphi.$$

Точка M имеет координаты

$$M\big(x; -(x - R\sin\varphi)\mathrm{tg}\,\varphi + R\cos\varphi\big).$$

Длина отрезка MK равна длине дуги окружности, отвечающей центральному углу φ, то есть $R\varphi$. Формула квадрата расстояния между точками M и K приводит к уравнению

$$(x - R\sin\varphi)^2 + (x - R\sin\varphi)^2\,\mathrm{tg}^2\varphi = R^2\varphi^2,$$

или $(x - R\sin\varphi)^2 = R^2\varphi^2\cos^2\varphi$.

Будем считать, что угол φ положителен (как на рис.1). При этом $x < R\sin\varphi$, и поэтому $R\sin\varphi - x = R\varphi\cos\varphi$, и, стало быть, абсцисса точки M равна

$$x = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi.$$

Соответственно ордината точки M равна

$$y(\varphi) = -(-R\varphi\cos\varphi)\mathrm{tg}\,\varphi + R\cos\varphi =$$

$$= R\varphi\sin\varphi + R\cos\varphi.$$

В частности, $y(0) = R$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi R}{2}$ – это длина четверти окружности.

Мы получили параметрические уравнения кривой, которая называется эвольвентой:

$$x = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi,$$
$$y = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi\,.$$

Впрочем, второе уравнение уже было получено в предыдущем пункте. Там же показано, что функция $y(\varphi)$ возрастает на промежутке при $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Траектория точки M, получаемая при перекатывании линейки, – это эвольвента окружности.

По части эвольвенты движется любая точка прямой, перекатываемой без проскальзывания по окружности.

Потеря устойчивости

До сих пор мы предполагали, что какое бы то ни было проскальзывание линейки по поверхности шара отсутствует, что длина дуги VK равна длине отрезка MK и что трение, можно сказать, абсолютное. Пусть теперь проскальзывание возможно и, стало быть, длина отрезка MK меньше длины дуги VK. Пусть $MK = k\alpha R$, где $0 < k < 1$.

В этом случае
$$h(\alpha) = R\cos\alpha + k\alpha R\sin\alpha\,.$$

Исследуем значение $h(0) = R$ этой функции на экстремум.

Первая производная равна
$$h'(\alpha) = R(-\sin\alpha + k\sin\alpha + k\alpha\cos\alpha)$$
$$\text{и}\quad h'(0) = 0\,.$$

Вторая производная
$$h''(\alpha) = R(-\cos\alpha + k\cos\alpha + k\cos\alpha - k\alpha\sin\alpha)$$
$$\text{и}\quad h''(0) = R(-1 + 2k)\,.$$

$k = 0$ $k = 0{,}5$ $k = 1$

$h''(0) = R(-1+2k) < 0$	$h''(0) = R(-1+2k) > 0$
Точка $\alpha = 0$ – точка максимума энергии	Точка $\alpha = 0$ – точка минимума энергии
Точка $\alpha = 0$ – неустойчивое положение равновесия.	Точка $\alpha = 0$ – устойчивое положение равновесия.

Коэффициент k можно считать мерой трения. Если трения нет ($k = 0$) или оно мало ($k < 0{,}5$), то устойчивости нет. При этом линейка скользит по поверхности шара как точечное тело. Если $k > 0{,}5$, устойчивость есть. Значение коэффициента трения $k = 0{,}5$ является бифуркационным значением параметра.

Замечание. Разумеется, изложенное выше небольшое исследование является правильным. Но его можно существенно сократить!

1. Посмотрите на рис.1. В случае отсутствия скольжения совершенно очевидно, что часть линейки, расположенная слева от точки касания K, длиннее части, расположенной справа. Слева и масса, и плечо соответствующей силы тяжести больше, чем справа. Следовательно, линейка из указанного на рис.1 положения вернётся в исходное положение в «верхней» точке шара (и будет совершать колебания).

2. Пусть теперь есть скольжение. В этом случае столь же легко понять появление коэффициента $k = 0{,}5$. Чтобы в результате скольжения точка M оказалась в точке касания K, требуется именно равенство $k = 0{,}5$.

Выше мы сказали, что выведенная из положения равновесия линейка будет совершать колебания (нахождение периода этих колебаний составляет содержание задачи Ф2472 в №5 журнала «Квант» за 2017 г.). Вот практическое следствие этого обстоятельства, которое вы легко можете наблюдать на опыте.

На обычных верёвочных качелях может качаться один человек – именно потому, что нижнее положение качелей устойчиво. А вот на детских качелях с доской и фиксированной опорой посередине ребятишек должно быть двое, одному покачаться на них не получается. Если доску положить на бревно и сдвинуть её так, чтобы её уравновешивал сидящей на другом конце ребенок, то качаться он может один.

Немного истории

Итак, на примере этой простейшей механической системы мы видим связь между устойчивостью и трением, и потому уместно вспомнить соответствующие факты из истории математики и техники.

Самой первой системой автоматического регулирования (или управления) является система «паровая машина + центробежный регулятор» Уатта. Это тот самый учёный, в честь которого названа единица мощности – *ватт*.

Паровая машина преобразует силу пара во вращательное движение колеса. Центробежный регулятор присоединяется к паровой машине с целью обеспечения равномерности её работы. Регулятор «измеряет» скорость вращения колеса и, если она становится чрезмерно большой, уменьшает подачу пара в цилиндры. Если скорость мала, подача пара автоматически увеличивается. На первых порах регулятор Уатта работал вполне надёжно. Но в середине XIX века в силу его конструктивных и, казалось бы, разумных изменений стал работать ненадёжно. И инженеры, и теоретики искали выход из возникшего кризиса.

Возникшая проблема с полной ясностью и простотой была разрешена выдающимся русским учёным Иваном Алексеевичем Вышнеградским. Он явился основателем теории автоматического регулирования. С его работы «О регуляторах прямого действия» (1876 г.) началась теория регулирования машин, отвечающая на вопросы промышленной практики.

Мы не имеем, конечно, возможности излагать все исследования Вышнеградского. Отметим лишь обстоятельство, связанное с положением линейки на шаре.

Оказалось, что совершенствование обработки поверхностей деталей приводило к уменьшению трения. А это уменьшение привело к ухудшению устойчивости.

Чтобы сделать свои выводы доступными инженерам и привлечь внимание к наиболее важным из них, Вышнеградский привёл в конце работы свои знаменитые «тезисы».

Первый тезис. Катаракт (трение) есть существенная принадлежность чувствительного и правильно действующего регулятора, короче: «без катаракта нет регулятора».

Вместо заключения

Доска лежит на бревне. Казалось бы, что может быть проще? Но и эта простая механическая система позволила нам вспомнить и теорию устойчивости, и формулу потенциальной энергии, и плечо силы, и даже узнать о новой кривой – эвольвенте окружности.