Трушин Борис Викторович
Преподаватель кафедры высшей математики Московского физико- технического института, учитель средней физико-математической школы №5 г. Долгопрудный, член жюри Московской областной олимпиады школьников по математики, аспирант МФТИ.

Одна задача про многоугольник

Когда я был еще щкольником, мне на одной из олимпиад встретилась такая задача:

Существует ли выпуклый 2005–угольник, длины всех сторон и диагоналей которого — целые числа?

Конечно, не кривя душой, я вряд ли смогу утверждать, что условие звучало именно так или хоть сколь-нибудь похоже, но это не суть важно... давайте попробуем решить ее!

Первая идея, которая может прийти в голову — это «*а может быть подойдет какой-нибудь правильный 2005-угольник?*» Однако, немного подумав, мы понимаем, что вряд ли на таком пути мы прийдем к решению... Во–первых, попытавшись построить квадрат или правильный пятиугольник с целочисленными сторонами и диагоналями, мы замечаем, что и у того и у другого диагонали в иррациональное число раз больше сторон *(почему?)*, и длины сторон и диагоналей одновременно целочисленными быть не могут... Но если нет правильных многоугольников даже с небольшим числом углов, удовлетворяющих условиям задачи — очень непохоже, что для какого-то правильного 2005–угольника условия выполнятся. Во–вторых, даже если так случайно и получится, что найдется правильный 2005–угольник, удовлетворяющий условиям задачи, то как же мы будем доказывать, что он действительно подходит? Дело в том, что в отличие от квадрата и правильного пятиугольника, не все диагонали правильного 2005–угольника имеют одинаковую длину, более того, у него диагонали имеют 1001 *(почему?)* различную длину! И как же мы станем доказывать, что можно сделать так, чтобы все они имели целочисленные длины?..

Вторая идея, при помощи которой можно попытаться решить задачу, — это воспользоваться методом математической индукции. То есть попробовать доказать, что, сумев построить n–угольник, удовлетворяющий условиям, мы сможем построить и $(n+1)$–угольник. Давайте попробуем! Начать надо с треугольника. Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, построить легко — подойдет, например, правильный треугольник со стороной равной единице. Теперь, имея треугольник, постараемся построить четырехугольник. То есть нам надо вне нашего треугольника найти такую точку, что получившийся четырехугольник окажется выпуклым, а расстояния от этой точки до вершин исходного треугольника будут целочисленны. Однако, как легко заметить, вне (да и внутри тоже) правильного треугольника с единичной стороной такой точки найти нельзя *(почему?)*. А это означает, что даже для того, чтобы получить четырехугольник, удовлетворяющий условиям, первоначальный треугольник надо выбирать не абы какой, а позволяющий таким образом достичь цели (получить 2005–угольник). Что-то не очень верится, что на этом пути нам удастся дойти до решения...

Похоже, что простыми методами эту задачу решить не получится... Поэтому давайте на время оставим ее и порешаем другую, на первый взгляд (но лишь на первый!) совсем не относящуюся к нашей, задачу

Можно ли на окружности единичного диаметра отметить 2005 точек, расстояние между любыми двумя из которых — рациональные числа?

Как подступиться к этой задаче, тоже не совсем ясно... Проблема в том, что не понятно, как считать расстояние между точками, расположенными на окружности. Поэтому хочется как-нибудь «развернуть» окружность и переформулировать эту задачу для прямой. Для этого отметим на окружности произвольную точку A и точку B диаметрально противоположную ей (рис. 1). Через точку A проведем касательную к окружности и каждой точке M окружности поставим в соответствие точку M' на прямой так, чтобы точки B, M и M' лежали на одной прямой.

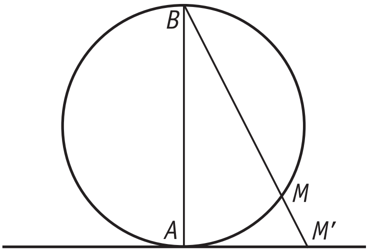

Рис. 1.

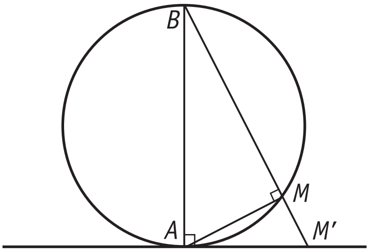

Рис. 2.

Заметим теперь, что треугольники BMA и BAM' подобны (рис. 2), так как они оба прямоугольные, а угол MBA — общий. Поэтому $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BA}{BM'}$, то есть

$$BM \cdot BM' = BA^2 = 1,$$

так как BA — диаметр, который по условию равен единице.

Давайте теперь рассмотрим пару точек M_1 и M_2 на окружности и соответствующие им точки M_1' и M_2' на прямой (рис. 3).

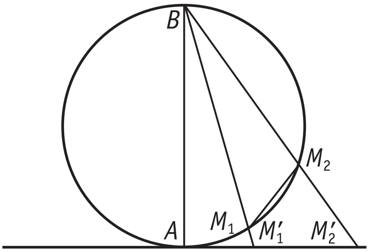

Рис. 3.

Заметим, что

$$BM_1 \cdot BM_1' = BM_2 \cdot BM_2' = BA^2 = 1,$$

поэтому $\dfrac{BM_1}{BM_2'} = \dfrac{BM_2}{BM_1'}$, откуда получаем, что треугольники BM_1M_2 и $BM_2'M_1'$ подобны. Тогда длина отрезка M_1M_2 равна

$$M_1M_2 = M_1'M_2'\frac{BM_1}{BM_2'} = \frac{M_1'M_2'}{BM_1' \cdot BM_2'},$$

где последнее равенство справедливо в силу того, что $BM_1 \cdot BM_1' = 1$.

Таким образом мы получаем, что для рациональности длины отрезка M_1M_2 достаточно, чтобы длины BM_1', BM_2' и $M_1'M_2'$ были рациональны, а для рациональности последнего достаточно, чтобы отрезки AM_1' и AM_2' были рациональны. То есть, если мы найдем на прямой 2005 точек M_1', M_2', M_3', $\ldots$, M_{2005}', для каждой из которых длины BM_i' и AM_i' рациональны, то и длины всех отрезков M_iM_j будут также рациональны.

Попытаемся понять, когда же одновременно длины BM' и AM' рациональны (рис. 1). Пусть

$$BM' = \frac{a}{b}, \quad AM' = \frac{c}{d},$$

где a, b, c, d — какие-то натуральные числа, тогда приводя дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к общему знаменателю получим, что

$$BM' = \frac{n}{k}, \quad AM' = \frac{m}{k}.$$

Вспомним теперь, что треугольник BAM' прямоугольный, поэтому из теоремы Пифагора имеем

$$BM'^2 = AM'^2 + AB^2,$$

а в силу того, что длина диаметра AB равна единице, получаем

$$n^2 = k^2 + m^2,$$

то есть тройка чисел (n,k,m) Пифагоровская (т.е.треугольник с такими длинами сторон является прямоугольным).

В итоге наша задача свелась к известному факту, что взаимно простых Пифагоровских троек (то есть троек, не имеющих общего делителя) бесконечно много *(почему?)*. Действительно, пусть (n_1,k_1,m_1), (n_2,k_2,m_2), (n_3,k_3,m_3), $\ldots$, $(n_{2005},k_{2005},m_{2005})$ — 2005 взаимно простых Пифагоровских троек, тогда, во-первых, все длины

$$BM_i' = \frac{n_i}{k_i}, \quad AM_i' = \frac{m_i}{k_i}$$

рациональны, а во-вторых, все точки M_i' различны, так как из взаимной простоты Пифагоровской тройки (n_i,k_i,m_i) следует, что числа m_i и k_i взаимно просты *(почему?)*.

Но тогда и расстояния между любыми двумя точками M_i, M_j окружности, соответствующими точкам M_i', M_j' прямой, рациональны, и, следовательно, мы решили нашу вспомогательную задачку.

Давайте теперь поймем, какое же отношение эта задача имеет к той задаче, которую мы хотим решить. Мы доказали, что на окружности диаметра 1 можно отметить 2005 точек так, что все попарные расстояния между ними рациональны, значит — доказали, что можно найти вписанный в эту окружность 2005–угольник, все стороны и диагонали которого имеют рациональную длину! Но если есть несколько рациональных чисел, всегда можно найти такое натуральное число, при домножении на которое все эти числа станут целыми (достаточно в качестве такого числа взять произведение всех знаменателей этих рациональных чисел). Значит, взяв 2005–угольник, подобный нашему вписанному с коэффициентом подобия, равным тому самому натуральному числу, на которое следует домножить все попарные растояния между найденными точками на окружности, чтобы они все стали целыми. Но тогда у этого 2005–угольника длины всех сторон и диагоналей целые числа! А это означает, что нам удалось решить нашу задачу.

Теперь, для полноты изложения, ответим на все «*почему?*», встретившиеся нам по ходу решения.

1. Почему у правильного пятиугольника длина диагонали в иррациональное число раз больше длины стороны?

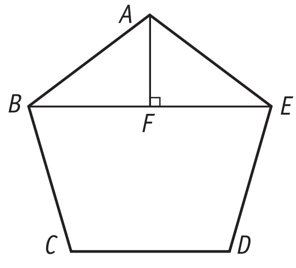

Рис. 4.

Пусть длина стороны правильного пятиугольника $ABCDE$ равна a (рис. 4), тогда, в силу того, что сумма углов произвольного пятиугольника равна $540°$, угол BAE равен $\frac{540°}{5} = 108°$. Пусть F — основание перпендикуляра из точки A на диагональ BE. Тогда углы BAF и FAE равны по $54°$. Следовательно длина диагонали BE равна

$$BE = BF + FE = 2a\sin 54°,$$

а, значит, достаточно показать, что $\sin 54°$ иррационален.

Во-первых, $\sin 54° = \cos 36°$. Во-вторых, из того, что $\cos 72° = -\cos 108°$ получаем

$$2\cos^2 36° - 1 = -\left(4\cos^3 36° - 3\cos 36°\right),$$

то есть число $\cos 36°$ удовлетворяет уравнению

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Заметим, что $x = -1$, очевидно является решением этого уравнения. Но понятно, что $\cos 36° \neq -1$, поэтому, деля многочлен на $(x+1)$, получаем, что $\cos 36°$ является корнем кваратного уравнения

$$4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Его корнями являются числа

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Однако очевидно, что $\cos 36°$ — число положительное, следовательно x_1 не подходит. Значит

$$\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Откуда следует, что и $\sin 54°$ иррационален, что и требовалось показать.

2. Почему диагонали правильного 2005-угольника имеют 1001 различную длину?

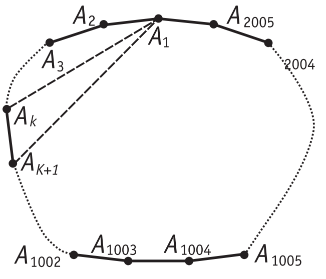

Рис. 5.

Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_{2005}$ — правильный 2005-угольник (см. рис. 5). Из вершины A_1 можно провести всего 2002 диагонали (во все вершины, кроме A_1, A_2 и A_{2005}), но в силу симметрии длины диагоналей A_1A_3 и A_1A_{2004}, A_1A_4 и A_1A_{2003}, …, A_1A_{1003} и A_1A_{1004} равны. Поэтому достаточно показать лишь, что все длины A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, …, A_1A_{1003} различны. Это следует из того, что для любого k $(2 < k < 1003)$ в треугольнике $A_kA_1A_{k+1}$ угол $A_1A_kA_{k+1}$ тупой и, следовательно, $A_1A_{k+1} > A_1A_k$. Откуда получаем

$$A_1A_3 < A_1A_4 < A_1A_5 < \ldots$$
$$\ldots < A_1A_{1002} < A_1A_{1003},$$

что завершает доказательство.

3. Почему на плоскости нельзя найти точку, которая вместе с некоторым правильным треугольником с единичной стороной образует четырехугольник, все стороны и диагонали которого целочисленны?

Допустим противное. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной один, и есть точка M такая, что $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$, где a, b, c — натуральные числа. Тогда из неравенства треугольника для ABM получаем

$$a + 1 > b, \quad b + 1 > a,$$

то есть $a = b$ (так как, если для двух натуральных чисел справедливо неравенство $a + 1 > b$, то $a \geqslant b$). Аналогично $a = c$. Но это означает, что треугольники AMB, AMC, BMC — равнобедренные, а, следовательно, точка M — это точка пересечения серединных перпендикуляров, что явно не подходит.

4. Почему взаимно простых Пифагоровских троек бесконечно много?

Укажем бесконечную последовательность взаимно простых Пифагоровских троек вида $(k + 1, k, m)$, то есть

$$(k + 1)^2 = k^2 + m^2.$$

Откуда $2k + 1 = m^2$. Значит, в качестве m можно взять любое нечетное число, большее единицы, а k находим из условия $k = \dfrac{m^2 - 1}{2}$. А так как нечетных чисел бесконечно много, то и троек такого вида так же бесконечное число. Взаимная простота каждой из них следует из того, что последовательные числа k и $(k + 1)$ не могут иметь общего делителя.

5. Почему из взаимной простоты Пифагоровской тройки (n,k,m) следует, что числа m и k взаимно просты?

Допустим противное. Пусть d — какой-то общий делитель чисел m и k, тогда $m = m_1 d$ и $k = k_1 d$, где m_1 и k_1 натуральные числа. Но

$$n^2 = k^2 + m^2 = k_1^2 d^2 + m_1^2 d^2 = \left(k_1^2 + m_1^2\right) d^2,$$

и, следовательно, число n также делится на d, что противоречит взаимной простоте тройки (n,k,m).