Дроздов Виктор Борисович
Преподаватель физики Медицинского университета г. Рязани, кафедра физики. Почётная грамота Министерства просвещения СССР 1979 г.

Тригонометрические тождества

§ 1. Теорема Виета - один из способов получения тригонометрических тождеств

Как-то автор данной статьи записал известную со школьных лет формулу тангенса двойного угла

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

в виде квадратного уравнения относительно $\mathrm{tg}\alpha$

$$\mathrm{tg}^2\alpha+2\mathrm{ctg}2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha-1=0.$$

Оказалось, что как при $\alpha=15^\circ$, так и при $\alpha=105^\circ$ $\mathrm{ctg}2\alpha=\sqrt{3}$. Следовательно, величины $\mathrm{tg}15^\circ$ и $\mathrm{tg}105^\circ$ являются корнями квадратного уравнения $y^2+2\sqrt{3}y-1=0$, откуда по теореме Виета сразу получаем:

$$\mathrm{tg}15^\circ+\mathrm{tg}105^\circ=-2\sqrt{3}, \qquad (1)$$

$$\mathrm{tg}15^\circ\cdot\mathrm{tg}105^\circ=-1. \qquad (2)$$

Тождество (2) совершенно тривиально, а вот тождество (1) хотя и довольно простое, но не очевидное. Выходит, нами только что найден алгебраический метод получения тригонометрических тождеств! Причём гораздо более сложных и красивых, чем тождество (1). Установим ещё ряд тождеств, но сначала выведем тригонометрические формулы тройного угла, а затем докажем теорему Виета для кубических уравнений.

Применим формулу тангенса суммы двух углов

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y} \qquad (3)$$

и получим

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad (4)$$

и $\mathrm{tg}3\alpha=\mathrm{tg}(\alpha+2\alpha)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}2\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}2\alpha}=$

$$=\frac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}. \qquad (5)$$

Пусть приведённое кубическое уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (6)$$

имеет корни x_1, x_2, x_3. По теореме Безу левая часть уравнения (6) делится на линейные двучлены

$$x-x_1,\ x-x_2,\ x-x_3.$$

Поэтому справедливо тождество

$$x^3+ax^2+bx+c=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

или после перемножения скобок

$$x^3+ax^2+bx+c=$$
$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+$$
$$+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Многочлены равны при всех значениях аргумента тогда и только тогда, когда равны их соответствующие коэффициенты, значит, верны равенства

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b, \\ x_1x_2x_3=-c. \end{cases} \qquad (7)$$

Формулы (7) выражают теорему Виета для кубических уравнений.

Применим формулы (3)-(5) и (7) к тригонометрическим расчётам. При

$\alpha=10^\circ$, $\alpha=50^\circ$, $\alpha=-70^\circ$ $\sin 3\alpha=\frac{1}{2}$,

поэтому из формулы (3) вытекает, что $\sin\alpha$ этих углов удовлетворяют равенству

$$3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\frac{1}{2},$$

т.е. $\sin 10^\circ$, $\sin 50^\circ$ и $-\sin 70^\circ$ – корни кубического уравнения

$$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0.$$

Следовательно, в силу формул (7) справедливы равенства:

$$\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\sin 70^\circ=0,$$

$$-\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ+\sin 10^\circ\cdot\sin 70^\circ+$$

$$+\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=\frac{3}{4},$$

$$\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=\frac{1}{8}. \qquad (8)$$

Интересно, что хотя $\sin 10^\circ$, $\sin 50^\circ$, $\sin 70^\circ$ в радикалах не выражаются, их приведённые выше алгебраические комбинации являются рациональными числами.

Ещё одна серия тождеств: возведём формулу (5) в квадрат:

$$\mathrm{tg}^2 3\alpha=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\left(3-\mathrm{tg}^3\alpha\right)^2}{\left(1-3\mathrm{tg}^2\alpha\right)^2}.$$

При $\sin 20^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 80^\circ$ $\mathrm{tg}^2 3\alpha=3$.

Обозначив $\mathrm{tg}^2\alpha=y$, приходим к уравнению $y^3-33y^2+27y-3=0$.

Итак,

$$\mathrm{tg}^2 20^\circ+\mathrm{tg}^2 40^\circ+\mathrm{tg}^2 80^\circ=33,$$

$$\mathrm{tg}^2 20^\circ\cdot\mathrm{tg}^2 40^\circ+\mathrm{tg}^2 20^\circ\cdot\mathrm{tg}^2 80^\circ+ \qquad (9)$$

$$+\mathrm{tg}^2 40^\circ\cdot\mathrm{tg}^2 80^\circ=27,$$

$$\mathrm{tg}^2 20^\circ\cdot\mathrm{tg}^2 40^\circ\cdot\mathrm{tg}^2 80^\circ=3.$$

§ 2. Доказательство тригонометрических тождеств

Задача 1. Доказать, что

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}. \qquad (10)$$

Приведём стандартный способ его доказательства.

Решение.

Имеем:

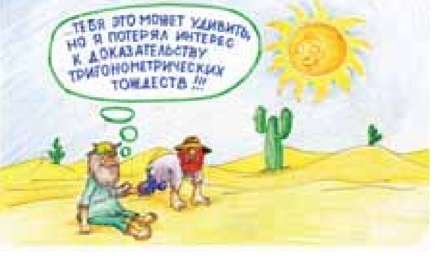
$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}=$$

$$=-\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=$$

$$=-\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}.$$



А вот получить аналогичную формулу для синусов

$$\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8} \qquad (11)$$

сложнее. Поэтому остановимся лишь на ключевых моментах, а промежуточные вычисления опустим. Выполните их сами. Сначала удобнее начать с преобразования выражения

$$8\sin^2\frac{\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{7},$$

равного

$$\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\cdot\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

Раскроем скобки, заменим все произведения двух косинусов суммой косинусов, приведём подобные члены. В результате имеем:

$$8\sin^2\frac{\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{7}=$$

$$=1-\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8},$$

откуда и вытекает формула (11). Заметим, что из формул (10) и (11) сразу следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}.$$

Следующую серию тригонометрических тождеств можно доказать одним, совсем не тривиальным, способом.

Задача 2. Доказать, что:

а) $\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}22^\circ\cdot\operatorname{tg}38^\circ\cdot\operatorname{tg}42^\circ\cdot$
$\cdot\operatorname{tg}58^\circ\cdot\operatorname{tg}62^\circ\cdot\operatorname{tg}78^\circ\cdot\operatorname{tg}82^\circ=1;$

б) $\operatorname{tg}4^\circ\cdot\operatorname{tg}16^\circ\cdot\operatorname{tg}24^\circ\cdot\operatorname{tg}44^\circ\cdot$
$\cdot\operatorname{tg}56^\circ\cdot\operatorname{tg}64^\circ\cdot\operatorname{tg}76^\circ\cdot\operatorname{tg}84^\circ=1;$

в) $\operatorname{tg}6^\circ\cdot\operatorname{tg}14^\circ\cdot\operatorname{tg}26^\circ\cdot\operatorname{tg}34^\circ\cdot$
$\cdot\operatorname{tg}46^\circ\cdot\operatorname{tg}66^\circ\cdot\operatorname{tg}74^\circ\cdot\operatorname{tg}86^\circ=1;$

г) $\operatorname{tg}8^\circ\cdot\operatorname{tg}12^\circ\cdot\operatorname{tg}28^\circ\cdot\operatorname{tg}32^\circ\cdot$
$\cdot\operatorname{tg}48^\circ\cdot\operatorname{tg}52^\circ\cdot\operatorname{tg}68^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ=1.$

Решение. Преобразуем уже рассмотренную формулу

$$\operatorname{tg}3x=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}:$$

$$\operatorname{tg}3x=\frac{\operatorname{tg}x\cdot\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}x\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\operatorname{tg}x\right)}{\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{tg}x\cdot\frac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}x}=$$

$$=\operatorname{tg}\left(60^\circ-x\right)\cdot\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\left(60^\circ+x\right). \qquad (12)$$

Применим теперь формулу (12) к каждому сомножителю её правой части:

$$\operatorname{tg}\left(60^\circ-x\right)=\operatorname{tg}\left(40^\circ+\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(20^\circ-\frac{x}{3}\right)\cdot$$
$$\cdot\operatorname{tg}\left(80^\circ-\frac{x}{3}\right),$$

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\left(60^\circ-\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{3}\cdot\operatorname{tg}\left(60^\circ+\frac{x}{3}\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(60^\circ+x\right)=\left(40^\circ-\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(20^\circ+\frac{x}{3}\right)\cdot$$
$$\cdot\operatorname{tg}\left(80^\circ+\frac{x}{3}\right)$$

и окончательно получим:

$$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}\frac{x}{3}\cdot\operatorname{tg}\left(20^\circ-\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(20^\circ+\frac{x}{3}\right)\cdot$$
$$\cdot\operatorname{tg}\left(40^\circ-\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(40^\circ+\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(60^\circ-\frac{x}{3}\right)\cdot$$
$$\cdot\operatorname{tg}\left(60^\circ+\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(80^\circ-\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(80^\circ+\frac{x}{3}\right).$$

Положив в последней формуле $x=6^\circ$, $x=12^\circ$, $x=18^\circ$, $x=24^\circ$, найдём соответственно, что произведения а), б), в) и г) равны единице, например, при $x=6^\circ$ будем иметь:

$$\operatorname{tg}18^\circ=\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}18^\circ\cdot\operatorname{tg}22^\circ\cdot\operatorname{tg}38^\circ\cdot$$
$$\cdot\operatorname{tg}42^\circ\cdot\operatorname{tg}58^\circ\cdot\operatorname{tg}62^\circ\cdot\operatorname{tg}78^\circ\cdot\operatorname{tg}82^\circ,$$

откуда и следует тождество а).