

Алексей Владимирович Горшков

Инженер-физик, выпускник МФТИ

Удар! ещё удар!

Длинная цепочка упругих бойков убывающей массы способна разогнать последнее тело во много раз по сравнению с первым. В рамках теории удара Ньютона найдены условие наилучшего убывания масс и наилучшее количество реальных бойков для достижения наивысшего КПД. Рассмотрены причины ограничения области применимости теории удара Ньютона. Дан краткий обзор применений передачи кинетической энергии в цепочке убывающих масс. Статья предназначена для учащихся профильных классов и учителей физики. Её чтение требует умения логарифмировать, находить пределы, производные и исследовать функции на экстремумы.

1. Постановка задачи

Известна «колыбель Ньютона» (Фото 1) [3] – цепочка центрально последовательно соударяющихся одинаковых стальных шариков, циклический преобразователь потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Она есть, вероятно, в каждом



Фото 1

(любезно предоставлено «Научным шоу профессора Николя»)

школьном физическом кабинете. Потери энергии в тепло и звук при каждом соударении малы, и последний шарик отлетает с почти такой же скоростью, какая была у первого.

Известно, что если мы ударили тяжёлым телом по покоящемуся лёгкому, то лёгкое может, при некоторых условиях, полететь быстрее, чем двигалось первое тело.

Пусть механика нерелятивистская, т.е. все скорости остаются много меньше скорости света. Пусть дана конечная цепочка N тел с монотонно уменьшающейся (по неизвестному пока закону) ненулевой массой m_i , $i=1..N$ слева направо. Пусть

первоначально все тела, кроме первого, покоятся, а первое налетает на второе. Пусть в лабораторной системе отсчёта задана ненулевая начальная скорость первого тела. Пусть все тела осесимметричны и расположены на одной оси, удары центральные и абсолютно упругие (т.е. в каждом ударе сохраняется и суммарный импульс, и суммарная кинетическая энергия) или выполняется условие постоянства ньютоновского коэффициента восстановления скорости.

С какой скоростью полетит второе тело после первого удара? При каком условии второе тело полетит быстрее, чем начальная скорость первого тела? С какой скоростью полетит последнее тело? При каком соотношении масс предыдущего и последующего тел скорость последнего тела максимальна? При каком соотношении масс предыдущего и последующего тел максимальна кинетическая энергия последнего тела? Выгодно ли увеличивать N , и если да, то насколько? Каковы могут быть практические применения этих закономерностей и технические трудности на пути их осуществления и как эти трудности можно преодолеть?

2. Абсолютно упругое соударение одного тяжёлого тела с одним лёгким

Это элементарная задача, однако напомним её решение. Обозначим параметры тяжёлого тела заглавными буквами, лёгкого – строчными. По законам сохранения импульса и энергии $MV_0 = MV_1 + mv_1$, $\frac{MV_0^2}{2} = \frac{MV_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}$. Из первого уравнения

$V_1 = V_0 - \frac{m}{M}v_1$, из второго $V_0^2 = V_1^2 + \frac{m}{M}v_1^2$. Подставим сюда V_1 и получим

$V_0^2 = \left(V_0 - \frac{m}{M}v_1\right)^2 + \frac{m}{M}v_1^2$. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые и сократим,

воспользовавшись тем, что из условия задачи $v_1 \neq 0$, $\frac{m}{M} \neq 0$, получим $v_1 = \frac{2V_0}{1 + \frac{m}{M}}$ (1).

Из (1) очевидно, что если $m \approx M$, то $v_1 \approx V_0$, прироста скорости нет, а если $m \ll M$, то $v_1 \approx 2V_0$, скорость удваивается. Это легко понять: в системе отсчёта, связанной с первым телом, второе тело на него как бы налетает со скоростью $-V_0$ и отлетает со скоростью $+V_0$, разница и даёт удвоение скорости.

Обозначим $x = \frac{m}{M}$ и коэффициент прироста скорости $k(x) = \frac{v_1}{V_0} = \frac{2}{1+x}$ (1').

В области $x \geq 0$ эта функция максимальна (и равна 2) при $x=0$, монотонно убывает, стремясь к 1, при $0 \leq x < 1$.

При каком соотношении масс в одном ударе передаётся наибольший импульс?

Функция $d_H(x) = \frac{mv_1}{MV_0} = \frac{2x}{1+x}$ равна нулю при $x=0$, монотонно возрастает (проверьте это с помощью производной) и, хотя стремится к 2 при $x \rightarrow +\infty$, но в нашей задаче ограничено $0 < x < 1$, на этом интервале d_H стремится к максимуму, равному 1, при $x \rightarrow 1$.

При каком соотношении масс в одном ударе передаётся наибольшая кинетическая энергия? Функция $d_E(x) = \frac{mv_1^2}{MV_0^2} = \frac{4x}{(1+x)^2}$ (2)

равна нулю при $x=0$, обладает максимумом, равным 1, при $x=1$ (проверьте это с помощью производной) и, хотя стремится к 0 при $x \rightarrow +\infty$, но в нашей задаче ограничено $0 < x < 1$, на этом интервале d_E стремится к максимуму, равному 1, при $x \rightarrow 1$.

Итак, при однократном ударе всё просто: чем меньше x , тем больше скорость второго (лёгкого) тела, но тем меньше передаваемые импульс и энергия.

3. Абсолютно упругое соударение с двукратной передачей (в цепочке трёх тел)

Интересно, как изменится результат, если второе тело ударит по третьему (обладающему ещё меньшей массой μ), придав ему скорость v_2 ?

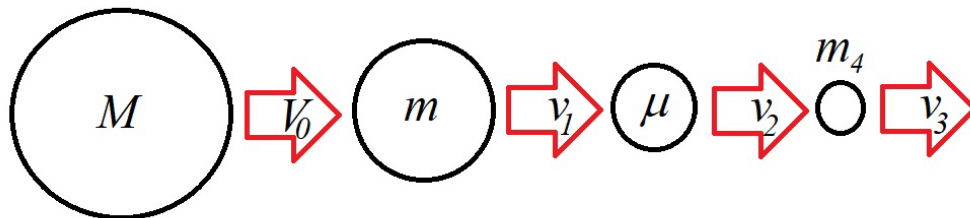


Рис.2

Для начала с помощью (1) очевидно, что

$$v_2 = V_0 k_1 k_2 = V_0 \cdot \frac{2}{1 + \frac{m}{M}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{\mu}{m}} = V_0 \cdot \frac{4}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \left(1 + \frac{\mu}{m}\right)}. \quad \text{Обозначим } y = \frac{\mu}{M}, \quad 0 < y \leq x < 1,$$

$$K_3 = \frac{v_2}{V_0} = k_1 k_2. \quad \text{Тогда} \quad K_3 = \frac{4}{(1+x) \left(1 + \frac{y}{x}\right)} \quad (3).$$

Это функция двух переменных.

Из условия задачи $0 < y < 1$. Очевидно, что при постоянном x функция K_3 монотонно убывает при возрастании y . Найдём, при каком условии общий коэффициент передачи

скорости K_3 достигает максимума при заданном y . Для этого вообразим себе, что y не переменная, а как бы постоянная; производную функции $K_3(x, y)$ при условии постоянства

y называют «частной производной» функции K_3 по x »
$$\frac{\partial K_3(x, y)}{\partial x} = -\frac{4\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)}{(1+x)^2\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2},$$

приравняем её к 0, и получим условие экстремума
$$x_{opt} = \sqrt{y} \quad (4).$$

Это линия максимумов передачи скорости. При этом
$$K_3 = \frac{4}{(1 + \sqrt{y})^2} \quad (5) \text{ и на}$$

интервале $0 < x < 1$ стремится к максимуму 4 при $x \rightarrow 0$, стремится к минимуму 1 при $x \rightarrow 1$.

Выражение (4) можно переписать в виде
$$m_{opt} = \sqrt{M\mu} \quad (4').$$

3. Оптимизация двукратной передачи энергии (в цепочке трёх упругих тел)

Параметрами называют «первичные» свойства технического устройства, т.е. свойства, от которых зависят его характеристики. **Характеристиками** называют «вторичные» свойства технического устройства, т.е. свойства, которые зависят от параметров. **Оптимизацией** называют аналитическое или численное нахождение таких значений параметров, чтобы характеристики были бы наилучшими.

При каком соотношении масс в двух ударах передаётся наибольшая кинетическая энергия? С помощью (2) и определений x и y ясно, что доля передачи кинетической

энергии в двух соударениях $D_3(x, y) = d_{\varepsilon_1} d_{\varepsilon_2} = \frac{4 \frac{m}{M}}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \cdot \frac{4 \frac{\mu}{m}}{\left(1 + \frac{\mu}{m}\right)^2} = \frac{16y}{(1+x)^2\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2} \quad (6).$

Это функция от двух переменных. Найдём её линию максимумов. Частная производная

$$\frac{\partial D_3(x, y)}{\partial x} = -\frac{16y\left(2(1+x)\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 - 2(1+x)^2\left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}\right)}{(1+x)^4\left(1 + \frac{y}{x}\right)^4} = -\frac{32y\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)}{(1+x)^3\left(1 + \frac{y}{x}\right)^3}.$$

Она равна нулю при $x_{opt} = \sqrt{y}$, точно так же, как и линия максимумов передачи

скорости (4). При этом
$$D_3(x, y) = \frac{16y}{(1 + \sqrt{y})^4} \quad (7).$$

При $y \rightarrow 0$ КПД минимален, стремится к 0. Производная этой функции на интервале $0 < y < 1$ стремится к нулю при $y \rightarrow 1$ (покажите это самостоятельно), при этом функция D

стремится к 1. То есть если никак не ограничивать возможные K , то КПД при соударении трёх тел стремится к 1 при равенстве всех масс, как и при соударении двух тел, что и ожидалось интуитивно.

4. При каком условии при данном отношении крайних масс y энергетически выгодно введение промежуточного тела?

Из условия преобладания трёхбойковой передачи энергии над двухбойковой при одинаковом отношении крайних масс $D_3(y) > d_3(y)$, т.е. $\frac{16y}{(1+\sqrt{y})^4} > \frac{4y}{(1+y)^2}$, сократив на y ,

взяв корень квадратный из обеих частей и преобразовав, получаем $1 - 2\sqrt{y} + y > 0$, т.е.

$(1 - \sqrt{y})^2 > 0$, т.е. при любых $0 < y < 1$. То есть промежуточное, тоже абсолютно упругое, тело энергетически выгодно вводить **всегда**. Этот факт может стать основой для многих его полезных в народном хозяйстве изобретений.

Заметим, что, даже ограничившись законом убывания масс хотя бы по вышенайденному (4') среднему геометрическому $m_{i+1} = \sqrt{m_i m_{i+2}}$, можно построить систему, которая разгоняет абсолютно упругое массивное тело до **почти какой угодно** (нерелятивистской) скорости с **ненулевым** КПД (разумеется, эта скорость ограничена прочностью материала тел при ударе, массами планеты Земля и элементарных частиц, а также государственным бюджетом). Как сказал Архимед, «Дайте мне точку опоры ...»

5. Оптимизация трёхкратной передачи скорости (в цепочке четырёх тел)

Обозначим $z = \frac{m_4}{M}$ (Рис.2), тогда, действуя аналогично предыдущему параграфу, найдя

функцию $K_4(x, y, z) = k_1 k_2 k_3$ и приравняв нулю её частную производную $\frac{\partial K_4(x, y, z)}{\partial x} = 0$,

получим условие экстремума такое же, что и в цепочке трёх тел (4), $x_{opt} = \sqrt{y}$. Это

поверхность максимума передачи скорости. Подставим x_{opt} в K_4 и, приравняв нулю её

частную производную $\frac{\partial K_4(y, z)}{\partial y} = 0$, получим условие экстремума $y_{opt} = z^{2/3}$ (9).

Это линия максимумов передачи скорости. Отсюда $x_{opt} = z^{1/3}$ (9').

6. Оптимизация трёхкратной передачи энергии (в цепочке четырёх тел)

Обозначив $D_4(x,y,z)=d_{\exists 1}d_{\exists 2}d_{\exists 3}$ и приравняв нулю её частную производную $\frac{\partial D_4(x,y,z)}{\partial x}=0$, получим всё то же условие экстремума $x_{opt}=\sqrt{y}$. Это поверхность максимума передачи энергии. Подставим x_{opt} в D_4 и приравняем нулю её частную производную $\frac{\partial D_4(y,z)}{\partial y}=0$, получаем всё то же условие экстремума $y_{opt}=z^{2/3}$. Это линия максимума передачи энергии. Отсюда так же, как и для возрастания скорости, $x_{opt}=z^{1/3}$. Это интересный результат!

7. N-1-кратное соударение N тел

Интересность и полезность его для нас в том, что мы замечаем, что и при соударении трёх, и при соударении четырёх тел (и, не исключено, большего количества) выполняется кратное равенство $\frac{1}{x_{opt}}=\frac{x_{opt}}{y_{opt}}=\frac{y_{opt}}{z_{opt}}=\dots?$ (и, не исключено, и так далее).

Упражнение 1. Проверьте это равенство для столкновений 3-х тел и 4-х тел!

Отсюда мы при столкновении трёх и четырёх тел замечаем самоподобие последовательности оптимальных масс, а именно, обязательность убывания последовательности наилучших масс по закону среднего геометрического

$$m_{i+1,opt}=\sqrt{m_{i,opt}m_{i+2,opt}}, \text{ другими словами, } x_{opt}=\sqrt[N-1]{\frac{m_N}{m_1}} \quad (12).$$

Поэтому, на основании философского принципа красоты в физике, выдвинем гипотезу. **Гипотеза: соотношения (12) истинны для любого $N>2$.**

Исследовательское задание 1 (очень повышенной трудности): докажите либо опровергните эту гипотезу. Как гласит корейская народная пословица, «Лёгкий путь открывается только тому, кто прошёл по трудному».

Для оптимизации в общем случае обозначим отношение крайних масс $Y=\frac{m_1}{m_N}$, отношение соседних масс (i-й «шаг») $u_i=\frac{m_i}{m_{i+1}}=const=u$, как это следует из (12) и принятой Гипотезы. Поскольку шаги одинаковые, то

$$Y=u^{N-1}, \quad u=\sqrt[N-1]{Y}, \quad u=\frac{1}{x_{opt}}, \quad N=1+\frac{\ln Y}{\ln u} \quad (13).$$

**Интуитивные примеры убывания масс по среднему геометрическому
(в геометрической прогрессии):**

- 1) Последовательность масс $1000000 \rightarrow 10000 \rightarrow 100 \rightarrow 1$, $u=100$, $N=4$.
- 2) Последовательность масс $1000 \rightarrow 100 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $u=10$, $N=4$.
- 3) Последовательность масс $100 \rightarrow \approx 21,5 \rightarrow \approx 4,6 \rightarrow 1$, $u \approx 4,64$, $N=4$.
- 4) Последовательность масс $10 \rightarrow \approx 5,6 \rightarrow \approx 3,2 \rightarrow \approx 1,8 \rightarrow 1$, $u \approx 1,78$, $N=5$.
- 5) Последовательность масс $1024 \rightarrow 512 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, $u=2$, $N=11$.
- 6) Последовательность масс $2 \rightarrow \approx 1,68 \rightarrow \approx 1,41 \rightarrow \approx 1,19 \rightarrow 1$, $u \approx 1,19$, $N=5$.

Но оптимизация цепочки бойков на этом вовсе не закончена: сколько надо взять бойков?

«Только кухарка добавляет соли на глазок, а физик должен всё рассчитывать.»

(П.Л. Капица)

8. Ньютоновский коэффициент восстановления скорости

Ещё Ньютон, измеряя высоты скакания шарика на плите, измерил для нескольких веществ «коэффициенты восстановления скорости» $0 < \eta < 1$, т.е. на какой множитель за счёт разнообразных причин скорость отскока лёгкого шарика от тяжёлой плиты меньше, чем при абсолютно упругом столкновении, так сказать, «неидеальность» удара. (Забегая вперёд, отметим, что это не всегда является малой поправкой, а может существенно, принципиально, изменить сам вид решения.) Тогда соотношения (1') и (2) изменятся так:

$$k(x) = \frac{v_1}{V_0} = \frac{2\eta}{1+x} \quad (1''), \quad d_{\eta}(x) = \frac{mv_1^2}{MV_0^2} = \frac{4x\eta^2}{(1+x)^2} \quad (2').$$

Изменится ли необходимое условие для максимума КПД (4),(9),(9'),(12)? Нет, потому что η входит в формулы K и D лишь как постоянный множитель и поэтому на равенство частных производных нулю не влияет.

Известные в доступной литературе [1] коэффициенты восстановления скорости для некоторых разных материалов см. в Таблице 1.

Материал	идеально упругий	стекло	«слоновая кость»	сталь, пробка	дерево	удар дерева о гуттаперчу	идеально неупругий
η	1	0,94	0,89	0,55	0,5	0,26	0

Табл.1

Коэффициент η для самых прочных веществ – рутения, вольфрама, хрома, алмаза, некоторых других форм углерода и специальных сталей нам пока неизвестен.

Исследовательское задание 2 (экспериментальное). *Бросая каучуковый шарик-прыгун с разной высоты на наковальню, снимая процесс прыгания шарика с помощью*

видеокамеры на фоне координатной сетки, постройте таблицу высоты подъёма от номера прыжка и по ней рассчитайте η для удара каучука по стали. Занесите результаты в Таблицу 1.

9. Ограничения применимости ньютоновской теории удара

Есть много причин неидеальности удара $\eta < 1$: например, трение о стенки канала, вязкость и сжимаемость окружающего воздуха или жидкости, возбуждение звуковых волн в телах и окружающей среде, в конце концов переходящих в теплоту, необратимые деформации тел, текучесть и разрушение тел, а при столкновении заряженных частиц или магнитов – порождение электромагнитных волн, фотонов и индукционных токов, в конце концов переходящих в теплоту, возбуждение внутренних состояний молекул и атомов, химические реакции, диссоциация и ионизация. Уже при скоростях соударения 15 м/с медь, а при 150 м/с и более высококачественные стали в месте удара тела разрушаются, потому что в пятнах удара может развиваться давление $10^4..10^5$ атм. Всё это приводит к тому, что $\eta \neq \text{const}$, обычно уменьшается с ростом скорости соударения.

Хорошо развита теория ударов совершенно упругих тел, в которой предполагают, что тела за время удара подчиняются законам упругого деформирования и в них не появляется остаточных деформаций. Первая из них, которая верна тогда, когда время прохождения упругих волн через тело много меньше времени удара – авторства Г.Герца. Если же время прохождения упругих волн через тело сравнимо с временем удара, то применяют *волновую* теорию удара.

Удар не вполне упругих тел требует учёта как упругих, так и пластических свойств материалов. Теория становится настолько сложной, что инженеру-конструктору не обойтись без экспериментальных исследований.

Например, советский физик Евгений Всеволодович Александров в 1957 г., занимаясь экспериментальным исследованием зависимости коэффициентов восстановления скорости η и коэффициента передачи энергии разнообразных материалов от разнообразных условий, сделал научное открытие (зарегистрировано в Государственном реестре открытий СССР под №13). Суть его в том, что при не вполне упругом ударе «коэффициент передачи энергии зависит от отношения масс соударяющихся тел лишь до критического значения этого отношения, которое определяется конфигурацией соударяющихся тел. При дальнейшем увеличении отношения масс соударяющихся тел коэффициент передачи энергии определяется уже не отношением действительных масс, а лишь критическим значением этого отношения» [2]. «На основе открытия Е.В. Александрова создан так называемый механический полупроводник [*правильнее было бы*

назвать его механическим диодом – прим. А.В.Г.], в котором передача энергии может практически осуществляться только в заданном направлении, независимо от жёсткости опоры» [2]. «Самостоятельный технический интерес представляет импульсный ударный привод без редуктора, обеспечивающий высокий момент на ведомом валу» [2].

Итак, мы уяснили, что удар в действительности – очень непростое явление.

10. Одна из задач оптимизации длинного составного ударного метателя тел

Пусть **задан** желательный коэффициент увеличения скорости $K_{\text{зад}}$, допустимо даже чуть больше. **Требуется** найти наилучшие отношения последовательных масс $x_{\text{opt}}=m_{i+1}/m_i$, $m_{\text{opt}}=1/x_{\text{opt}}$, наилучшее число бойков N_{opt} , отношение крайних масс Y_{opt} , фактически достигнутые $K_{\text{факт}}$ и $D_{\text{факт}}$ такие, чтобы КПД $D_{\text{факт}}$ был бы вблизи наибольшего физически возможного. Для конкретности, подробнее рассмотрим случай, когда задано $K_{\text{зад}}=10$.

Легко (на страницу формул и графиков) показать, что при $\eta=1$ зависимость $D(x)$ монотонно возрастает на $x \in [0;1)$, стремится к 1 при $x \rightarrow 1$ (это даже интуитивно очевидно физически), но может иметь разрыв первого рода при $x=1$. И ещё оказывается (страниц 5 формул), что *не равенство η единице не является малой поправкой, а существенно, даже принципиально, изменяет решение!*

Используя (1'') и (2'), с учётом коэффициента Ньютона, составим систему из двух условий:

$$K_N = \left(\frac{2\eta}{1+x} \right)^{N-1} \geq K_{\text{зад}} \quad (14) \text{ и}$$

$$D_N = \left(\frac{4x\eta^2}{(1+x)^2} \right)^{N-1} = \max \quad (15).$$

В (15) в больших скобках величина всегда <1 , а в (14) в больших скобках величина может быть как меньше, так и больше единицы. Поскольку N должно быть натуральным числом,

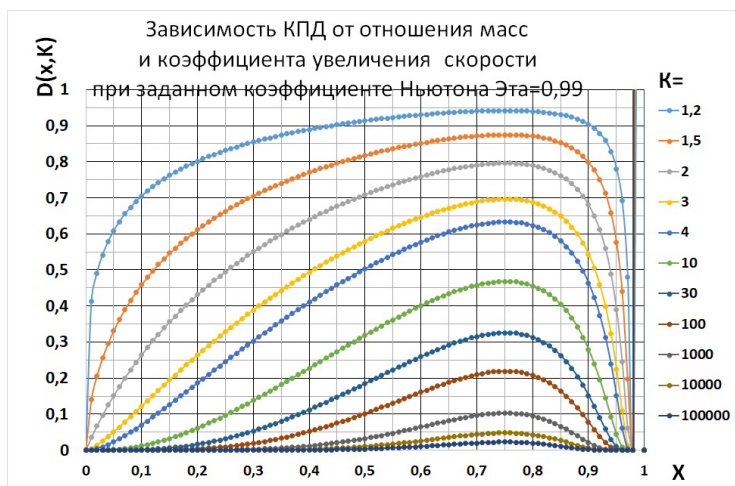


Рис.3

из (14) можно принять

$$N \approx \left\lceil 1 + \frac{\ln K_{\text{зад}}}{\ln \frac{2\eta}{1+x}} \right\rceil \quad (16),$$

где квадратные скобки означают округление действительного числа в скобках (пока не ясно, в большую сторону либо в

меньшую). В нашей задаче $2 < N < +\infty$, $K_{\text{зад}} > 1$, поэтому, чтобы (16) имело смысл, должны выполняться приближительные условия $1 < \frac{\ln K_{\text{зад}}}{\ln \frac{2\eta}{1+x}} < +\infty$, после потенцирования и простых

преобразований с учётом того, что аргумент логарифма в нашей задаче должен быть > 1 , получаем двойное неравенство $\frac{2\eta}{K_{\text{зад}}} - 1 < x < 2\eta - 1$ (16'). При любом $K_{\text{зад}} > 1$ существует

непустое множество точек x , удовлетворяющих (16'). Но есть ещё условие $x > 0$, следовательно из (16'), необходимо ещё и условие $\eta > \frac{1}{2}$ (16''). Если пока, для

упрощения, не учитывать влияние округления, то, условно превратив (16) в равенство без округления и приближения, из (15) и (16) получаем

$$D(x, K_{\text{зад}}, \eta) = \left(\frac{4x\eta^2}{(1+x)^2} \right)^{\frac{\ln K_{\text{зад}}}{\ln \frac{2\eta}{1+x}}} = \max \quad (17).$$

Найти аналитически максимум этой функции одной переменной на $0 \leq x \leq 1$ непросто. Поэтому обойдёмся численным решением, построением графиков. Введём, казалось бы, маленькую поправку на неидеальность удара $\eta = 0,99$. Таких «хороших» веществ нам даже не известно. Хотя так может быть, если друг от друга отталкиваются **диэлектрические магниты**, даже при ненулевых потерях на возбуждение звука, индукционных токов и электромагнитного излучения.

На Рис.3 построена диаграмма $D(x, K, 0,99)$ для ряда значений K . «На глазок», функция $D(x)$ имеет максимум; монотонно убывает по K (на некотором интервале x); $D(x=0)=0$; непрерывна на промежутке приблизительно $[0; 0,98]$; терпит разрыв при $x \approx 0,98$, что объясняется правой частью неравенства (16'); стремится к 0 при приблизительно $x \rightarrow 0,98$. Итак, при $\eta = 0,99$ функция достигает максимума в точке $x_{\text{opt}} \approx 0,75$ для всего ряда $K_{\text{зад}}$. При $K_{\text{зад}} = 10$ $D_{\text{max}} \approx 0,47$. Это хороший КПД.

Отсюда и из (13) при заданном $K_{\text{зад}} = 10$ в решаемом примере $m_{\text{opt}} \approx 1,33$. Из (16) $N \approx 19..20$. Из (13) $Y \approx 237..315$. Из (15) $D \approx 0,58..0,56$. (По графику максимум $D_{\text{max}} \approx 0,47$. Расхождение вызвано, во-первых, округлением N , во-вторых, погрешностью снятия значения x .) Это неплохой КПД для заданного немалого $K_{\text{зад}}$. Из (14) $K \approx 9,23..10,45$. Условию задачи удовлетворяет второе значение (округление N в бóльшую сторону), поэтому принимаем $N_{\text{opt}} = 20$, $Y_{\text{opt}} \approx 315$, $D_{\text{факт}} \approx 0,56$, $K_{\text{факт}} \approx 10,45$. Отклонение от заданной характеристики (в лучшую сторону) всего 4,5%. Задача почти решена! Но только почти.

11. Зависимость решения задачи оптимизации от коэффициента Ньютона

Теперь будем изменять в наших расчётах коэффициент Ньютона $0 < \eta < 1$ восстановления скорости (неидеальность удара). При любых численно исследованных η функция $D(x, K)$ достигает максимумов в точках $x_{opt}(\eta)$ (не считая точек разрывов), не зависящих от $K_{зад}$. Это объяснено автором теоретически, но выходит за рамки программы по математике для средней школы. Занесём результаты в Таблицу 2 ($K_{зад}=10$).

η	0,9999	0,999	0,99	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,6	0,56
x_{opt}	0,97	0,91	0,75	0,52	0,38	0,29	0,22	0,16	0,12	0,08	0,05	0,02
Раз- рыв	1	0,99	0,98	0,9	0,8	0,7	0,60 ..0,61	0,50 ..0,51	0,40.. 0,42	0,30.. 0,32	0,20.. 0,22	0,12.. 0,15
$ш_{opt}$	1,031	1,099	1,33	1,92	2,63	3,45	4,55	6,25	8,33	12,5	20	50
N+	155	53	20	12	10	10	10	10	12	14	19	26
Y+	112,3	148,2	315	2558	1,6E+4	2,4E+5	3,8E+6	9,1E+7	1,1E+11	2,3E+15	5,2E+24	1,5E+44
D+	0,9502	0,846	0,56	0,18	0,051	0,009	0,0012	9,4E-5	5,1E-7	1,8E-10	4,6E-18	7,1E-35
K+	10,096	10,4	10,45	11,6	10,93	11,988	11,477	10,109	11,642	11,137	11,063	10,362

Табл.2

Что мы из неё видим? При $\eta < 0,56$ функции электронных таблиц начинают терпеть разрыв (потому что это близко к пределу ($16''$)) и велики погрешности нахождения x_{opt}). Судя по величинам Y и D , осуществить такое устройство можно только при достаточно больших η . Осуществить его для $\eta < 0,85$ технически очень трудно, для $\eta < 0,75$ технически невозможно, для $\eta < 0,56$ физически невозможно, для $\eta \leq 0,50$ невозможно даже математически.

При возрастании η оптимальное отношение соседних масс x_{opt} монотонно возрастает, шаг $ш_{opt}$ монотонно уменьшается, N_{opt} обладает минимумом (это неожиданно; это пока не объяснено теоретически!) вблизи $\eta \approx 0,825 \pm 0,025$ (причём при любых исследованных $K_{зад}$ от 1,1 до 10^6), отношение крайних масс Y_{opt} монотонно уменьшается, КПД D_{max} монотонно возрастает.

Из Таблицы 1 коэффициентов восстановления скорости для разных материалов видно, что обычная сталь для построения нашего устройства при $K_{зад}=10$ не годится. Коэффициент η для самых прочных веществ – рутения, вольфрама, хрома, алмаза, некоторых других форм углерода и специальных сталей нам неизвестен. Живых слоников нам жалко, поэтому будем использовать в экспериментах **стекло** или **«мамонтовую кость»** (мамонтам уже всё равно). Выбираем в Таблице 2 столбцы приблизительно для $\eta \approx 0,95$ или $\eta \approx 0,90$ соответственно, считываем из них оптимальные параметры. КПД будет 18% или 5% соответственно. Задача наконец-то решена!

Давайте сравним нашу хитромудрую оптимизацию с «интуитивными» проектами цепочки стеклянных бойков, например, с последовательностью масс из Примера 4): $10 \rightarrow \approx 5,6 \rightarrow \approx 3,2 \rightarrow \approx 1,8 \rightarrow 1$, $ш \approx 1,78$, $N=5$, $Y=10$. Из (14) получаем

$$K = \left(\frac{2 \cdot 0,94}{1 + \frac{1}{1,78}} \right)^4 \approx 2,1, \text{ из (15) получаем } D = \left(\frac{4 \frac{1}{1,78} 0,94^2}{\left(1 + \frac{1}{1,78} \right)^2} \right)^4 \approx 0,44. \text{ Несмотря на хороший}$$

КПД, величина K никудашная. Давайте «интуитивно» предложим другую последовательность масс, Пример 7): $10000 \rightarrow 1000 \rightarrow 100 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $m=10$, $N=5$, $Y=10000$.

$$K = \left(\frac{2 \cdot 0,94}{1 + 0,1} \right)^4 \approx 8,5, \quad D = \left(\frac{4 \frac{1}{10} 0,94^2}{\left(1 + \frac{1}{10} \right)^2} \right)^4 \approx 0,007. \text{ Несмотря на хороший } K, \text{ величина КПД}$$

никудашная. Делаем вывод: мы не зря старались-пытели над оптимизацией цепочки ньютоновских ударов, подняли КПД устройства в более чем 25 раз!

Цепочку убывающих шаров из **бильярдного целлулоида**, обладающего η , по некоторым непроверенным сведениям, близким к таковому у слоновой кости, можно изготовить в токарной мастерской. Автор, по своим сложным расчётам, рекомендует для этого материала осуществить такие проекты: $K_{\text{зад}}=4$; Б1) если у целлулоида $\eta \approx 0,89$, то $x_{\text{opt}} \approx 0,36$ ($m_{\text{opt}} \approx 2,78$), $N=6$, последнее тело массой 1 г, первое тело массой 459 г; ожидается КПД $D \approx 17\%$; или Б2) если у целлулоида $\eta \approx 0,85$, то $x_{\text{opt}} \approx 0,29$ ($m_{\text{opt}} \approx 3,45$), $N=7$, последнее тело массой 1 г, первое тело массой 5,797 кг; ожидается КПД $D \approx 4\%$.

12. Возможные практические применения обнаруженных закономерностей

- 1) В физическом эксперименте – для ускорения небольших макроскопических тел с целью исследования свойств веществ под действием удара.
- 2) В горном деле, технике строительства и капитального ремонта – для улучшения свойств пневматических, гидравлических и электрических отбойных молотков, ломов, буров, перфораторов. Например, Е.В. Александров с помощью своего открытия и изобретённого им составного бойка снизил в 2..4 раза массу отбойного молотка без ухудшения его характеристик, оптимизировал лунный бур [2].
- 3) В станкостроении – для улучшения свойств ковочных и долбежных станков. Например, Е.В. Александров использовал своё открытие для повышения КПД машины для проковки сварных швов [2].
- 4) В ракетной технике и космонавтике – следует избегать рассматриваемого явления, которое там приносит вред. Если тяжёлая ракета плавно сужается вперёд, то пульсации тяги двигателей действительно передаются вперёд и могут разрушить, оторвать, головную

часть. Если космическая станция неоднородна по массе вдоль своей оси, то нельзя причаливать с тяжёлого конца, потому что удар действительно передастся на лёгкий конец, и он может ускориться, разрушиться, оторваться. Поэтому космические корабли причаливают преимущественно с лёгкого конца станции.

5) Аналогия в гидравлике – если труба, по которой течёт пульсирующий поток жидкости, сужается вперёд, то в потоке может возникать аналогичное явление. Его могут как избегать (например, в трубопроводах), так и использовать (например, для формирования ударных гидравлических струй в горном деле и при обработке материалов, а также для проектирования защиты берега от цунами).

6) Аналогия при кумулятивном эффекте – по существу, передача кинетической энергии от относительно медленного взрывчатого инициатора сжимающемуся, истекающему, всё более облегчающемуся и поэтому ускоряющемуся, текущему металлу. Современные способы получения кумулятивных струй достигают космических скоростей и даже свыше 100 км/с.

7) Отдалённая аналогия существует в радиотехнике. Для увеличения КПД передачи электромагнитной волны из одного участка кабеля или волновода в другой (с другим волновым сопротивлением) используют, так сказать, «посредника» – элемент с волновым сопротивлением, равным среднему геометрическому волновых сопротивлений сопрягаемых участков.

8) Ускорение коллективов атомов, молекул. Пусть с помощью интерферирующих лазерных лучей создают цепочку электромагнитных неглубоких потенциальных ям (ловушек для атомов, **Рис.4**). В такие ямы помещают последовательно убывающие по численности (в соответствии с рассчитанными нами закономерностями убывания массы) группы атомов.

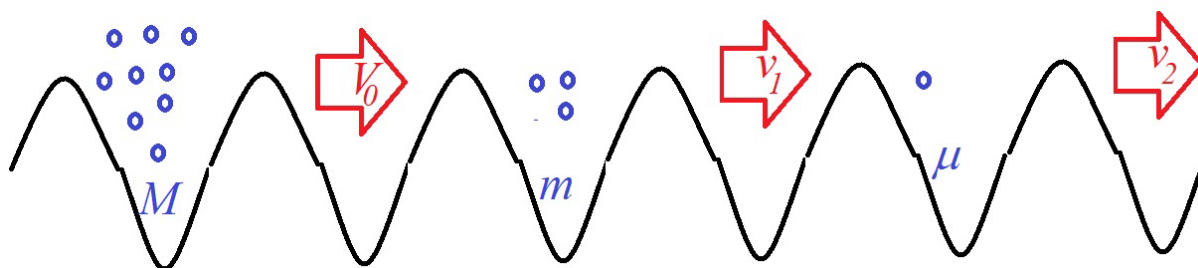


Рис.4

Затем эти группы атомов охлаждают лазерными лучами методом Владилена Степановича Летохова. Затем первой группе атомов придают начальную скорость. Далее удар, ещё удар ... Последняя группа атомов полетит со скоростью значительно большей, чем первая. Назовём такой способ и устройство «кинетическим ускорителем Ньютона».

Заключение

Даже в такой изъезженной вдоль и поперёк области физики, как классическая механика, можно найти нечто интересное (вроде открытия) не только во времена Ньютона, но даже в 20-м и 21-м веках. В рамках теории удара Ньютона рассмотрена возможность увеличения скорости в цепочке неидеально упруго сталкивающихся тел с последовательно убывающей массой. Элементарно, что при столкновении двух тел скорость может почти удваиваться, но КПД такой передачи при этом почти нулевой.

Не элементарно, что введение промежуточного тела с массой, равной среднему геометрическому крайних, всегда увеличивает КПД. В цепочке из трёх тел и в цепочке из четырёх тел доказано, что необходимый для максимизации КПД закон убывания масс – в геометрической прогрессии $m_{i+1} = \sqrt{m_i m_{i+2}}$. Поэтому выдвинута гипотеза, что такой же закон убывания масс наилучший для цепочки любого количества $N > 2$ тел. Этот результат, оказывается, не зависит от ньютоновского коэффициента восстановления скорости η .

Сделан краткий обзор причин ограничения области применения ньютоновской теории удара и основных разновидностей современных теорий удара.

Численно оптимизировано количество бойков в цепочке для достижения наивысшего КПД при заданном увеличении скорости. Оказалось, что оно существенно зависит от коэффициента восстановления η . Не равенство его единице принципиально меняет вид решения: становится достижим максимум D , причём D не зависит от K .

Оказалось, что при $\eta < 0,56$ решить задачу оптимизации вычислительно трудно, а при $\eta \leq 0,5$ математически невозможно. Для технической возможности создания оптимальной ударной цепочки желательно выбирать материал такой, что $\eta > 0,85$, например, алмаз, стекло, фуллерен, слоновую кость, бильярдный целлулоид, бериллиевую бронзу и некоторые другие специальные твёрдо-упругие сплавы, а также сильные диэлектрические магниты, сориентированные друг к другу отталкивающими полюсами.

Найдены наилучшие отношение последовательных масс, наилучшее число бойков, наилучшее отношение крайних масс, фактически достигнутые D и K не меньше заданного. Оптимизация параметров, по меньшей мере, в десятки раз увеличивает КПД по сравнению с «интуитивными» проектами таких цепочек бойков.

Неожиданно оказалось, что зависимость наилучшего числа бойков от η обладает минимумом при $\eta \approx 0,825 \pm 0,025$, причём при любых исследованных K , что пока не получило теоретического объяснения, но может быть практически применимо.

Возможны широкие возможные практические применения показанных закономерностей передачи удара в цепочке убывающих масс, в т.ч. в атомной физике.

Литература

1. Кухлинг Х. Справочник по физике: Пер. с нем. – М.: Мир, 1983. – 520 с.
2. Электронный ресурс: Открытие №13 <https://ross-nauka.narod.ru/06/06-013.html>
3. Научное шоу профессора Николя: Колыбель Ньютона // Электронный ресурс: <https://nik-show.ru/experiments/experience/kolybel-nyutona/>