Сырцов Сергей Рудольфович
Кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института технической акустики НАН Беларуси.

Эта удивительная масса

Понятие «масса» – одно из наиболее «простых» и часто употребляемых понятий в школьном курсе физики. Особых трудностей при его использовании учащиеся, как правило, не испытывают. Да и при решении задач никаких проблем у них, казалось бы, возникнуть не должно. Но это только «казалось бы»…

Среди физиков известна старая шутка – сын спрашивает у отца: «Папа, а масса действительно зависит от скорости?» И слышит ответ: «Нет. Впрочем, да. На самом деле нет, но не говори об этом своему учителю». К сожалению, эта шутка остаётся актуальной до сих пор, и такой ответ даже сейчас вызывает у большинства выпускников школ и вузов удивление. А утверждения о «зависимости массы от скорости» и «эквивалентности энергии и массы», выраженные формулами

$$m = \frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1)$$

$$E = mc^2 \qquad (2)$$

($\beta = v/c$, где v – скорость тела, c – скорость света, M – «масса покоя»), продолжают, к сожалению, господствовать в сознании не только учащихся, но и многих учителей.

Напомним, что в классической механике масса вводится как мера инерции в двух формулах:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (3)$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (4)$$

($\vec{p}$ – импульс тела, $\vec{F}$ – действующая на него сила).

Определённая таким образом масса является в ньютоновской механике мерой количества вещества (количества материи), обладает свойством аддитивности (масса составного тела равна сумме масс составляющих его тел) и инвариантна относительно преобразований Галилея: не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта (ИСО) к другой. В силу однородности пространства и времени импульс и энергия свободного тела сохраняются в ИСО.

Новые представления о пространстве и времени привели к созданию новой релятивистской механики, изучающей законы движения и взаимодействия тел, обладающих скоростями, близкими или равными скорости света. В ней, как и прежде, важнейшая роль отводится энергии, импульсу и массе тела, но связь между ними существенно видоизменилась. И для свободно движущейся частицы связь эта следующая:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}, \tag{5}$$

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 = \text{const}. \tag{6}$$

Формулы (5)-(6) представляют собой основные соотношения теории относительности между указанными величинами для свободно движущихся частиц. Замечательная особенность этих соотношений: они непротиворечивым образом описывают движение частиц во всём интервале скоростей $0 \le v \le c$. В частности, при $v = c$ из них следует, что $E = pc$ и $M = 0$, т.е. частица может двигаться со скоростью света, только если её масса равна нулю (фотон). Для частиц с ненулевой массой $(M \ne 0)$ из (5)-(6) следуют известные соотношения, связывающие энергию и импульс со скоростью:

$$E = \gamma Mc^2, \tag{7}$$

$$p = \gamma Mv, \tag{8}$$

где γ – лоренцевский множитель, равный $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Роль и место физической величины M, именуемой в этих соотношениях термином «масса частицы», предельно ясны – *это постоянная, инвариантная относительно преобразований Лоренца величина, одинаковая для всех скоростей, положений и моментов времени*. Заметим, что для частиц с не равной нулю массой M – это та же величина, которая называется массой в ньютоновской механике.

Ещё одно важнейшее следствие формул (5)-(6): даже покоящееся тело $(v = 0)$ обладает энергией («энергией покоя»), пропорциональной своей массе:

$$E_0 = Mc^2. \tag{9}$$

Таким образом, согласно теории относительности, масса тела – это мера энергии, заключённой в покоящемся теле, и можно говорить об *эквивалентности массы и энергии покоя*.

Соотношение (9), пожалуй, самая знаменитая формула физики, имеющая огромное практическое значение. Нетрудно показать, что в случае покоящегося тела $(E = E_0,\ \vec{p} = 0)$ преобразования Лоренца автоматически приводят к соотношениям (7)-(8), связывающим энергию и импульс тела с его скоростью. Связь же энергии с «релятивистской массой», задаваемая формулой (2), и следующая из нее «эквивалентность» энергии и массы, не отражают физической сущности СТО. Любой массе отвечает энергия, но не любой энергии отвечает масса, например, для фотона запись $m = E/c^2$ недопустима.

Формула (9) опровергает и часто

встречающееся утверждение, что СТО должна использоваться лишь при больших скоростях тел ($\beta \leq 1$), а при малых скоростях применима механика Ньютона. На самом же деле СТО не сводится к механике Ньютона даже в случае сколь угодно малых скоростей, так как последняя не может дать соотношение (9). Удивительно, но в релятивистской механике сохраняется соотношение между внешней силой $\vec{F}$ и изменением импульса частицы в виде, предложенном ещё Ньютоном:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \qquad (10)$$

Масса любой элементарной частицы служит её фундаментальной характеристикой. У частицы невозможно «отковырнуть» кусочек массы – энергия, соответствующая массе, может быть превращена в другие виды энергии (например, в излучение) только целиком в результате исчезновения частицы. Масса у частицы может быть только одного значения. Введение же терминов «релятивистская масса» и «масса покоя» не только излишне, но и вредно для правильного понимания происходящих процессов. При их использовании возникает иллюзия того, что увеличение энергии частицы при росте её скорости (импульса) связано с какими-то изменениями во внутренней структуре этой частицы. На самом же деле, увеличение энергии с ростом скорости заложено в геометрических свойствах пространства (преобразования Лоренца!). Иллюстрацией этого может служить следующая задача.

Задача 1. Система отсчёта S' движется по отношению к неподвижной (лабораторной) системе отсчёта (ЛСО) S со скоростью u вдоль оси x. Частица движется относительно системы S' вдоль оси x' со скоростью v' и ускорением a'. Чему равно ускорение частицы в системе отсчёта S?

Решение. Используем соотношения Лоренца, связывающие координаты и время в двух системах отсчёта:

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \; t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right), \quad (1a)$$

где $\beta = \dfrac{u}{c}$.

Находя дифференциалы от правых и левых частей этих соотношений, получаем преобразование Лоренца в дифференциальной форме:

$$dx = \gamma(dx' + \beta c dt'),$$
$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right). \quad (1б)$$

Из (1б) получаем известное соотношение, связывающее скорости частицы в обеих системах отсчета:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v' + u}{1 + \dfrac{uv'}{c^2}}, \quad (1в)$$

где $v' = \dfrac{dx'}{dt'}$ – заданная по условию задачи скорость частицы в системе S'. Используя (1в), определяем дифференциал dv и, учитывая, что ускорение в системе S' равно $a' = \dfrac{dv'}{dt'}$, получаем ускорение частицы в системе S:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{\left(1+\frac{\beta v'}{c^2}\right)^3} a'. \qquad (1г)$$

Полагая в (1г) $v' = 0$, легко найти соотношение, связывающее a с ускорением частицы в «собственной» системе отсчёта S_0, в которой частица в данный момент времени покоится (иногда такие системы отсчёта называют «сопутствующими»):

$$a = \frac{a_0}{\gamma^3}. \qquad (1д)$$

Как видим, ускорение в системе S меньше ускорения в системе S_0 (так как $\gamma > 1$), но уменьшение это никоим образом не связано с увеличением массы частицы – она вообще отсутствовала в приведённых выше рассуждениях.

В системе отсчёта, связанной с движущимся телом (т.е. по «собственным» часам частицы), заданная сила всегда производит одинаковый эффект за одинаковые промежутки времени. С точки зрения наблюдателя в ЛСО, время действия силы на движущуюся частицу $t = \gamma\tau_0$ увеличивается по сравнению со временем τ_0 её действия в собственной системе отсчёта и, следовательно, по мере увеличения скорости частицы требуется всё больший временной интервал для её изменения на заданную величину. Это и воспринимается наблюдателем в ЛСО как увеличение сопротивляемости движению. Никакого изменения внутренней структуры тела (и определяемого этой структурой значения массы) при этом, конечно же, не происходит.

Очевидно, что искажённые представления о сути явления рано или поздно должны приводить к ошибочным результатам в каких-нибудь нестандартных ситуациях. Многолетний опыт общения автора со студентами и школьниками старших классов показывает, что их вера в то, что учёт зависимости массы от скорости достаточен для решения широкого круга задач релятивистской динамики, не позволяет им правильно решать даже простейшие из них.

Задача 2. На покоящуюся частицу начинает действовать постоянная сила F. Найти время, которое потребуется для сообщения частице скорости v.

Неправильное решение. Используя понятие о «релятивистской» массе, запишем уравнение Ньютона в виде

$$\frac{M}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{dv}{dt} = F. \qquad (2а)$$

Интегрирование уравнения (2*а*) приводит к ответу: время, за которое частица приобретает скорость v, равно:

$$t = \frac{Mc}{F}\arcsin\left(\frac{v}{c}\right). \qquad (2б)$$

(Кто из читателей ещё не умеет интегрировать, может убедиться в правильности найденного решения простой подстановкой (2б) в (2*а*).)

Пока скорость частицы невелика ($v \ll c$ и $\arcsin(v/c) \approx v/c$), ответ совпадает с известным соотношением классической механики $t = Mv/F$. А вот тот факт, что время, необходимое для достижения частицей скорости света $(v = c)$, конечно и равно $t = \pi Mc/(2F)$, вызывает удивление, заставляет усомниться в верности выполненного решения и искать правильное.

Правильное решение. Из уравнения динамики (10) нетрудно установить

вить, что импульс частицы линейно растёт со временем:

$$p = Ft. \qquad (2в)$$

Используя соотношение (8) для релятивистского импульса, запишем (2в) в виде

$$\frac{Mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = Ft, \qquad (2г)$$

откуда находим правильный ответ:

$$t = \frac{Mv}{F\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (2д)$$

Как и в ньютоновской механике, при $t \to \infty$ импульс согласно (2в) стремится к бесконечности. Однако если в ньютоновской механике это приводит к выводу о бесконечной скорости, то в релятивистской механике – о приближении согласно (2д) скорости частицы к скорости света, оставаясь всё время меньше неё ($v \to c$ при $t \to \infty$).

Для простоты мы ограничились рассмотрением динамики одной частицы (материальной точки). Оказывается, основные соотношения релятивисткой динамики (6)-(9) являются достаточно общими и могут быть применены к любому сложному телу (системе). Причём в СТО масса системы определяется не только и не столько числом частиц, сколько их энергией и взаимной ориентацией импульсов. Точный расчёт массы системы достаточно сложен и может быть осуществлён лишь в некоторых простейших случаях. Например, для системы N невзаимодействующих частиц масса определяется по формуле

$$M = \left[\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{E_i}{c^2}\right)\right)^2 - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\vec{p}_i}{c}\right)^2\right)\right]^{1/2}, \qquad (11)$$

где $\sum E_i$ – сумма энергий частиц, $\sum \vec{p}_i$ – сумма их импульсов.

Как и в классической механике, однородность пространства и времени приводит в СТО к законам сохранения полной энергии и импульса изолированной системы. Но тогда из уравнения (11) следует удивительное с точки зрения здравого смысла (т.е. классической динамики) свойство – *масса изолированной системы сохраняется со временем, однако аддитивностью не обладает.* Именно неаддитивность массы – необычное свойство, привносимое СТО. Действительно, трудно представить, что система безмассовых частиц (фотонов) имеет не равную нулю массу или что поглощение фотонов приводит к увеличению массы тела. Как заметил академик Л.Б. Окунь: «Это очень непривычно для человека, впервые сталкивающегося с теорией относительности, но таков факт!».

Задача 3. Определить массу системы из 2-х фотонов с энергиями ε_1 и ε_2, летящих под углом α друг к другу.

Решение. Находим энергию и импульс системы:

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \qquad (3а)$$

По теореме косинусов определяем p (рис. 1):

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos\alpha. \qquad (3б)$$

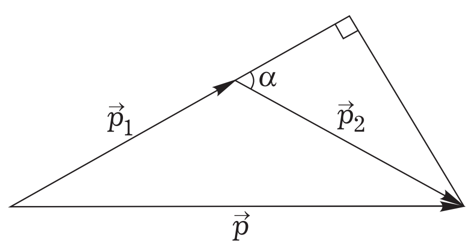

Рис.1

Так как для каждого из фотонов выполняется соотношение $\varepsilon = pc$, то, подставляя (3а)-(3б) в соотношение (6), находим после элементарных преобразований (учитывая, что $1-\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$) массу системы:

$$M = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{c^2}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (3в)$$

Результат поистине поразительный: в релятивистской механике $0+0\neq 0$! Лишь в случае, когда фотоны летят в одну сторону ($\alpha=0$), здравый смысл торжествует, и масса системы становится равной нулю. Во всех других случаях масса системы отлична от нуля, достигая своего максимального значения

при $\alpha=180^\circ$ (фотоны летят в противоположных направлениях). Этой массе можно придать вполне реальный смысл – она может быть массой нейтральной частицы (например, пиона π^0), при распаде которой рассматриваемые фотоны и появились.

После данной задачи уже совсем не кажется удивительным, что поглощение системой безмассовой частицы может привести к изменению её массы, т.е. что $1+0\neq 1$.

Задача 4. Покоящаяся частица массой m поглощает безмассовую частицу с энергией ε. Определить новую массу частицы.

Решение. Энергия и импульс системы не меняются со временем и равны соответственно

$$E = mc^2+\varepsilon, \qquad (4а)$$

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \qquad (4б)$$

Масса системы также остаётся неизменной и определяется из соотношения:

$$M^2c^4 = (mc^2+\varepsilon)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 c^2. \qquad (4в)$$

В конечном счёте эта масса будет принадлежать только одной оставшейся в «живых» частице. Из (4в) легко найти её новую массу:

$$M = m\sqrt{1+\frac{2\varepsilon}{mc^2}}. \qquad (4г)$$

Видим, что масса частицы увеличивается за счёт поглощения безмассовой частицы. Например, при энергии фотона $\varepsilon = 4mc^2$ масса возрастает в 3 раза (т.е. $1+0=3$).

Задача 5. Найти массу системы из двух частиц массой m каждая, движущихся с одинаковыми по модулю скоростями v под углом α друг к другу. В каких пределах может быть значение массы системы в случае неупругого столкновения этих частиц?

Решение. Как следует из вышеизложенного, масса вновь образованной частицы при таком столкновении будет равна массе системы двух частиц (но не сумме их масс!) до столкновения. Найдём её.

Энергия и импульс системы равны соответственно

$$E = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \qquad (5а)$$

Из соотношения (6) находим:

$$M^2c^4 = \left(\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - (p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\cos\alpha)\cdot c^2. \qquad (5б)$$

Так как модули импульсов частиц равны

$$p_1 = p_2 = \frac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (5в)$$

то, подставляя (5*в*) в (5*б*), после преобразований находим:

$$M = 2m\sqrt{\frac{1-\beta^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1-\beta^2}}. \qquad (5г)$$

Максимальной масса системы (т.е. масса новой частицы) будет при $\alpha = 180^\circ$ (лобовое столкновение): $M_{max} = \frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}}$, минимальной – при $\alpha \to 0$ (частицы летят в одном направлении): $M_{min} = 2m$. Другие значения массы могут находиться в интервале между этими предельными значениями. Как видим, всегда $M \geq 2m$, т.е. энергия покоя новой частицы превышает сумму энергий покоя частиц, из которых она образовалась.

При наличии взаимодействия между частицами системы её масса слагается из масс частиц и масс, обусловленных кинетической энергией и энергией взаимодействия частиц системы. Поэтому она может быть как больше, так и меньше суммы масс составляющих её частиц. Масса обычных тел (систем частиц) меняется всегда, когда меняется их внутренняя энергия – будь то сжатая пружина, нагретый утюг или тающий лёд. Этим они отличаются от элементарных частиц, проникнуть внутрь которых и, соответственно, изменить их внутреннюю энергию и массу невозможно. Однако для системы любой сложности величина M, именуемая «массой системы», является Лоренц-инвариантом и не меняется при переходе от одной системы отсчёта к другой.

В заключение отметим, что проблема происхождения массы– одна из наиболее актуальных в современной физике. Считается, что её решение кроется (в рамках Стандартной модели) в установлении правомерности так называ-

емого механизма Хиггса, согласно которому всё пространство заполнено «хиггсовскими» полями, и частицы приобретают свои массы посредством взаимодействия с ними. Частицы, сильно взаимодействующие с этими полями, – тяжёлые, взаимодействующие слабо, – лёгкие. Хиггсовское поле ассоциируется с новой частицей – хиггсовским бозоном (с энергией $E_0 \geq 115$ ГэВ). В настоящее время мировое научное сообщество приступает к реализации глобального научного проекта по поиску этой частицы на Большом адронном коллайдере в ЦЕРНе. Так что уже в ближайшее время многое станет ясным.