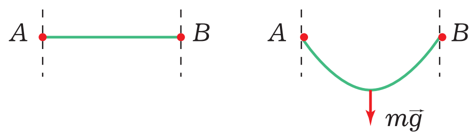
Паркевич Егор Вадимович
Студент 4 курса факультета проблем физики и энергетики МФТИ.

Тяжёлый трос

В данной работе на примерах задач рассмотрено влияние массы троса на качественное и количественное описание процессов, происходящих в механических системах. Также рассмотрены различные подходы к решению подобного рода задач.

Как правило, когда речь заходит о механизмах, в которых используются тросы или канаты, последние предполагаются невесомыми или обладающими малой массой по сравнению с остальными элементами системы, например, таковыми могут быть подвешенные грузы или блоки, на которые наматывается трос. Всё это, конечно же, идеализация. В реальности дело обстоит намного сложнее. Наличие массы у троса приводит уже к существенным изменениям. В качестве примера можно привести следующую ситуацию. Рассмотрим натянутую между точками A и B тонкую нить. Если бы она была невесомой, то картинка имела бы вид, изображённый на рис. 1 *а*. Однако, если учесть наличие массы у нити, то картина сильно изменится (см. рис. 1 *б*).

Ясно, что нить прогнётся под собственным весом. При этом то, насколько сильно она прогнётся, определяется силой натяжения, которая зависит уже от самого материала нити. Данный случай уже ближе к реальности. К сожалению, в школьных задачах такие ситуации



а *б*

Рис. 1. а) Натянутая между точками A и B невесомая нить; б) то же самое, но при наличии массы у нити

практически не рассматриваются. В связи с чем постараемся на примере задач осветить данную тему. И начнём мы со следующей задачи.

Задача 1. (Тяжёлая верёвка) Гибкая верёвка массой m подвешена так, что вблизи точек подвеса углы между касательными к верёвке и вертикалью соответственно равны α и β (см. рис. 2). Определите силу натяжения верёвки в нижней точке.

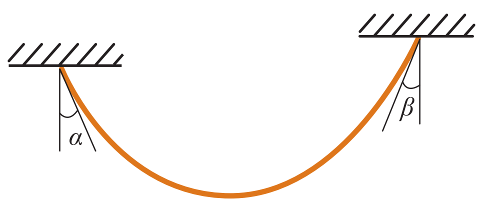


Рис. 2

Решение. Рассмотрим силы, действующие на верёвку, и изобразим их на рис. 3 *а*. В точках крепления на верёвку действуют силы F_1 и F_2, направленные по касательной к верёвке. Кроме того, на верёвку действует сила тяжести mg.

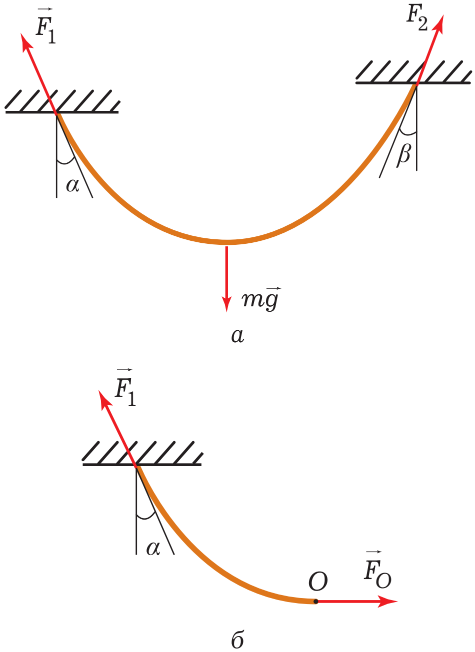


Рис. 3

Точка её приложения находится в центре масс верёвки. Центр масс верёвки при данной её конфигурации расположен вне верёвки, и его точное расположение неизвестно. В этом и состоит основная сложность задачи. Постараемся обойти это обстоятельство, а для удобства восприятия точку приложения силы тяжести расположим на верёвке. Запишем условие равновесия верёвки в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления:

$$F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta = mg,$$

$$F_1 \sin\alpha = F_2 \sin\beta.$$

Из этих уравнений можно найти силы натяжения верёвки в точках подвеса. Однако, согласно требованию задачи, необходимо найти силу натяжения верёвки в её нижней точке. Чтобы ответить на вопрос задачи, рассмотрим равновесие отдельной части верёвки – участка от её левой точки подвеса до нижней точки, которую обозначим буквой O (см. рис. 3 *б*). Очевидно, что сила натяжения верёвки в нижней точке направлена горизонтально, поэтому условие равновесия части верёвки в проекции на горизонтальное направление имеет вид:

$$F_1 \sin\alpha = F_O.$$

Из получившейся системы трёх уравнений с тремя неизвестными получаем, что:

$$F_O = \frac{mg}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}.$$

Ответ. $F_O = \dfrac{mg}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

Данная задача является показательной. К тому же, как мы видим, нить находится в устойчивом положении равновесия. А как быть в случае, когда нить или, например, массивная цепь приходит в движение под действием собственного веса или внешней силы? В качестве иллюстрации рассмотрим следующие модельные задачи 2, 3, 4, а также задачу 5, которая пригодится нам далее для более глубокого понимания сути вещей.

Задача 2. (Тянем тяжёлый канат) К тяжёлому канату длиной L, лежащему на горизонтальной плоскости, прикладывают постоянную силу F, направленную вдоль каната (см. рис. 4). Определите натяжение каната на расстоянии x от того конца, к которому приложена сила. Трение между канатом и плоскостью отсутствует. Растяжением каната пренебречь.

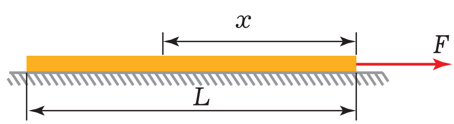


Рис. 4

Решение. Поскольку к канату приложена постоянная сила, то вся система движется с ускорением, равным $a = F/m$, где m – масса каната. Введём теперь линейную плотность $\rho = m/L$. Чтобы найти силу натяжения в интересующей нас точке, можно поступить следующим образом.

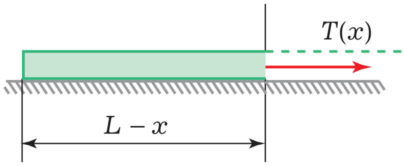


Рис. 5

Разобьём весь канат на две части с длинами x и $L - x$. Нас интересует вторая часть, которая как и весь канат, движется с ускорением a под действием силы натяжения $T(x)$ (см. рис. 5) в силу нерастяжимости последнего. Тогда на основе 2-го закона Ньютона можем записать следующее уравнение движения для выделенной нами части каната массой $\rho(L-x)$:

$$\rho(L-x)\cdot a = T(x),$$

откуда после несложных преобразований получим:

$$T(x) = F(1 - x/L).$$

Ответ. $T(x) = F(1 - x/L)$.

Задача 3. (Падение массивной цепочки) Абсолютно гибкая (легко сгибаемая) однородная цепочка массой m и длиной l висит вертикально над поверхностью стола, подвешенная за верхний конец (см. рис. 6).

Нижний конец цепочки касается стола. Верхний конец отпускают. Докажите, что в любой момент времени до тех пор, пока вся цепочка не упадёт на стол, её сила давления на поверхность стола будет равна утроенному весу лежащей на столе части цепочки.

Решение. Пусть к моменту $t < t_0$ длина лежащей на столе части цепочки равна x. Здесь

$$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{g}} -$$

момент времени, когда на стол упадёт самый верхний конец цепочки. Положим, что сила давления на стол этой части (т. е. её вес) равна $G(x)$. Данную силу легко связать с длиной цепочки, если ввести линейную плотность $\rho = m/l$. Тогда, очевидно, что вес $G(x)$ равен:

$$G(x) = \rho\cdot x\cdot g = \frac{mgx}{l},$$

где $x \le l$.

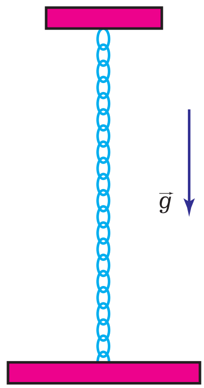


Рис. 6

Пусть теперь за малый промежуток времени от t до $t + \Delta t$ на стол падает часть цепочки длиной Δx. Масса отрезка Δx равна величине

$$\Delta m = \frac{m\Delta x}{l},$$

а скорость падения $v = \sqrt{2gx}$.

Так как Δt мало, то скорость элемента Δx можно считать постоянной, и его путь при свободном падении $\Delta x = v\cdot\Delta t = \sqrt{2gx}\cdot\Delta t$.

Масса элемента

$$\Delta m = \frac{m}{l}\Delta x = \frac{m}{l}v\cdot\Delta t = \frac{m}{l}\sqrt{2gx}\cdot\Delta t$$

изменит свой импульс при остановке на величину

$$\Delta p = \Delta(mv) = \Delta m\cdot v =$$

$$= \frac{m}{l}\sqrt{2gx}\cdot\Delta t\cdot\sqrt{2gx} = \frac{m}{l}\cdot 2gx\cdot\Delta t.$$

По второму закону Ньютона определим силу F, действующую со стороны стола на элемент Δx:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m}{l} 2gx.$$

По третьему закону Ньютона элемент цепочки действует на стол с такой же силой F. Поэтому полную силу давления на стол получим, сложив $G(x)$ и F:

$$N = G(x) + F = 3 \cdot \frac{mgx}{l} = 3G(x).$$

Задача 4. (Скользящая верёвка) Один конец тонкой гибкой верёвки с линейной плотностью ρ тянут с постоянной горизонтальной скоростью на высоте H над шероховатой поверхностью. Второй конец верёвки свободен (см. рис. 7). Длина части верёвки, соприкасающейся с поверхностью, равна L_1. Найдите длину верёвки L_2, не касающейся поверхности. Коэффициент трения скольжения верёвки по поверхности равен k.

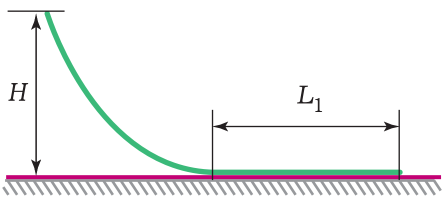
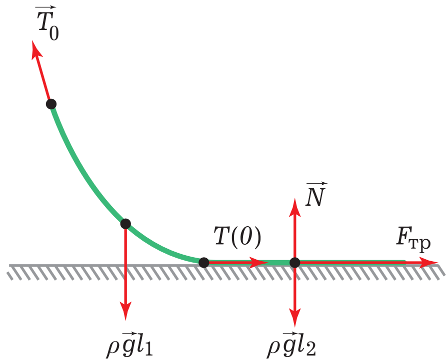
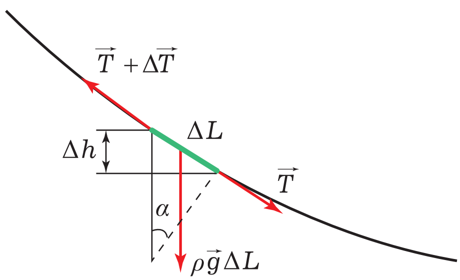


Рис. 7

Решение. Стоит отметить, что это достаточно сложная задача, соответствующая уровню всероссийских олимпиад. Но любую сложную задачу можно решить достаточно просто и красиво, как мы и поступим здесь. Во-первых, воспользуемся тем положением, что верёвка движется равномерно. Следовательно, сумма сил, приложенных к ней, а также к её части, лежащей на столе, равна нулю. Какие же силы приложены к верёвке? Очевидно, что имеет место сила $\vec{T}_0$, удерживающая верхний конец верёвки на одной высоте. Далее необходимо учесть силы тяжести её двух частей – $\rho g L_1$ и $\rho g L_2$ – и $\vec{N}$ – силу нормальной реакции со стороны горизонтальной поверхности. И, наконец, силу трения $\vec{F}_{тр}$ об эту поверхность. Схематическое расположение сил изображено на рис. 8 *а*.



а



б

Рис. 8

Запишем теперь условие равновесия для части верёвки, висящей в воздухе:

$$\vec{T}_0 + \rho \vec{g} L_2 + \vec{T}(0) = 0,$$

где $\vec{T}(0)$ – сила, действующая со стороны части верёвки, лежащей на поверхности. Из этого условия получим значение модуля силы T_0 по теореме Пифагора:

$$T_0 = \sqrt{(\rho g L_2)^2 + (T(0))^2}. \qquad (1)$$

Чтобы теперь найти силу $T(0)$, запишем условие равновесия малого элемента верёвки длиной ΔL (см. рис. 8 *б*):

$$T + \Delta T = T + \rho g \Delta L \sin\alpha.$$

Учитывая соотношение

$$\Delta L \sin\alpha = \Delta h$$

(см. рис. 8 *б*), получим, что $\Delta T = \rho g \Delta h$. То есть для силы натяжения $T(h)$ в точке верёвки, находящейся на высоте h над поверхностью, будем иметь:

$$T_0 - T(h) = \rho g (H - h).$$

Отсюда получаем значение силы натяжения в самой нижней точке той части верёвки, которая не соприкасается с поверхностью:

$$T(0) = T_0 - \rho g H. \qquad (2)$$

Такая же по модулю сила в соответствии с третьим законом Ньютона действует и на горизонтальную часть верёвки. Условия равновесия этой части имеют вид:

$$\rho g L_1 = N,\ T(0) = F_{\text{тр}} = kN = k\rho g L_1. \quad (3)$$

Из системы уравнений (1), (2) и (3) получим ответ:

$$L_2 = \sqrt{H(H + 2kL_1)}.$$

Проанализируем полученный результат в предельном случае $k \to 0$. Видим, что $L_2 \to H$, то есть при малом трении не лежащая на поверхности часть верёвки располагается почти вертикально, что вполне соответствует интуитивно ожидаемому результату.

Ответ. $L_2 = \sqrt{H(H + 2kL_1)}$.

Задача 5. (Ковровая дорожка) Узкий длинный ковёр лежит на полу (см. рис. 9). Конец ковра загибают и тянут назад с постоянной скоростью v. Масса единицы длины ковра равна ρ. Какую силу F прикладывают к концу ковра? Сравнить работу данной силы с кинетической энергией части ковра, сложенного вдвое. Считать, что длина ковра равна L.

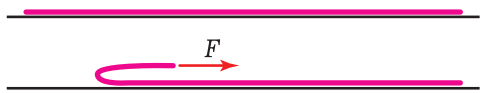


Рис. 9

Решение. Зададимся вопросом: что происходит с механической энергией при движении по ковру (или какому-то другому представителю гибкой связи) «точки перегиба»? На первый взгляд кажется, что ковёр можно считать идеальным в том смысле, что при таком движении нет потерь механической энергии. Но это не так! Заметим, что когда конец ковра, к которому приложена сила F, пройдёт путь L, точка перегиба ковра пройдёт путь $L/2$, т. е. она движется не со скоростью v, а со скоростью $u = v/2$.

Найдём связь силы F со скоростью движения конца ковра. Для этого рассмотрим малый промежуток времени Δt, за который в движение вовлекается участок ковра длиной $\Delta l = u\Delta t$ и массой $\Delta m = \rho u \Delta t$. Исходя из второго закона Ньютона, получим:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} v + m\frac{\Delta v}{\Delta t} =$$

$$= v\frac{\Delta m}{\Delta t} = v\rho u = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Здесь мы воспользовались по факту дифференцированием произведения двух функций: $m(t)$ и $v(t) = \text{const}$, зависящих от времени.

Рассмотрим разные члены в балансе энергии в тот момент, когда ковёр сложен вдвое. К этому моменту точка приложения внешней силы F пройдёт, как уже сказано, путь L. Значит, этой силой будет совершена работа:

$$A = FL = \frac{\rho v^2}{2} L.$$

Теперь определим кинетическую энергию движущейся части (т. е. половины) ковра:

$$E_k = \frac{L}{2}\rho\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}A.$$

Мы получили, что ровно половина работы внешней силы потеряна.

Отметим здесь то, что массивные гибкие связи нельзя считать идеальными – при движении точки перегиба мы обязательно теряем заметную часть механической энергии на деформацию ковра и выделение тепла из-за этого. Но, подчеркнём, речь идёт именно о массивных связях – к «невесомым» нитям, связывающим грузы в школьных задачах, всё это отношения не имеет.

Ответ. $F = \dfrac{\rho v^2}{2}.$

В задаче 3 мы рассмотрели абсолютно гибкую однородную цепочку массой m, падающую под действием своего веса. Рассмотрим теперь примерно похожую задачу, но уже с наличием блока (задача, часто встречающаяся на практике). Однако сразу сделаем акцент на следующем приближении: будем считать, что при движении цепочки последняя не отрывается от блока. Более подробно этот случай мы разберём в задаче 7.

Задача 6. (Цепочка перекинутая через блок) Через жёстко закреплённый и невесомый блок перекинули тонкую длинную цепочку с малыми неупругими звеньями так, что часть цепочки лежит на краю стола высотой h, а часть – на полу (см. рис. 10). С какой установившейся скоростью будет двигаться цепочка после того, как её отпустят? Считать, что при движении цепочки последняя не отрывается от блока.

Решение. Чтобы описать движение звеньев цепочки, аналогично предыдущей задаче 3 введём линейную плотность цепочки, равную $\rho = m/L$, где m – её масса, а L – длина. Не вдаваясь пока в подробности того, почему цепочка будет двигаться в конце с конечной скоростью, а не ускоренно, положим, что установившаяся скорость равна u. Тогда за малое время Δt в движение вовлекается масса $\Delta m = \rho u \Delta t$, скорость которой изменяется от 0 до u, а импульс – от 0 до $\Delta p = \Delta m u = \rho u^2 \Delta t$. Этот импульс сообщает массе Δm сила тяжести $\rho h g$, действующая на неуравновешенную часть цепочки. Исходя из второго закона Ньютона, получим:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}u + m\frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

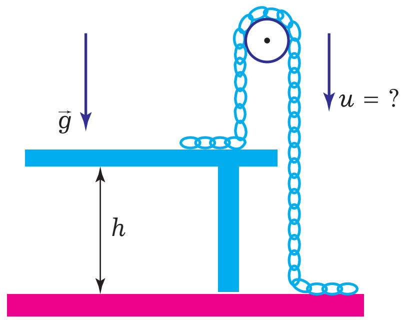


Рис. 10

Поскольку мы рассматриваем движение с установившейся скоростью, то $\Delta u = 0$. В итоге будем иметь:

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t}u = \frac{\rho u^2 \Delta t}{\Delta t} = \rho u^2 = \rho g h,$$

отсюда получаем, что $u = \sqrt{gh}$. Итак, почему же цепочка будет двигаться не ускоренно? Заметим, что в решении данной задачи (с учётом сказанного приближения) мы практически не рассматривали силы натяжения, действующие между звеньями. Однако именно в них-то и кроется ответ на данный вопрос. Более того, силы натяжения между звеньями в области блока зависят, как показывает более полный расчёт, от скорости, с которой цепь проматывается через блок (см. задачу 7). Такая зависимость как раз и обеспечивает выход на стационарный режим.

В дополнение заметим, что закон сохранения энергии $\Delta mgh = \Delta mu^2/2$ даёт неправильный результат, так как часть приобретаемой при спуске энергии (ровно половина) теряется при неупругом ударе цепочки о пол. Отметим также, что, если убрать блок, т. е. рассматривать задачу о соскальзывании цепочки с края стола на пол, для нахождения установившейся скорости ни в решении, ни в ответе ничего не изменится.

Ответ. $u = \sqrt{gh}$.

Рассмотрим, наконец, задачу 7, в которой мы учтём изменение силы натяжения в прилегающих к блоку частях цепочки, а также поясним приближение отсутствия отрыва цепи при проматывании через блок, использованное в предыдущей задаче.

Задача 7. (Отрыв троса от блока) Тяжёлый и гибкий трос массой m и длиной L перекинут через лёгкий блок и висит почти симметрично (см. рис. 11). Диаметр блока d значительно меньше длины нити, т. е. $d \ll L$. Чему равна скорость троса в момент, когда он отрывается от блока?

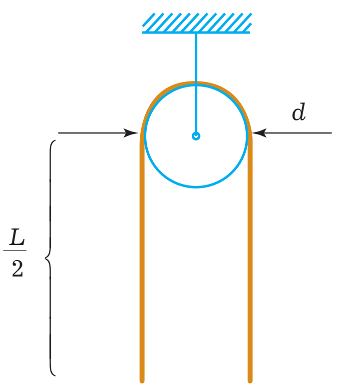


Рис. 11. Перекинутый трос в начальный момент времени

Решение. Как видим, в этой задаче мы должны учесть массу троса в отличие от массы блока, а также его гибкость, что означает, что сила натяжения в любой точке троса направлена по касательной к тросу. Рассмотрим сначала энергетический подход к решению данной задачи.

1 способ (энергетический подход).

Изменение полной механической энергии системы равно сумме работ сил сопротивления, которые по умолчанию равны нулю в нашем случае, и работе внешних в энергетическом смысле сил. У нас эту роль играет сила реакции опоры со стороны блока, однако её мощность равна нулю в силу того, что сила реакции опоры перпендикулярна скорости движения троса в точке касания:

$$\Delta E = A_{\text{внут}} + A_{\text{внеш}}.$$

Следовательно, изменение механической энергии равно нулю:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E = const.$$

Поскольку полная механическая энергия сохраняется, то выберем два состояния системы для её дальнейшего исследования. Рассмотрим энергии $E(а)$ и $E(б)$ в состояниях *а)* и *б)* соответственно (см. рис. 12) и составим для них уравнения, а потом приравняем.

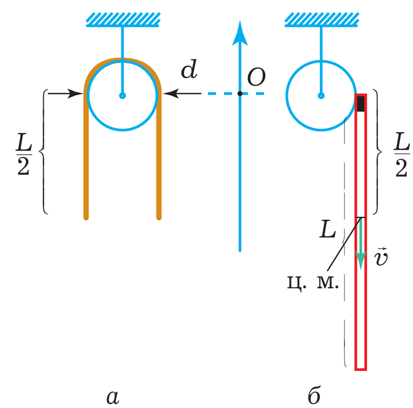


Рис. 12. а) Начальное состояние системы; б) конечное, когда трос соскользнул с блока

Так как в состоянии *а)* никакого движения нет, то механическая энергия представлена только потенциальной энергией, а она для протяжённого тела определяется центром масс, который имеет координату $y = -\frac{L}{4}$. Отсюда имеем:

$$E(a) = mg\left(-\frac{L}{4}\right) = -\frac{mgL}{4}.$$

Энергия в состоянии *б)* равна:

$$E(б) = \frac{mv^2}{2} + mgy_{\text{ц.т.}},$$

где $y_{\text{ц.т.}} = -\frac{L}{2}$. Отсюда получаем:

$$E(б) = \frac{mv^2}{2} + mgy_{\text{ц.т.}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgL}{2}.$$

Приравнивая теперь *E(а)* и *E*(б), находим скорость, с которой трос будет двигаться в конце:

$$E(a) = E(б) \Leftrightarrow -\frac{mgL}{4} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgL}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

Заметим, что это решение ошибочно, так как мы неправильно трактуем понятие отрыва. Отрыв – это не тогда, когда исчезает касание между тросом и блоком, это тогда, когда между ними исчезает взаимодействие. Понятно, что без касания нет взаимодействия, но вполне может быть, что касание есть, а взаимодействия нет. На самом деле отрыв – это когда впервые исчезает сила реакции опоры. Мы все знаем, что на выпуклом мосту машина с определённой скоростью может оторваться от моста, аналогичная ситуация и у нас в задаче.

2 способ (динамический подход). Подумаем, сколько мы можем составить уравнений. Кроме скорости, становится неизвестной разность длин ΔL свисающих частей троса в момент отрыва. Значит, требуется 2 уравнения для 2 неизвестных. Так как ЗСЭ даёт только одно уравнение, то надо лезть в дебри динамики. С динамической точки зрения трос делится на две части: участки, которые свешиваются справа и слева от блока – это одна часть, а другая – это та, которая прилегает к блоку (см. рис. 13).

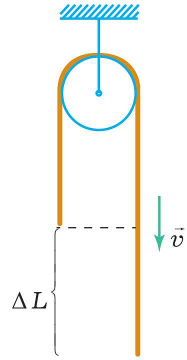


Рис. 13. Изображение свисающих участков троса в момент отрыва последнего от блока

Формирование силы натяжения нити на этих частях разное, но в местах их встречи силы одинаковы согласно третьему закону Ньютона. Это даёт надежду на то, что, исследуя формирование силы натяжения на разных частях троса, мы получим недостающие уравнения. Что ж, приступим.

Сначала рассмотрим динамическое состояние маленькой части троса длиной Δl в момент отрыва (см. рис. 14). На него действуют соседние участки троса слева и справа, а также сила тяжести Земли и сила реакции блока – как опоры. Но в момент отрыва сила реакции равна нулю.

Далее, малый размер блока означает, что радиус кривизны траектории нашего участка

$$R = \frac{d}{2} \ll L.$$

Следовательно, центростремительное ускорение много больше тангенциального, т. е.

$$a_{\text{центр}} = \frac{v^2}{R} \gg a_{\text{танг}} \text{ или } g.$$

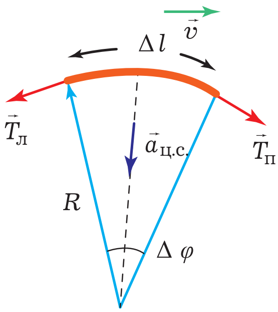


Рис. 14. Схематическое изображение сил, действующих на малый элемент длины троса Δl в момент отрыва от блока

Пренебрежимость тангенциальным ускорением $a_{\text{танг}}$ означает равенство сил натяжения слева и справа. Также мы можем не учитывать и силу тяжести. Найдём теперь, как зависит сила натяжения от скорости, с которой трос проматывается через блок. Для этого рассмотрим направления и значения сил на рис. 15 *а*.

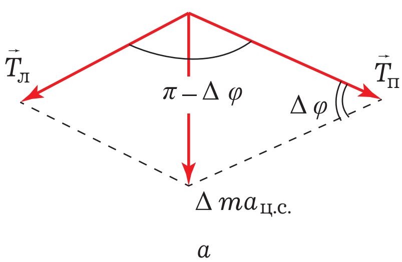


Рис. 15

Из рис. 14 видно, что малому элементы длины Δl соответствует малый центральный угол, под которым этот элемент виден из центра окружности радиусом R. Этот угол связан с длиной и радиусом соотношением $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta l}{R}$. Из рис. 15 *а* видно, что угол между силами $\vec{T}_л$ и $\vec{T}_п$ равен $\pi - \Delta\varphi$. Запишем теперь второй закон Ньютона для участка троса длиной Δl:

$$\vec{T}_л + \vec{T}_п = \Delta m \vec{a}_{ц.с.}.$$

Из рис. 15 *б* легко найти соотношение проекций сил, действующих на малый элемент Δl. Т. к. трос отрывается от блока, то:

$$\Delta m a_{ц.с.} = 2 \cdot T \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \simeq T\Delta\varphi,$$

т. к. $\Delta\varphi \ll 1$.

Для удобства решения введём линейную плотность троса $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta l}$. Тогда, подставляя $\Delta m = \rho\Delta l$ и $\Delta\varphi = \Delta l / R$ в предыдущее выражение, получим:

$$\rho\Delta l \cdot \frac{v^2}{R} = T \cdot \frac{\Delta l}{R} \Rightarrow T = \rho v^2. \quad (4)$$

Таким образом, мы установили, что сила натяжения троса в момент отрыва пропорциональна квадрату скорости движения. Данное выражение справедливо для всех прилегающих к блоку точек троса, в том числе и для крайних точек свисающих частей. Значит, по краям прилегающего к блоку участка троса силы натяжения одинаковы. Следовательно, такие же силы действуют на верхние концы свисающих частей троса (см. рис. 16).

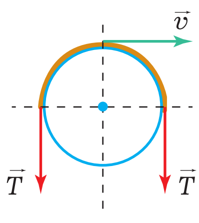


Рис. 16

Найдём теперь скорость, с которой будет двигаться трос в момент отрыва. Заметим из рис. 17, что в момент отрыва от левого свисающего участка отняли длину $\frac{\Delta L}{2}$, а к правому прибавили $\frac{\Delta L}{2}$. Здесь нам опять понадобится сила T. Поэтому запишем второй закон Ньютона для левой и правой свисающих частей.

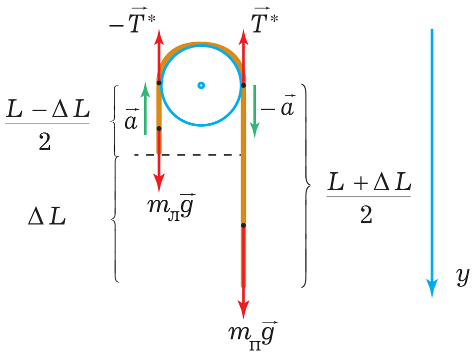


Рис. 17

Так как трос нерастяжимый и движение прямолинейное, то ускорения левой и правой частей равны по модулю и противоположны по направлению: $\vec{a}_л = -\vec{a}_п$. Следовательно, можем записать в проекциях на ось y:

$$\begin{cases} m_л g - T = m_л a, \\ m_п g - T = -m_п a. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{T - m_л g}{m_п g - T} = \frac{m_л}{m_п} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{2m_п m_л g}{m_п + m_л} = \frac{2m_п m_л g}{m}.$$

Полагая теперь, что массы левой и правой свисающих частей равны соответственно $m_л = \rho l_л$, $m_п = \rho l_п$, а $m = \rho L$, и учтя ещё то, что $l_л = L - \Delta L$, $l_п = L + \Delta L$ (см. рис. 17), получим:

$$T = \frac{2m_п m_л g}{m} = \frac{2l_п \rho l_л \rho g}{L\rho} =$$

$$= \frac{2l_п l_л \rho g}{L} = \frac{2\rho g}{L} \cdot \frac{L-\Delta L}{2} \cdot \frac{L+\Delta L}{2} =$$

$$= \frac{\rho g}{L} \cdot \frac{L^2 - \Delta L^2}{2} = \frac{\rho g}{2L} \cdot (L^2 - \Delta L^2).$$

Сравнивая полученное выражение с (4), находим, что:

$$v^2 = \frac{g}{2L}(L^2 - \Delta L^2). \qquad (5)$$

Осталась теперь только одна неизвестная величина ΔL. Поэтому запомним пока это выражение, а сами дополнительно рассмотрим ещё закон сохранения энергии, чтобы как раз вытащить из него неизвестную величину. Как мы уже указывали в 1 способе решения, энергия системы в самом начале равна:

$$E(а) = -\frac{mgL}{4} = -\frac{\rho LgL}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(а) = -\frac{\rho g L^2}{4}.$$

Аналогично найдём энергию в момент отрыва троса от блока $E(б)$. Данная энергия будет складываться из двух энергий. Кинетической, равной

$$E_к(б) = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho L v^2}{2},$$

и потенциальной $E(б)$, равной

$$E_п(б) = m_л g \cdot y_{ц.м._л} + m_п g \cdot y_{ц.м._п},$$

здесь $y_{ц.м._л}$ и $y_{ц.м._п}$ – координаты центров масс левой и правой свисающих частей соответственно. Из рис. 17 легко видеть, что:

$$y_{ц.м._л} = -\frac{L-\Delta L}{4},$$

$$а \;\; y_{ц.м._п} = -\frac{L-\Delta L}{4}.$$

Следовательно, выражение для потенциальной энергии будет иметь вид:

$$E_n(б) = \rho \cdot \frac{L-\Delta L}{2} g\left(-\frac{L-\Delta L}{4}\right) +$$

$$+\rho\cdot\frac{L+\Delta L}{2}g\left(-\frac{L+\Delta L}{4}\right)=$$

$$=-\frac{\rho g}{8}\left((L+\Delta L)^2+(L+\Delta L)^2\right)=$$

$$=-\frac{\rho g}{8}(L^2+\Delta L^2)\cdot 2=-\frac{\rho g}{4}(L^2+\Delta L^2).$$

Таким образом, полная энергия E(б) равна:

$$E_{\text{п}}(б)=\frac{\rho L^2 v^2}{2}-\frac{\rho g}{4}(L^2+\Delta L^2).$$

Приравнивая полные энергии начального состояния и конечного, получим уравнение:

$$\frac{\rho L v^2}{2}-\frac{\rho g}{4}(L^2+\Delta L^2)=-\frac{\rho g L^2}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\rho L v^2}{2}=\frac{g\rho}{2}\Delta L^2,$$

откуда найдём ещё одно выражения для скорости:

$$v^2=\frac{g}{2L}\Delta L^2. \qquad (6)$$

Приравнивая полученные выражения (5) и (6) для скорости, окончательно найдём, что:

$$v=\frac{\sqrt{gL}}{2}.$$

Заметим, что окончательный результат отличается от того, что мы получили в первом способе, в $\sqrt{2}$ раз!

Ответ. $v=\dfrac{\sqrt{gL}}{2}.$

Упражнения

Задача 1. (Нить в трубке) Внутри U-образной трубки массой M, находящейся на гладком столе, движется нерастяжимая нить массой m (см. рис. 18; вид сверху). В начальный момент в каждом колене трубки находилось по половине нити, а сама трубка двигалась. При этом скорость конца A нити была равна v_0, а скорость конца B – нулю. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из неё? Движение трубки допускается только вдоль её прямолинейных участков, радиус трубки считать очень малым. Трением пренебречь.

Рис. 18

Ответ.

$$u_1=u+\frac{v_0}{2}=\frac{v_0}{2}\left(1-\frac{m}{\sqrt{M(m+M)}}\right).$$

Задача 2. (Колебания цепочки) Тонкая гибкая цепочка ABC массой m длиной l соединена с невесомой нитью AB_1C. Нить переброшена через неподвижный блок O_1 (см. рис. 19). Цепочка – через неподвижный блок O_2. Блоки невесомы, трения нет. Систему вывели из положения равновесия, приподняв один из концов цепочки.

Найдите период малых колебаний цепочки.

Ответ. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}.$

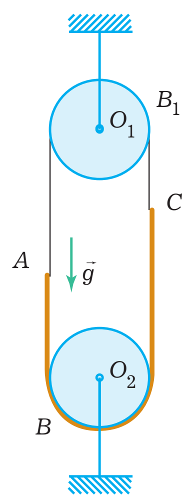


Рис. 19