

Подлесный Дмитрий Владимирович
 Заместитель директора по развитию,
 научный руководитель ГБОУ РМ
 «Республиканский лицей»,
 кандидат педагогических наук, доцент,
 заслуженный работник высшей школы Российской
 Федерации, народный учитель Республики Мордовия.



Свободные незатухающие электрические колебания

Настоящая статья посвящена свободным незатухающим электрическим колебаниям, происходящим в электрических цепях, в которых одновременно присутствуют и конденсатор (конденсаторы), и катушка (катушки) индуктивности.

В статье наряду с теоретическими основами рассматриваемых колебательных процессов разобран и целый ряд задач, ранее предлагавшихся на вступительных экзаменах по физике в МФТИ.

1. Основные понятия и определения колебательных процессов

1.1. Колебания

Напомним, что колебаниями называют такие движения или изменения состояния физической системы, при которых система неоднократно возвращается в некоторое состояние, например, в состояние равновесия.

Колебательные движения широко распространены в природе. Это волнение на море, колебания струн, вибрации фундаментов зданий, колебания маятников часов, электрические колебания в колебательном контуре – примеры можно продолжать до бесконечности. Оказывается, что разнообразные по своей природе колебания имеют общие зако-

номерности и описываются, с точки зрения математики, одними и теми же уравнениями. Например, электрические колебания в колебательном контуре имеют много общего с механическими колебаниями груза на пружине.

1.2. Свободные и вынужденные колебания

По причине своего возникновения колебания подразделяют на свободные и вынужденные. Свободные колебания возникают в системе в результате какого-либо начального отклонения системы от положения устойчивого равновесия. Наличие в системе устойчивого положения равновесия является необходимым

условием возможного протекания колебательного процесса в ней.

Если в системе отсутствуют силы трения и иные силы сопротивления, то при колебаниях не происходит потери энергии. В этом случае свободные колебания происходят сколь угодно долго, то есть не прекращаются, и называются незатухающими. Незатухающие колебания представляют собой идеализованный случай колебаний. Реальные свободные колебания являются затухающими, поскольку полностью устранить потери на трение никогда не удаётся. В электрических цепях процесс потери энергии связан с выделением джоулева тепла, например, на соединительных проводах и резисторах.

Для поддержания в реальной системе незатухающих колебаний необходимо переменное воздействие на неё. Незатухающие колебания в системе могут возбуждаться воздействием переменной внешней силы. В этом случае колебания называют вынужденными. Наиболее распространённым и интересным случаем вынужденных колебаний в системе является, конечно же, случай, когда колебания возбуждаются гармонической силой, то есть силой, изменяющейся со временем по закону синуса или косинуса. В случае электрических колебаний в качестве такой силы выступает, например, переменная ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, действующая в колебательном контуре.

Однако, рассмотрение свободных затухающих и вынужденных колебаний в электрических цепях выходит за рамки настоящей статьи, посвящённой исключительно свободным незатухающим электрическим

колебаниям. К затухающим и вынужденным колебаниям мы непременно вернёмся в следующих своих публикациях.

1.3. Периодические и гармонические колебания

Колебательные процессы, с которыми приходится встречаться, подразделяют на периодические и непериодические в зависимости от характера изменения со временем физических величин, характеризующих состояние системы.

Колебания называют периодическими, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. При этом наименьший промежуток времени T , по истечению которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему, называется периодом колебаний. Иными словами, период T — это время, за которое совершается одно колебание.

Частотой периодических колебаний называется физическая величина f , равная числу колебаний, совершаемых в единицу времени. Если за время t в системе совершается N колебаний, то частота колебаний равна:

$$f = \frac{N}{t}.$$

Учитывая, что за время, равное периоду, совершается одно колебание, приходим к связи частоты f с периодом T :

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частным случаем периодических колебаний являются гармонические колебания, при которых колеблющаяся физическая величина S (на-

пример, заряд q конденсатора или сила тока I в колебательном контуре), а точнее её отклонение x от значения S_0 в положении равновесия ($S = S_0 + x$), изменяется со временем по гармоническому закону:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Здесь положительная константа A , равная максимальному отклонению x от положения равновесия, называется амплитудой колебаний.

Периодом T функции (1), как известно из математики, является

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Это и будет период колебаний.

Для частоты гармонических колебаний имеем:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \text{ откуда } \omega = 2\pi f.$$

Величина ω , равная произведению частоты f на 2π , называется циклической частотой гармонического колебания.

Выражение $\omega t + \varphi_0 = \varphi$ определяет значение величины x в любой момент времени t и называется фазой колебаний. В начальный момент времени ($t=0$) фаза φ равна начальной фазе φ_0 .

Амплитуда A и начальная фаза φ_0 колебательного процесса зависят от начального состояния (начальных условий), из которого система начинает совершать колебания. В отличие от этого, циклическая частота ω , а, следовательно, и период колебаний T , как правило, не зависят от начальных условий и определяются параметрами колебательной системы (массой груза, жёсткостью пружины, ёмкостью конденсатора, индуктивностью катушки, и т.п.). Ис-

ключением являются ситуации, например, при механических колебаниях маятника, когда от начального угла отклонения маятника многое зависит. В случае малых углов отклонения колебания будут гармоническими, а в случае больших углов – совсем другая история.

1.4. «Скорость» и «ускорение» гармонического колебания

Под скоростью v колебательного процесса понимают изменение колеблющейся величины S в единицу времени, то есть её производную по времени:

$$\begin{aligned} v = \dot{S} = \dot{x} &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= v_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

где $v_0 = A\omega$ – амплитуда (максимальное значение) скорости изменения S . (Здесь и далее точка сверху над буквой, обозначающей некоторую физическую величину, обозначает, как принято, дифференцирование этой физической величины по времени).

Заметим, что при гармонических колебаниях имеет место дифференциальное соотношение:

$$(\dot{x})^2 + \omega^2 x^2 = A^2 \omega^2 = \text{const}. \quad (2)$$

Мы показали, что при гармонических колебаниях справедливо соотношение (2), то есть, из (1) следует (2). В математике доказывается и обратное утверждение, что из (2) следует (1).

Таким образом, если при анализе колебательной системы мы приходим к уравнению вида (2), то вправе утверждать, что его решением является функция вида (1). Это означает, что мы имеем дело с гармоническими колебаниями, про-

ходящими с циклической частотой ω и периодом $T = 2\pi / \omega$.

Под ускорением a колебания понимают изменение его скорости v в единицу времени, то есть производную скорости v по времени, равную второй производной отклонения x по времени:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Нетрудно заметить, что при гармонических колебаниях, наряду с соотношением (2), имеет место и дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3)$$

Мы показали, что при гармонических колебаниях также справедливо соотношение (3), то есть, из (1) следует (3). В математике доказывается и обратное утверждение, что из (3) следует (1).

Таким образом, если при анализе колебательной системы мы приходим к уравнению вида (3), то вправе утверждать, что его решением является функция вида (1), что означает, что мы имеем дело с гармоническими колебаниями, проходящими с циклической частотой ω и периодом $T = 2\pi / \omega$.

Отметим, что к уравнениям вида (2) для колебательных процессов, проходящих в колебательных контурах, мы будем приходить, применяя закон сохранения энергии, а к уравнениям вида (3) нас приведёт второе правило Кирхгофа.

Обратим внимание читателя на следующий момент. Уравнение (3) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка для функции $x(t)$, равной отклонению колеблющейся физической величины $S(t)$ от её равновесного значения S_0 . Получим дифференциальное уравнение для самой функции $S(t)$. Для этого в уравнение (3) вместо x подставим его выражение: $x = S - S_0$. В итоге приходим к искомому уравнению:

$$\ddot{S} + \omega^2 S = \omega^2 S_0,$$

в котором правая часть отлична от нуля. В этом нет ничего страшного, и это никак не повлияет на наш вывод о гармоничности колебаний. С подобными ситуациями мы непременно встретимся при решении задач.

Завершая первый раздел нашего изложения, отметим, что мы рассмотрели далеко не все понятия, присущие колебательным процессам. Часть из них, характеризующих затухающие и вынужденные колебания (время релаксации, логарифмический декремент затухания, добротность колебательной системы, явление резонанса и резонансная частота) будут рассмотрены в отдельных публикациях. А сейчас перейдём к рассмотрению конкретных цепей, в которых происходят электрические колебания, и начнём с незатухающих колебаний в простом колебательном контуре.

2. Идеальный колебательный контур

Простейшая система, в которой могут происходить свободные электрические колебания, называемая колебательным контуром, состоит из

конденсатора и катушки индуктивности. Если активное (омическое) сопротивление контура равно нулю, то контур считается идеальным.

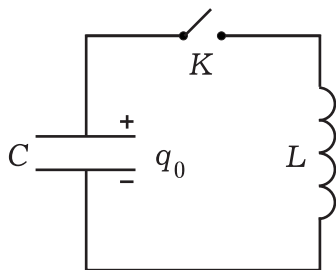


Рис. 1

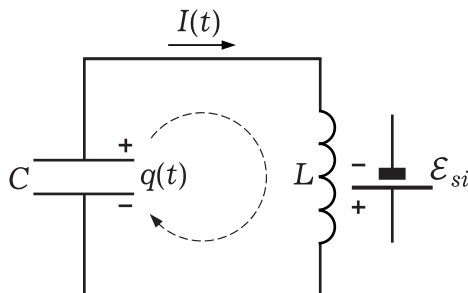


Рис. 2

Пусть в идеальном колебательном контуре, изображённом на рисунке 1, конденсатор ёмкости C заряжен зарядом q_0 , ток в катушке индуктивности L не течёт, а ключ K разомкнут.

После замыкания ключа K в контуре возникают электрические колебания, сопровождаемые взаимными превращениями энергии электрического поля конденсатора

$W_C = \frac{q^2}{2C}$ и энергии магнитного поля

катушки $W_L = \frac{LI^2}{2}$. При этом полная

энергия W колебаний, равная сумме энергий конденсатора и катушки индуктивности, остаётся постоянной и равной начальной энергии конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (4)$$

Здесь q и I – заряд конденсатора и сила тока в катушке соответственно при колебаниях в произвольный момент времени t , показанный на рисунке 2.

Принимая во внимание, что сила тока I и заряд q конденсатора (заряд верхней его обкладки) связаны в нашем случае соотношением:

$$I = -\frac{dq}{dt} \equiv -\dot{q},$$

уравнению (4) можно придать вид:

$$\begin{aligned} (\dot{q})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 q^2 &= \\ = q_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 &= const. \end{aligned} \quad (5)$$

Видим, что полученное уравнение (5) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (2), что позволяет сделать вывод о гармоничности колебаний, происходящих в контуре. Циклическая частота этих колебаний, как мы видим из сопоставления уравнений (5) и (2), равна:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

С учётом этого для периода T колебаний имеем:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (6)$$

Полученная таким образом формула (6) носит название формулы Томсона.

Амплитуда колебаний заряда конденсатора, как видно также из сравнения уравнений (2) и (5), есть не что иное как начальный заряд q_0 конденсатора.

С учётом этого и в соответствии с уравнением (1) нетрудно записать

зависимость от времени заряда конденсатора и найти аналогичную зависимость силы тока в цепи:

$$q(t) = q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}};$$

$$I(t) = -\dot{q}(t) = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} = I_0 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}},$$

где $I_0 = q_0 / \sqrt{LC}$ – амплитудное (максимальное) значение силы тока в цепи. При записи этих временных зависимостей мы, разумеется, учитывали начальные условия:

$$q(0) = q_0; \quad I(0) = \dot{q}(0) = 0.$$

Графики полученных временных зависимостей представлены на рисунке 3.

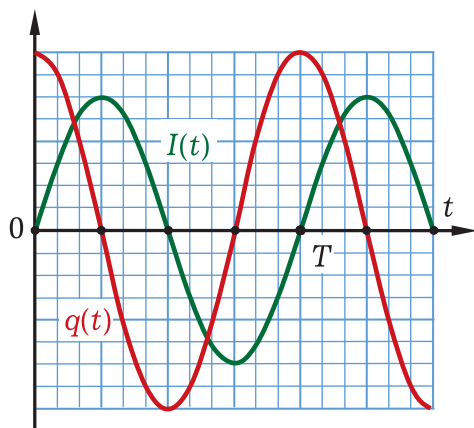


Рис. 3

К утверждению о гармоничности колебаний мы пришли, отталкиваясь от закона сохранения энергии. Придём теперь к этому же выводу, исходя из второго правила Кирхгофа. Применяя это правило, катушку индуктивности учитываем как источник с ЭДС, равной ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}$, возникающей в катушке в направлении тока (рис. 2). В итоге приходим к уравнению:

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C}. \quad (7)$$

Заметим здесь, что, когда сила тока I в цепи (и, соответственно, в катушке) достигает максимального значения I_0 , то его производная $\frac{dI}{dt}$ обращается в ноль, и, как следует из уравнения (7), обращается в ноль и заряд q конденсатора. Таким образом, в момент, когда конденсатор полностью разряжен, ток в катушке достигает своего максимального значения I_0 . Мы уже получили выше это значение через дифференцирование функции $q(t)$. Придём теперь к тому же результату из закона сохранения энергии:

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2}; \quad \rightarrow I_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}.$$

Считаем важным отметить, что достижение максимума силы тока в момент, когда конденсатор полностью разряжен, происходит только при отсутствии (!) активного (омического) сопротивления. Как только в контуре появится резистор, это утверждение будет уже неверным. Но об этом позже.

Вернёмся к уравнению (7). Принимая во внимание, что $I = -\dot{q}$, найдём производную тока по времени, через вторую производную по времени от заряда q :

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{d}{dt}(\dot{q}) = -\ddot{q}.$$

С учётом этого уравнение (7) приводится к виду (3):

$$\ddot{q} + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2 q = 0. \quad (8)$$

Сопоставляя уравнение (8) с уравнением (3), приходим к выводу, что в контуре происходят гармони-

ческие колебания с периодом, определяемым формулой Томсона (6).

Перейдём теперь к рассмотрению задач на незатухающие электрические колебания в колебательном контуре. Первые две задачи составлены автором статьи по мотивам задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МФТИ в 1979 и 1980 годах.

Задача 1. Конденсатор ёмкости C , заряженный до напряжения U_0 , посредством замыкания ключа K подключается к двум катушкам с индуктивностями L_1 и L_2 , в которых изначально электрический ток отсутствовал (рис. 4). Требуется определить:

1. Период возникающих электрических колебаний после замыкания ключа;

2. Максимальные значения сил токов $I_{1\max}$ и $I_{2\max}$ в катушках при колебаниях;

3. Электрические заряды q_1 и q_2 , протекающие через катушки L_1 и L_2 соответственно за время первой перезарядки конденсатора.

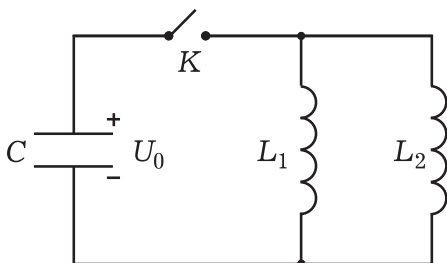


Рис. 4

Решение. Рассмотрим колебательный контур в произвольный момент времени t после замыкания ключа (рис. 5).

Согласно первому правилу Кирхгофа для узла A имеем:

$$I = I_1 + I_2, \quad (9)$$

где сила тока I связана с зарядом конденсатора q соотношением:

$$I = -\dot{q}. \quad (10)$$

Запишем теперь уравнения второго правила Кирхгофа для контуров, направления обхода которых отмечены на рисунке 5 пунктирными линиями со стрелками:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = \frac{q}{C}; \quad (11)$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} - L_1 \frac{dI_1}{dt} = 0. \quad (12)$$

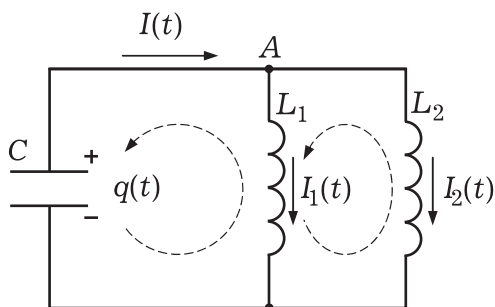


Рис. 5

После несложных математических действий с уравнениями (9) – (12) приходим к дифференциальному уравнению для заряда конденсатора $q(t)$:

$$\ddot{q} + \left(\frac{1}{\sqrt{L_0 C}} \right)^2 q = 0, \text{ где } L_0 = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}. \quad (13)$$

Сопоставляя полученное уравнение (13) с уравнением (3) приходим к выводу, что мы имеем дело с гармоническими колебаниями, происходящими с циклической частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} \text{ и периодом:}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{L_0 C} = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2 C}{L_1 + L_2}}.$$

Итак, на первый вопрос задачи мы ответили. Перейдём к ответу на второй вопрос. Для начала уравнение (12) помножим на dt и немного преобразуем:

$$L_2 dI_2 = L_1 dI_1.$$

Интегрируя полученное уравнение с учётом равенства нулю сил токов в катушках в начальный момент времени, получим уравнение, связывающее эти силы токов в произвольный момент времени t :

$$L_2 I_2 = L_1 I_1. \quad (14)$$

Из уравнения (14) приходим к выводу, что силы токов в катушках либо одновременно возрастают, либо одновременно убывают. Также своих максимальных значений $I_{1\max}$ и $I_{2\max}$ они достигают одновременно, и в этот момент, как следует из уравнения (1), конденсатор полностью разряжен.

С учётом изложенного и на основании закона сохранения энергии для определения искомых сил токов имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_{1\max}^2}{2} + \frac{L_2 I_{2\max}^2}{2}; \\ L_2 I_{2\max} = L_1 I_{1\max}, \end{cases}$$

решая которую, даём ответ на второй вопрос, поставленный в задаче:

$$I_{1\max} = U_0 \cdot \sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2} \cdot \frac{L_2}{L_1}};$$

$$I_{2\max} = U_0 \cdot \sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2} \cdot \frac{L_1}{L_2}};$$

Перейдём теперь к ответу на третий вопрос. За время первой перезарядки конденсатора суммарный заряд, протекающий через катушки, находится по изменению заряда нижней обкладки конденсатора и

равняется удвоенному начальному заряду конденсатора:

$$q_1 + q_2 = 2q_0 = 2CU_0. \quad (15)$$

Умножая уравнение (14) на dt и интегрируя, приходим к соотношению между искомыми зарядами:

$$L_2 q_2 = L_1 q_1. \quad (16)$$

Решая систему уравнений (15) и (16), окончательно находим:

$$q_1 = \frac{2CU_0 L_2}{L_1 + L_2}; \quad q_2 = \frac{2CU_0 L_1}{L_1 + L_2}.$$

Задача 2. Колебательный контур, показанный на рисунке 6, состоит из двух конденсаторов с ёмкостями C_1 и C_2 , катушки с индуктивностью L , ключа K . В начальный момент ключ разомкнут, конденсатор C_1 заряжен до напряжения U_0 , конденсатор C_2 не заряжен, и ток в катушке не течёт. Требуется определить (после замыкания ключа):

1. Период возникающих электрических колебаний;
2. Максимальные значения силы тока $I_{\max}$ в катушке и максимальное напряжение $U_{2\max}$ на конденсаторе C_2 в процессе колебаний.

3. Построить графики зависимостей от времени силы тока I в катушке и напряжения U_2 на конденсаторе C_2 .

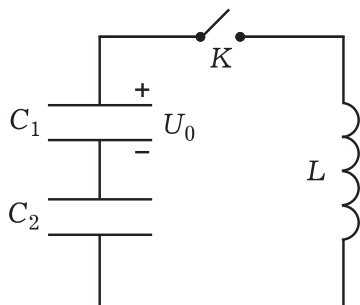


Рис. 6

Решение. Рассмотрим колебательный контур в произвольный момент времени t после замыкания ключа. Пусть знаки зарядов на обкладках конденсаторов и направление тока в контуре в этот момент такие, как показано на рисунке 7. Сами заряды конденсаторов C_1 и C_2 , и силу тока в катушке обозначим через q_1 , q_2 и I соответственно.

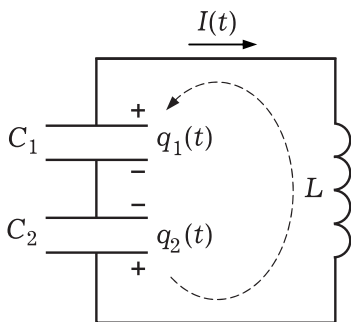


Рис. 7

Применяя закон сохранения электрического заряда и второе правило Кирхгофа, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = C_1 U_0; \\ I = -\frac{dq_1}{dt}; \\ L \frac{dI}{dt} = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2}. \end{cases} \quad (17)$$

Работая с уравнениями системы, нетрудно прийти к дифференциальным уравнениям для каждой из функций $q_1(t)$, $q_2(t)$ и $I(t)$:

$$\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC_0}} \right)^2 q_1 = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{U_0}{L}, \text{ где } C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2};$$

$$\ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC_0}} \right)^2 q_2 = \frac{U_0}{L};$$

$$\ddot{I} + \left(\frac{1}{\sqrt{LC_0}} \right)^2 I = 0.$$

Каждое из этих уравнений описывает гармонические колебания, происходящие с циклической частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ и периодом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{LC_0} = 2\pi \sqrt{\frac{LC_1 C_2}{C_1 + C_2}}.$$

Здесь следует обратить внимание на тот факт, что правая часть дифференциальных уравнений для зарядов q_1 и q_2 отлична от нуля, а это не соответствует уравнению (3). Однако путём несложных преобразований и замены переменных эти уравнения сводятся к уравнению (3). В самом деле, если ввести следующую замену переменных:

$$q_1 = Q_1 + C_1 U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2};$$

$$q_2 = Q_2 + C_1 U_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2},$$

то обозначенные уравнения примут вид:

$$\ddot{Q}_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC_0}} \right)^2 Q_1 = 0;$$

$$\ddot{Q}_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC_0}} \right)^2 Q_2 = 0.$$

Перейдём теперь к ответу на вторую часть вопросов задачи. Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{C_1 U_0^2}{2} = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2} + \frac{LI^2}{2}, \quad (18)$$

где $U_1 = \frac{q_1}{C_1}$, а $U_2 = \frac{q_2}{C_2}$ – напряжения на конденсаторах в некоторый

момент времени, а I – сила тока в катушке при этом.

В момент, когда сила тока в катушке достигает максимального значения $I_{\max}$, ЭДС самоиндукции в катушке становится равной нулю, что приводит к равенству напряжений на конденсаторах, как это видно из третьего уравнения системы (17). Принимая во внимание закон сохранения заряда (первое уравнение системы (17)), теперь нетрудно найти напряжения на конденсаторах в этот момент:

$$U_1 = U_2 = \frac{C_1 U_0}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя теперь найденные значения напряжений U_1 и U_2 в уравнение (18), после несложных преобразований находим искомую силу тока:

$$I_{\max} = U_0 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}.$$

Зависимость силы тока от времени в катушке при этом имеет вид:

$$I(t) = I_{\max} \cdot \sin \omega t. \quad (19)$$

Очевидно, что в момент, когда напряжение на конденсаторе C_2 достигает своего максимального значения $U_{2\max}$ ($U_{2\max} \neq 0$), сила тока в катушке равна нулю. В противном случае напряжение на этом конденсаторе продолжало бы возрастать. Таким образом, мы приходим к системе уравнений, где через U обозначено напряжение на конденсаторе C_1 в рассматриваемый момент:

$$\begin{cases} \frac{C_1 U_0^2}{2} = \frac{C_1 U^2}{2} + \frac{C_2 U_{2\max}^2}{2}; \\ C_1 U + C_2 U_{2\max} = C_1 U_0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим искомое напряжение:

$$U_{2\max} = \frac{2C_1 U_0}{C_1 + C_2}.$$

Зависимость напряжения U_2 от времени имеет вид:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2} U_{2\max} (1 - \cos \omega t) = \\ &= U_{2\max} \sin^2 \frac{\omega t}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Временные зависимости (19) и (20) приведены нами без каких-либо пояснений. Предлагаем читателю в этом разобраться самостоятельно.

Графики зависимостей $I(t)$ и $U_2(t)$ представлены на рисунке 8.

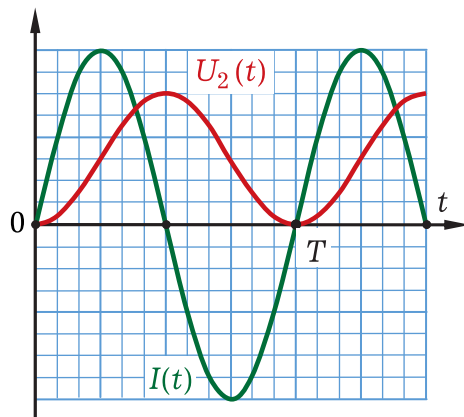


Рис. 8

Задача 3. Два удалённых проводящих шара радиусом R каждый соединены участком цепи, содержащим конденсатор ёмкости C , катушку индуктивности L , ключ K (рис. 9). В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор заряжен до напряжения U_0 , заряды на шарах отсутствуют, ток в катушке не течёт. Требуется определить максимальное значение силы тока в цепи и максимальный заряд на каждом из

шаров после замыкания ключа. Омическим сопротивлением катушки и сопротивлением соединительных проводов пренебречь. (*Вступительные экзамены в МФТИ, 1985 г. Автор: Д. Подлесный*)

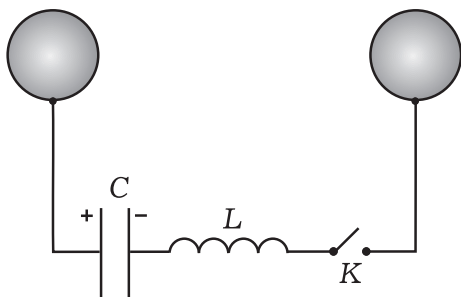


Рис. 9

Решение. После замыкания ключа в цепи возникнут электрические колебания, при которых на шарах, в силу закона сохранения заряда, будут появляться разные по знаку и одинаковые по модулю электрические заряды. Система шаров

при этом ведёт себя аналогично конденсатору некоторой ёмкости C^* , которую нетрудно найти. В самом деле, если на одном из шаров находится заряд $+q$, то на другом шаре находится заряд $-q$. Разность потенциалов шаров (с учётом их удалённости) окажется равной:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}.$$

С учётом этого для ёмкости системы шаров имеем:

$$C^* = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-} = 2\pi\epsilon_0 R.$$

Дальнейшее решение в точности повторяет решение предыдущей задачи. Поэтому, опираясь на её результаты, запишем ответы на поставленные в нашей задаче вопросы:

$$I_{\max} = U_0 \sqrt{\frac{CC^*}{L(C+C^*)}};$$

$$q_{\max} = \frac{2CC^*}{C+C} U_0, \text{ где } C^* = 2\pi\epsilon_0 R.$$

3. Источник с постоянной ЭДС в колебательном контуре

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из источника с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$, конденсатора ёмкости C , катушки с индуктивностью L и ключа K (рис. 10). Считаем, что внутреннее сопротивление источника и омическое сопротивление катушки индуктивности равны нулю. Также известно, что в начальный момент ключ разомкнут, конденсатор разряжен, ток в катушке отсутствует.

Рассмотрим процессы, проходящие в цепи после замыкания ключа, и найдём зависимости от времени тока в катушке I и напряжения U на конденсаторе при этом.

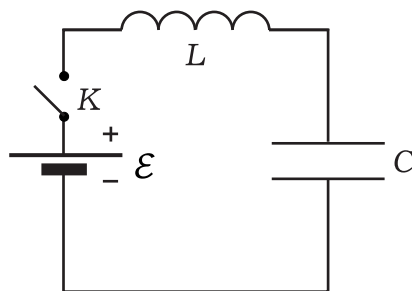


Рис. 10

Заметим, что наша цепь представляет собой идеальный колебательный контур, в который добавлен источник с постоянной ЭДС. Забегая

вперёд, скажем, что после замыкания ключа в цепи будут происходить гармонические колебания с той же самой циклической частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ как и в простом колеба-}$$

тельном контуре при отсутствии источника. Давайте в этом убедимся.

Рассмотрим нашу цепь в произвольный момент времени t после замыкания ключа (рис. 11) и воспользуемся вторым правилом Кирхгофа:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C}.$$

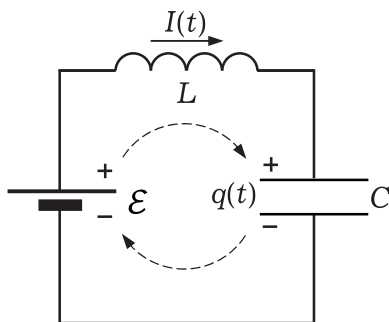


Рис. 11

В нашем случае сила тока I связана с зарядом конденсатора q уравнением: $I = \dot{q}$. Тогда для неизвестной функции $q(t)$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (21)$$

Введём обозначения:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad x(t) = q(t) - C\mathcal{E}. \quad (22)$$

С учётом этих обозначений уравнение (21) преобразуется и становится в точности уравнением (3):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

решением которого, как уже отмечалось, является функция

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Величины A и φ_0 мы найдём из начальных условий. Поскольку в начальный момент (сразу после замыкания ключа) заряд конденсатора и сила тока в цепи равны нулю, то есть $q(0) = 0$ и $I(0) = \dot{q}(0) = 0$, находим, что

$$x(0) = q(0) - C\mathcal{E} = -C\mathcal{E}; \quad \dot{x}(0) = \dot{q}(0) = 0.$$

С учётом этого для определения величин A и φ_0 приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} A \cos \varphi_0 = -C\mathcal{E}; \\ -A \omega \sin \varphi_0 = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим: $A = C\mathcal{E}$; $\varphi_0 = \pi$.

Таким образом, в соответствии с соотношениями (18) мы приходим к зависимости заряда конденсатора от времени:

$$\begin{aligned} q(t) &= x(t) + C\mathcal{E} = C\mathcal{E} \cos(\omega t + \pi) + C\mathcal{E} = \\ &= C\mathcal{E}(1 - \cos \omega t), \text{ где } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно найти искомые временные зависимости $I(t)$ и $U(t)$:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin \frac{t}{\sqrt{LC}};$$

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} \right).$$

Анализируя полученные зависимости, можно заметить, что в процессе колебаний максимальные значения силы тока в катушке $I_{\max}$ и напряжения на конденсаторе $U_{\max}$ следующие:

$$I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}}; \quad U_{\max} = 2\mathcal{E}. \quad (23)$$

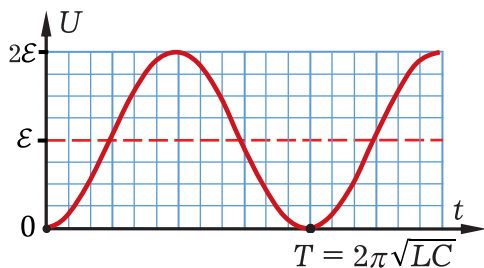


Рис. 12

Колебания напряжения на конденсаторе происходят относительно смещённого положения равновесия, при котором $U = \mathcal{E}$. Если омическое сопротивление контура было бы отлочно от нуля, то колебания в контуре в конце концов прекратились, и напряжение на конденсаторе приняло бы это равновесное значение $U = \mathcal{E}$.

В рассмотренном примере график зависимости напряжения на конденсаторе представлен на рисунке 12.

Кстати, к выражениям (23) можно прийти и другим путём, а именно, через закон сохранения энергии. В самом деле, заряженный конденсатор и катушка с током обладают энергией. Но откуда она берётся? Ответ прост – источник совершает работу при протекании через него электрических зарядов! Таким образом, приходим к уравнению, отражающему сохранение энергии в нашей цепи:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_C + \Delta W_L = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}.$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемой ситуации, заряд q , протекающий через источник, равен заряду конденсатора CU , можно выразить работу источника по формуле $A_{\text{ист}} = q\mathcal{E} = CU\mathcal{E}$, и подставить в

предыдущее уравнение. В итоге получаем, что в произвольный момент времени t , когда сила тока в катушке I , а напряжение на конденсаторе U , справедливо соотношение:

$$CU\mathcal{E} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}. \quad (24)$$

А теперь легко и непринуждённо приходим выражениям (23).

Когда напряжение на конденсаторе достигает своего максимального значения, сила тока в катушке равна нулю. С учётом этого из уравнения (24) имеем:

$$U_{\text{max}} = 2\mathcal{E}.$$

Когда сила тока в катушке достигает максимального значения, ЭДС самоиндукции обращается в ноль, что приводит к равенству напряжения U на конденсаторе и ЭДС $\mathcal{E}$ источника. Таким образом, принимая во внимание, что $U = \mathcal{E}$, из уравнения (24) находим:

$$I_{\text{max}} = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Рассмотрим две очередные задачи, первую из которых теперь читатель должен решить без особого труда. Поэтому мы ограничимся лишь её формулировкой с указанием ответа.

Задача 4. Два удалённых проводящих шара радиусом R каждый соединены участком цепи, содержащим источник с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$, катушку индуктивности L , ключ K (рис. 13). В начальный момент ключ K разомкнут, заряды на шарах отсутствуют, ток в катушке не течёт. Требуется определить максимальное значение силы тока в цепи и максимальный заряд на каждом из шаров после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением источ-

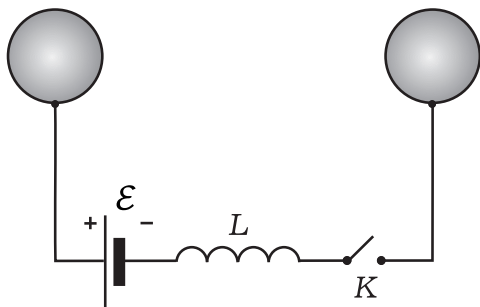


Рис. 13

ника, омическим сопротивлением катушки и сопротивлением соединительных проводов предлагается пренебречь. (Вступительные экзамены в МФТИ, 1985 г. Автор: Д. Подлесный)

Ответ: $I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C^*}{L}};$

$q_{\max} = 2C^* \mathcal{E},$ где $C^* = 2\pi\epsilon_0 R.$

Задача 5. В цепи, изображённой на рисунке 14, при разомкнутом ключе K напряжение на конденсаторе ёмкости C равно $U_0 = 5\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС источника. Требуется найти максимальное значение $I_{\max}$ силы тока через катушку индуктивности L после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением источника и омическим сопротивлением катуш-

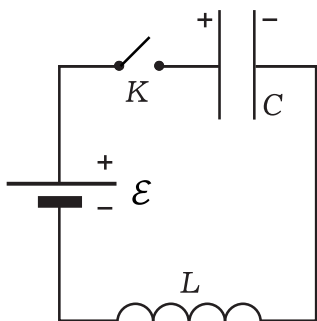


Рис. 14

ки можно пренебречь. (Вступительные экзамены в МФТИ, 2002 г. Автор: В. Можжев)

Решение. После замыкания ключа в цепи возникнут электрические колебания. В момент, когда сила тока через катушку достигнет своего максимального значения, ЭДС самоиндукции катушки станет равной нулю, а, значит, напряжение U на конденсаторе сравняется с ЭДС источника $\mathcal{E}$. Через источник (в направлении от «+» к «-» внутри него, то есть в направлении, противоположном направлению действия сторонних сил) при этом протечёт электрический заряд q , который найдётся через изменение заряда конденсатора:

$$q = CU_0 - CU = 4C\mathcal{E}.$$

Работа, совершённая источником, окажется отрицательной и равной:

$$A_{\text{ист}} = -q\mathcal{E} = -4C\mathcal{E}^2.$$

В соответствии с законом сохранения энергии эта работа (в отсутствие тепловых потерь) равняется суммарному изменению энергий конденсатора и катушки:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_C + \Delta W_L = \frac{C(U^2 - U_0^2)}{2} + \frac{LI^2}{2}.$$

Таким образом, для нахождения максимального тока в катушке приходим к уравнению:

$$-4C\mathcal{E}^2 = \frac{C(\mathcal{E}^2 - (5\mathcal{E})^2)}{2} + \frac{LI_{\max}^2}{2},$$

решая которое, окончательно имеем:

$$I_{\max} = 4\mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$